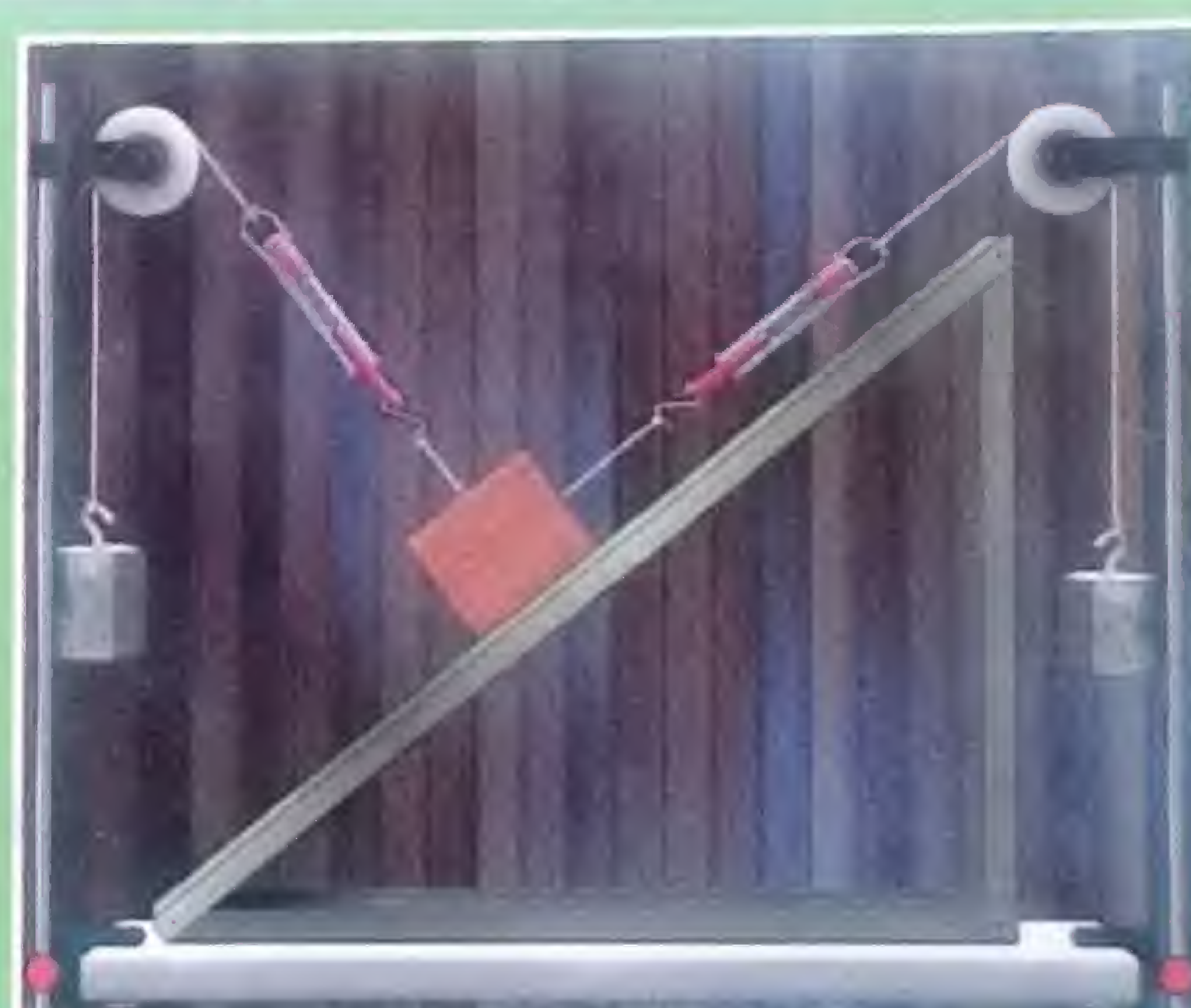
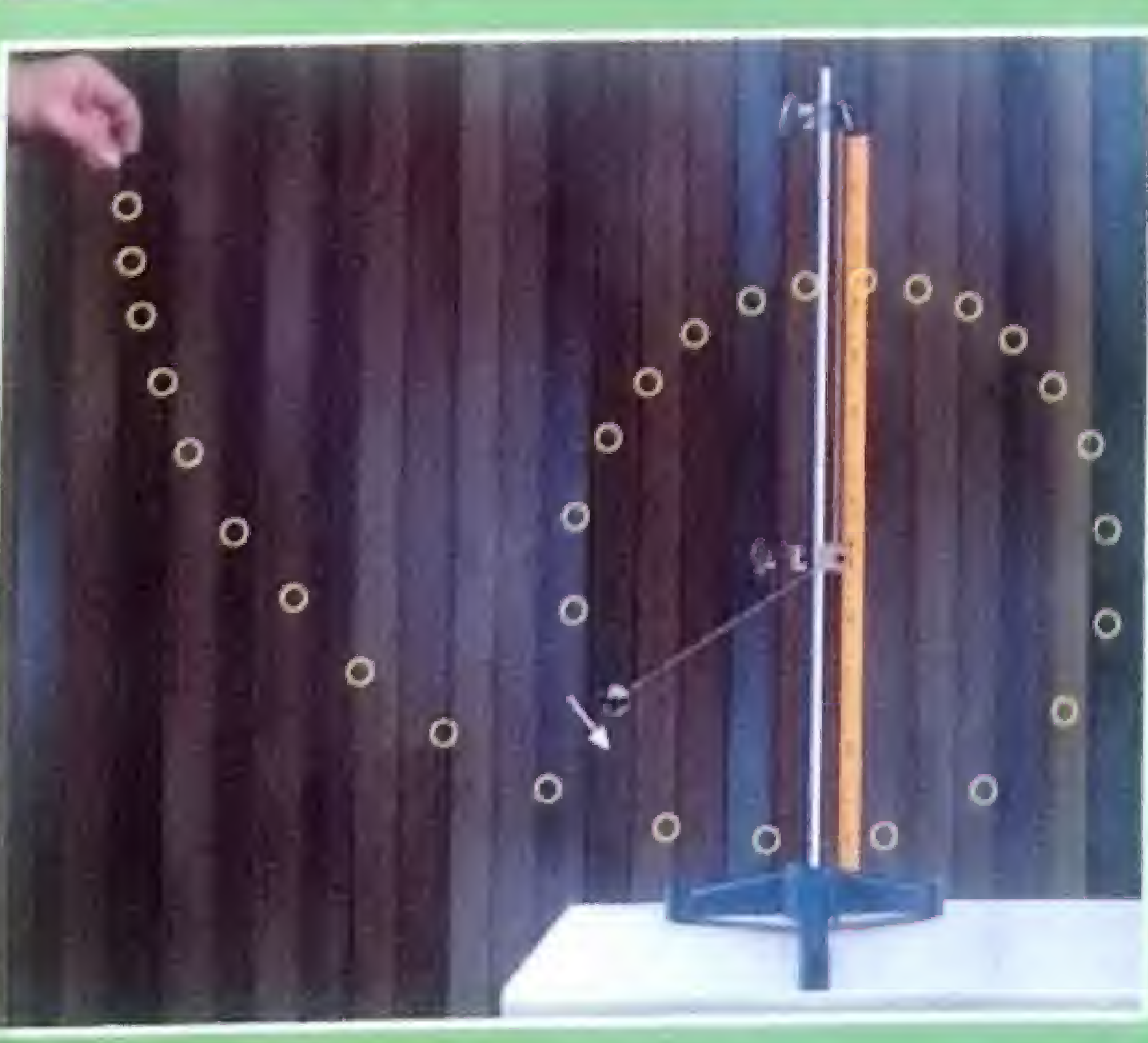
Tercera Edició

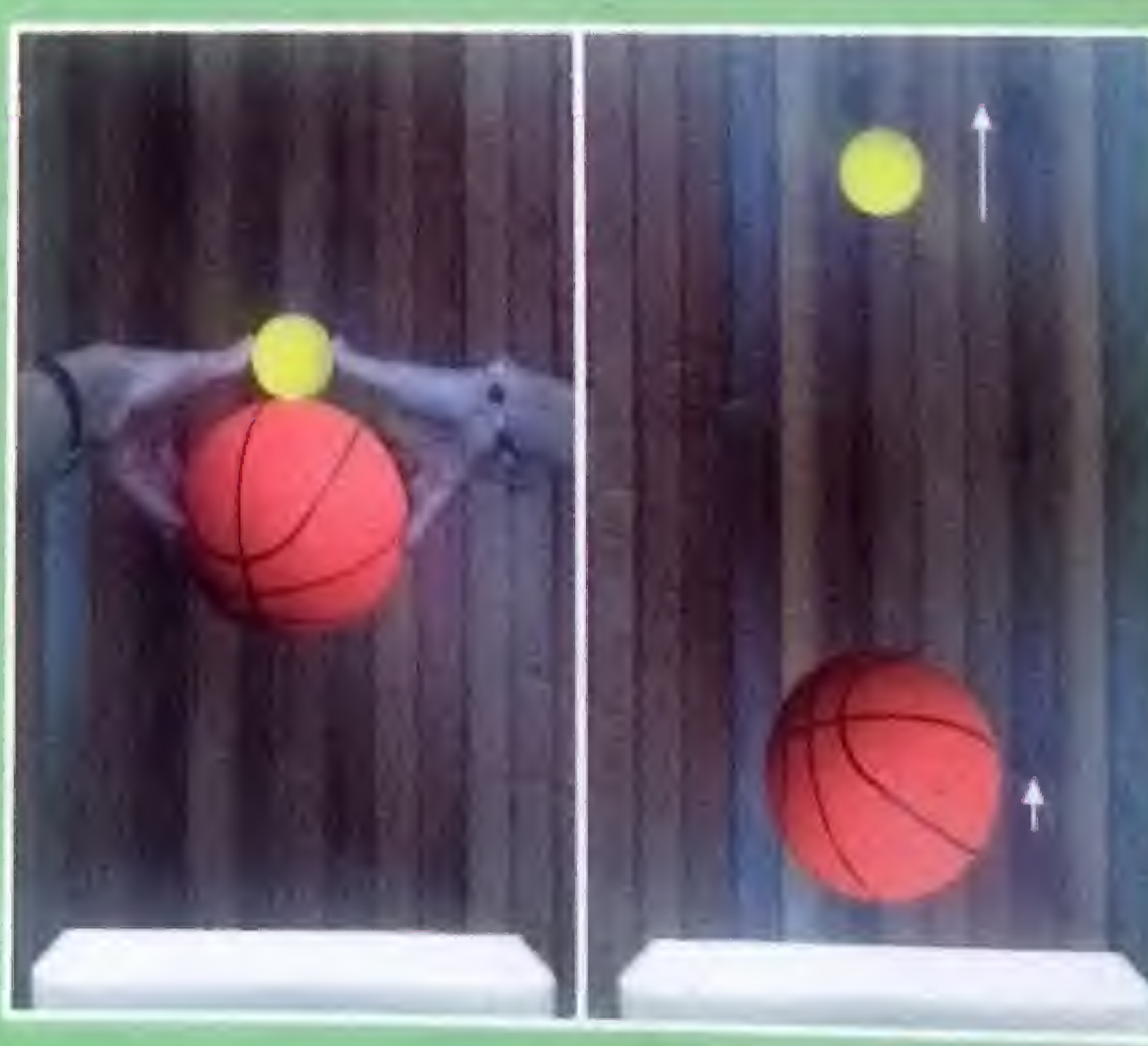
DINÁMICA

Principios. Preguntas y Problemas Resueltos

DOUGLAS FIGUEROA







Vol. 2 - Serie: F Í S I C A
Para Ciencias e Ingeniería

Dinámica

Principios, Preguntas y Problemas Resueltos

Douglas Figueroa, PhD
Profesor Titular
Departamento de Física
Universidad Simón Bolívar

PRIMERA EDICIÓN, 1999.
SEGUNDA EDICIÓN, 2002.
TERCERA EDICIÓN, 2007.
PRIMERA REIMPRESIÓN, 2012 (2.500 ejemplares)

Titulo Original:

DINÁMICA

Serie "Física para Ciencias e Ingeniería" – Unidad 2

DEPÓSITO LEGAL: lf25220075301100

ISBN: 980-12-2483-9

Composición y Diagramación:

Douglas Figueroa

Impresión:

Miguel Angel García e Hijo, SRL
Sur 15, N° 107 – El Conde - Caracas

Impreso en Venezuela
Printed in Venezuela

INTRODUCCIÓN

Esta serie es fruto de muchos años de experiencia del autor en la enseñanza de los distintos cursos introductorios de física para estudiantes de Ciencias e Ingeniería de la Universidad Simón Bolívar. No pretende sustituir al libro de texto; su único propósito es complementarlo, poniendo a disposición del alumno, un abundante número de problemas, ejercicios y preguntas, para ayudarlo en su estudio del curso fuera del aula, con la aplicación de los principios y leyes físicas en múltiples situaciones interesantes y estimulantes, vinculadas a la realidad. Creemos que, con un trabajo continuo basado en el planteamiento y la discusión de preguntas y la resolución de problemas, el alumno puede desarrollar a su propio ritmo, hábitos de razonamiento lógico y estrategias metodológicas que le permita vencer las dificultades que son inherentes al aprendizaje de esta asignatura, una tarea que difícilmente puede lograr el docente en el limitado tiempo de clase que dispone. Esta Unidad 2 está dedicada al tema de Dinámica de Partículas, y se presenta en seis capítulos organizados en tres secciones:

a) Principios Fundamentales: La teoría es expuesta en forma lógica, clara y concisa, tratando de destacar las ideas esenciales y las leyes generales, para permitir una rápida revisión.

b) Problemas Resueltos: Es una selección de problemas con distintos grados de dificultad, que cubren una amplia gama de aplicaciones, tanto en ciencias e ingeniería como en situaciones próximas a la vida diaria, con el objeto de ilustrar y concretar cada uno de los aspectos teóricos. Se dan todas las soluciones en detalle, resaltando el aspecto metodológico y didáctico.

c) Verifica tu comprensión: Son preguntas y ejercicios expresados en forma de elección múltiple, a fin de que compruebes tu comprensión conceptual de los temas abordados y al mismo tiempo que desarrolles tu intuición y sentido físico. La mayoría son de naturaleza conceptual o plantean ejercicios cualitativos, cuya solución se alcanza mediante el razonamiento reflexivo, sin tener que recurrir a las fórmulas. Algunas preguntas presentan situaciones aparentemente paradójicas que podrían ir en contra del sentido común, !piénsalas antes de mirar la respuesta!

La resolución de problemas de física es un proceso intelectual parecido a una pequeña investigación científica en que, no siempre es evidente de antemano cuál debe ser la secuencia de pasos a seguir para obtener un resultado correcto. La destreza necesaria sólo se alcanza trabajando con dedicación y ahínco, hasta adquirir un dominio razonable de los conceptos, principios y leyes físicas que permitan un nivel de aprovechamiento satisfactorio. Esperamos que logres culminar esta asignatura con mucho éxito. ¡Suerte, y adelante!

Douglas Figueroa, PhD
figueroa @usb.ve

CONTENIDO

1

FUERZA Y MOVIMIENTO

En el libro anterior de esta serie hemos estudiado la cinemática, es decir, la descripción del movimiento de los cuerpos sin indagar por qué este ocurre de una manera determinada. Ahora estudiaremos la dinámica, la cual trata de responder preguntas como: ¿Qué provoca que un objeto inmóvil comience a moverse?, ¿Qué hace que un objeto acelere o desacelere? En la dinámica se usan dos conceptos fundamentales: el de masa y el de fuerza. Masa es la medida de la inercia de un cuerpo, es decir, de su tendencia a resistir un cambio en su movimiento. La fuerza puede considerarse como algo que actúa desde el exterior para deformar un cuerpo o para jalarlo o empujarlo, y caracteriza la interacción que existe entre el cuerpo y otro cuerpo en su entorno. La dinámica se basa en las tres leyes enunciadas por Isaac Newton en 1687 y que surgieron como resultado de la generalización de los hallazgos de Newton y de otros científicos que lo precedieron, especialmente Galileo, quien murió el mismo año en que Newton nació. La primera ley establece que en ausencia de la aplicación de una fuerza neta, todo cuerpo en reposo permanece en reposo, y un cuerpo ya en movimiento, permanecerá en movimiento con velocidad constante. La segunda ley establece que la aceleración de un cuerpo es directamente proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él e inversamente proporcional a su masa. La tercera ley establece que siempre que un cuerpo ejerce una fuerza sobre un segundo cuerpo, éste a su vez ejerce una fuerza de magnitud igual y de sentido opuesto sobre el primero. Las tres leyes de Newton son un sistema lógico, riguroso y cerrado de principios que constituyen los pilares de la mecánica clásica o newtoniana. Por ahora, vamos a considerar los objetos reales (pelotas, automóviles, personas,..) como si fuesen cuerpos puntuales o *partículas*, ignorando su tamaño y su forma. En el libro 3 de esta serie, que trata la dinámica del cuerpo rígido, se considera el cuerpo como constituido por un *sistema de partículas*.

En este capítulo Ud. encontrará aspectos relacionados con:

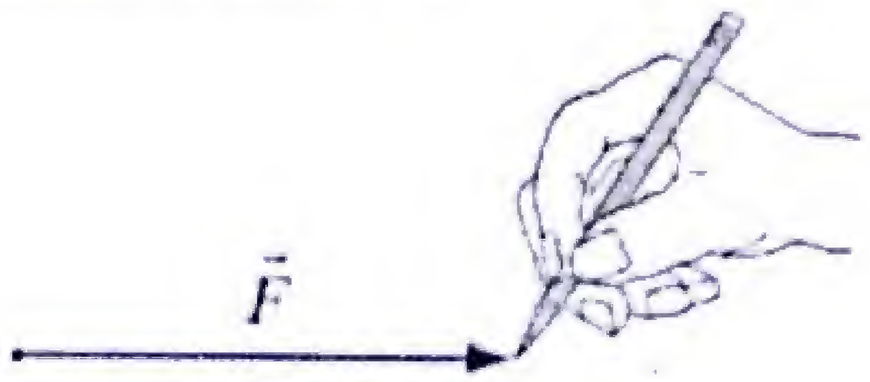
- Concepto de Fuerza.
- Primera ley de Newton.
- Marcos de referencia inerciales.
- Masa inercial.
- Segunda ley de Newton.
- Tercera Ley de Newton.
- Masa y Peso.
- Estrategia para la solución de problemas.

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

EL CONCEPTO DE FUERZA

Estamos familiarizados con la idea intuitiva de fuerza por las experiencias cotidianas. Usualmente identificamos una fuerza con cualquier clase de "jalón" o de "empujón". La fuerza es una magnitud física que caracteriza y cuantifica la interacción entre un cuerpo y su entorno. El efecto de una fuerza sobre un cuerpo es deformarlo (esto es cambiar su tamaño y su forma) o modificar su estado de movimiento.

Una fuerza es capaz de producirle una aceleración a un cuerpo, y se le puede asignar un módulo, una dirección y un sentido. Además podemos combinar fuerzas siguiendo las reglas de adición de vectores, por lo tanto, la fuerza es, en sí misma una *magnitud vectorial* y la podemos representar mediante una flecha.

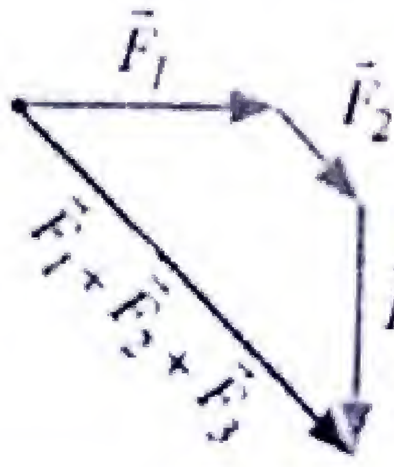


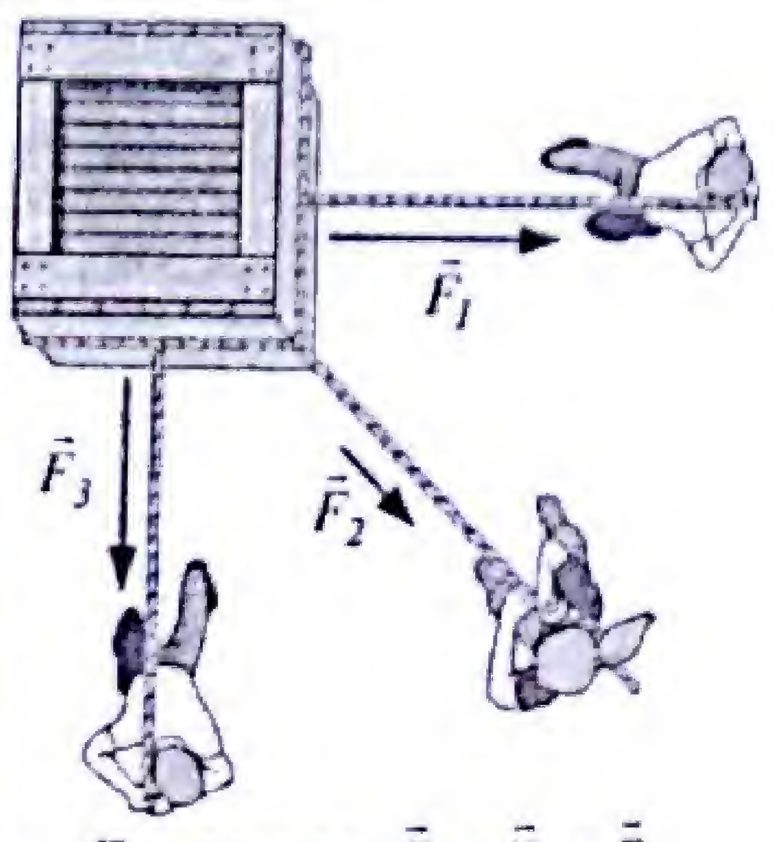
La fuerza es un vector

LA FUERZA NETA

Cuando varias fuerzas actúan sobre un cuerpo, la suma vectorial o resultante de todas las fuerzas recibe el nombre de *fuerza neta*.

$$\vec{F}_{neta} = \sum \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$





Fuerza neta: $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$

La fuerza neta al actuar sola produce el mismo efecto que el sistema de las varias fuerzas que sustituye. En el caso en que $\vec{F}_{neta}=0$, se dice que dichas fuerzas son equilibradas.

PRIMERA LEY DE NEWTON

El problema fundamental de la dinámica consiste en establecer las leyes que vinculan las fuerzas con el estado de movimiento de un cuerpo. Estas son las tres leyes o principios de Newton.

Isaac Newton (1642 - 1727)

Las bases para la primera ley de Newton se deben a Galileo, quien en sus investigaciones se dio cuenta de una tendencia natural de los objetos a mantener su estado inicial de movimiento, lo cual llamó *inercia*. La primera ley de Newton es muy semejante a las conclusiones de Galileo y establece que:

1a. Ley: "Todo cuerpo en estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme permanece en ese estado a menos que sobre él actúe una fuerza neta"

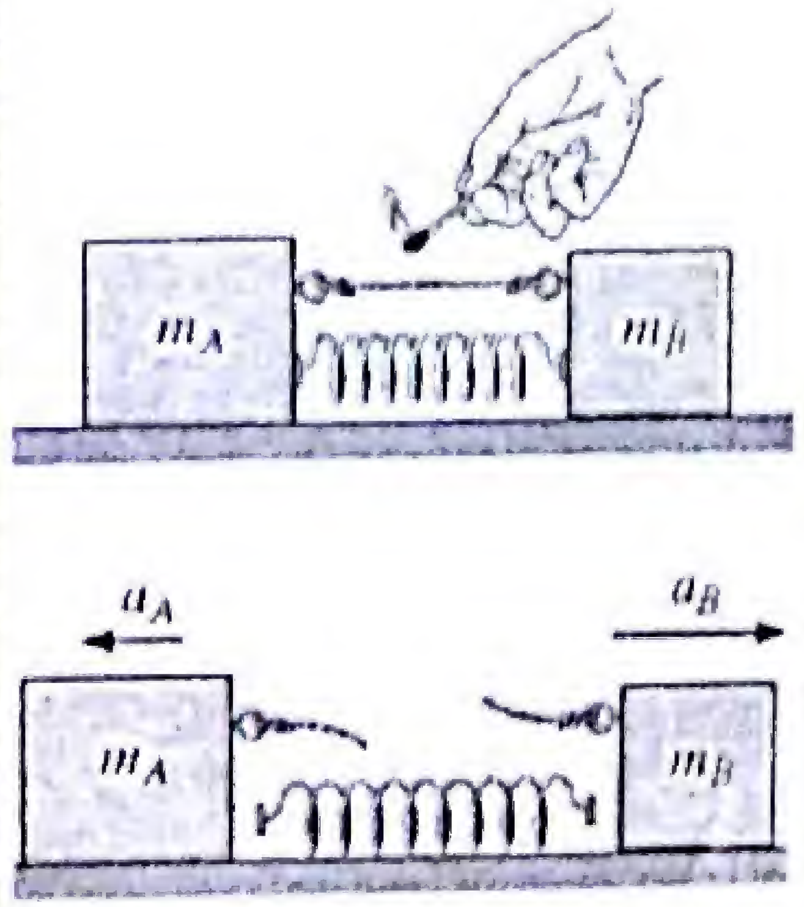
Esto significa que, si la velocidad de un cuerpo no es constante, deducimos que debe actuar sobre el cuerpo una fuerza neta.

Un cuerpo en reposo (la moneda) tiende, por inercia a seguir en reposo

MASA

La noción intuitiva que todos tenemos de masa es que ella corresponde a la cantidad de materia que posee un cuerpo. Con mayor precisión, podemos decir que masa es la propiedad que da a un cuerpo su *inercia* o tendencia natural a mantener su estado de reposo o a permanecer en movimiento. Cuanto mayor masa tenga un cuerpo, más difícil será moverlo o cambiar su velocidad bajo la acción de una fuerza.

Siguiendo un procedimiento propuesto por Mach, podemos comparar las masas inerciales de dos cuerpos a partir de las aceleraciones que adquieren bajo la acción de una misma fuerza. Suponga que sobre una superficie sin rozamiento se colocan dos bloques en reposo con un resorte comprimido entre ellos. Cuando se libera el sistema, los bloques saldrán en sentidos opuestos de forma tal que el bloque mas ligero adquiere mayor aceleración. Como la masa es una medida de la resistencia a cambiar la velocidad, podemos definir la relación entre las masas de dos cuerpos como el inverso de la relación entre las aceleraciones que éstos adquieren: $m_A/m_B = |a_B/a_A|$. Si en un experimento de este tipo, escogemos para uno de los cuerpos una masa de 1 kg usada como patrón de referencia, podemos determinar por comparación, la masa de cualquier otro cuerpo.



$$\frac{m_A}{m_B} = \left|\frac{a_B}{a_A}\right|$$

Método de Mach para la Comparación de masas inerciales

SEGUNDA LEY DE NEWTON

La segunda ley de Newton expresa y cuantifica lo que le sucede a un cuerpo cuando una fuerza neta actúa sobre él:

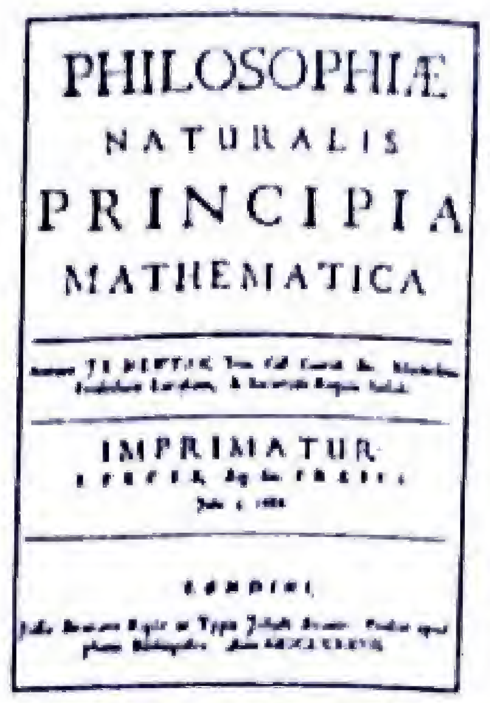
Segunda Ley: *La aceleración de un cuerpo es directamente proporcional a la fuerza neta que actúa sobre él e inversamente proporcional a su masa.*

La constante de proporcionalidad se escoge convenientemente para definir la unidad de fuerza de modo que el producto de la masa del cuerpo por su aceleración es igual a la fuerza neta.

$$\vec{F}_{neta} = m\vec{a}$$

La dirección y sentido del vector aceleración coincide con los de la fuerza neta, sin importar cuál sea la dirección y sentido del vector velocidad.

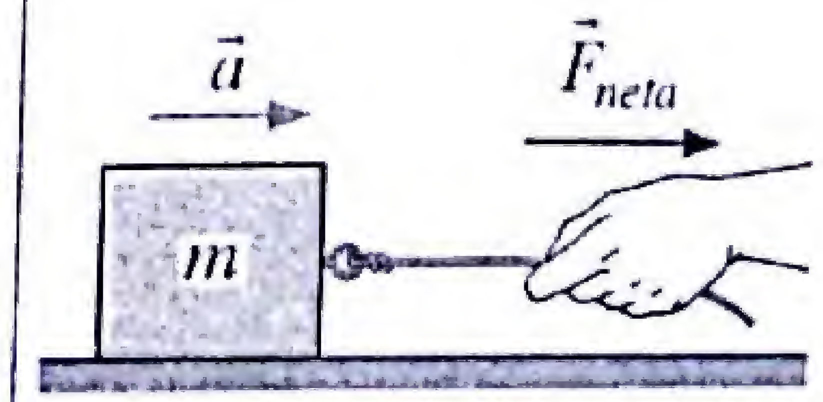
En el caso particular de que la fuerza neta sea cero la aceleración será cero y el cuerpo permanecerá en reposo o en movimiento uniforme, lo cual es consistente con la primera ley.



El libro *Principia* de Newton

Segunda ley:

$\boxed{\vec{F}_{neta} = m\vec{a}}$



TERCERA LEY DE NEWTON

La primera y segunda ley tratan sobre el comportamiento de un solo cuerpo, la tercera ley se refiere a la interacción mutua entre dos cuerpos distintos y separados:

Tercera Ley: *"Siempre que un cuerpo A ejerce una fuerza sobre un cuerpo B, el cuerpo B ejerce una fuerza sobre el cuerpo A, de igual módulo pero sentido contrario"*

A la tercera ley se le llama a veces, la ley de acción y reacción: A cada acción corresponde una reacción. Para evitar confusión, es importante tener presente que las fuerzas acción y reacción actúan sobre objetos diferentes.

Tercera ley:

$\boxed{\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}}$

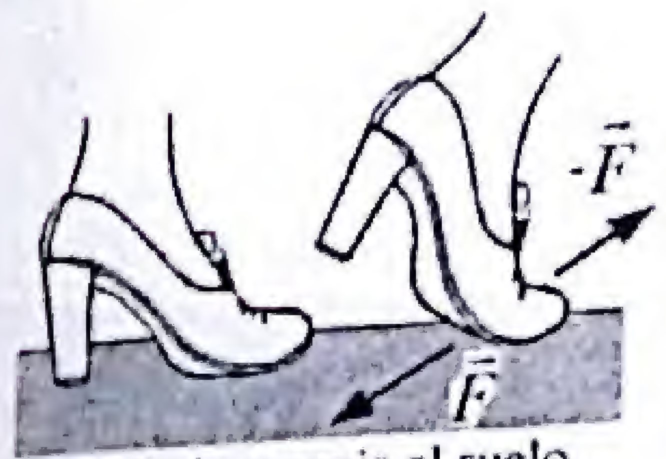
Para toda fuerza (acción) existe una fuerza igual y opuesta (reacción)

Veamos algunos ejemplos de pares acción y reacción:

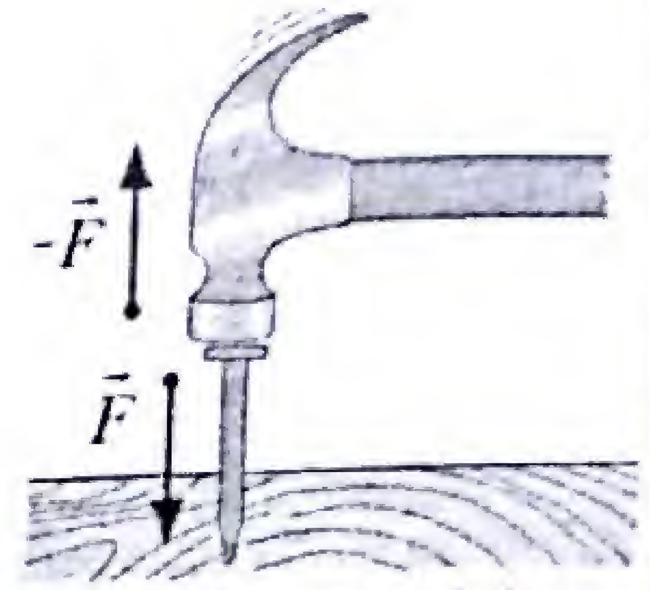
a) Podemos caminar hacia delante porque el suelo empuja sobre nuestros pies en esa dirección cuando empujamos

hacia atrás contra el suelo.

b) Cuando se clava un clavo, la fuerza ejercida por el martillo sobre el clavo (la acción) es igual y opuesta a la fuerza ejercida por el clavo sobre el martillo (la reacción).



a) El pie empuja al suelo
El suelo empuja al pie



b) El martillo golpea al clavo
El clavo golpea al martillo

c) El profesor empuja la pared
La pared empuja al profesor

En la fig. c, la persona que está recostada de la pared, ejerce una fuerza sobre ésta, la reacción de la pared es una fuerza igual y opuesta que empuja a la persona.

PESO Y MASA DE UN CUERPO

Masa y peso se refieren a dos atributos distintos de un cuerpo.

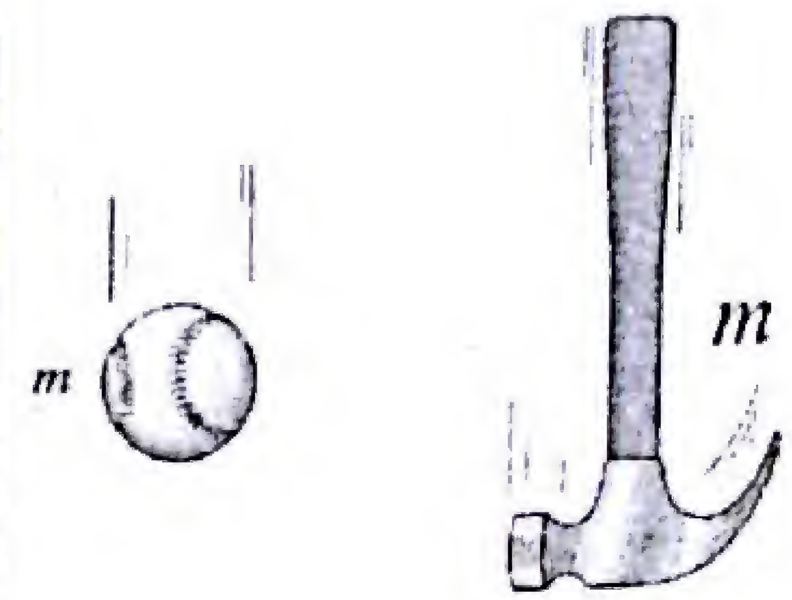
Masa es una propiedad fundamental e inherente de un cuerpo particular que determina su inercia, es decir, su resistencia a cambiar su estado de movimiento.

Peso es la fuerza gravitacional de atracción que un objeto celestial (para nosotros la Tierra) ejerce sobre un cuerpo de determinada masa.

Si en la segunda ley de Newton ($\vec{F} = m\vec{a}$) usamos como fuerza neta el peso del cuerpo $\vec{P}$ y como la aceleración que adquiere, la de la gravedad ($\vec{g}$), el peso de un cuerpo de masa m viene expresado por:

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

Observe que la masa m no depende del valor de g, pero el peso P si depende de éste.



$$\frac{Peso}{Masa} = \frac{F}{m} = \frac{F}{m} = g$$

Todo cuerpo cae con igual aceleración en la superficie terrestre:
$g \equiv 9,8 m/s^2$

$\boxed{\text{Peso: } \vec{P} = m\vec{g}}$

UNIDAD DE MASA: El kilogramo

En el sistema internacional de unidades (SI) la unidad de aceleración es el metro/segundo² (m/s²). Tanto el metro como el segundo son unidades básicas.
La tercera unidad básica en mecánica es la de masa: el kilogramo (kg). El kilogramo patrón de referencia es una barra cilíndrica sólida de platino-iridio que se guarda en Sèvres, Francia.

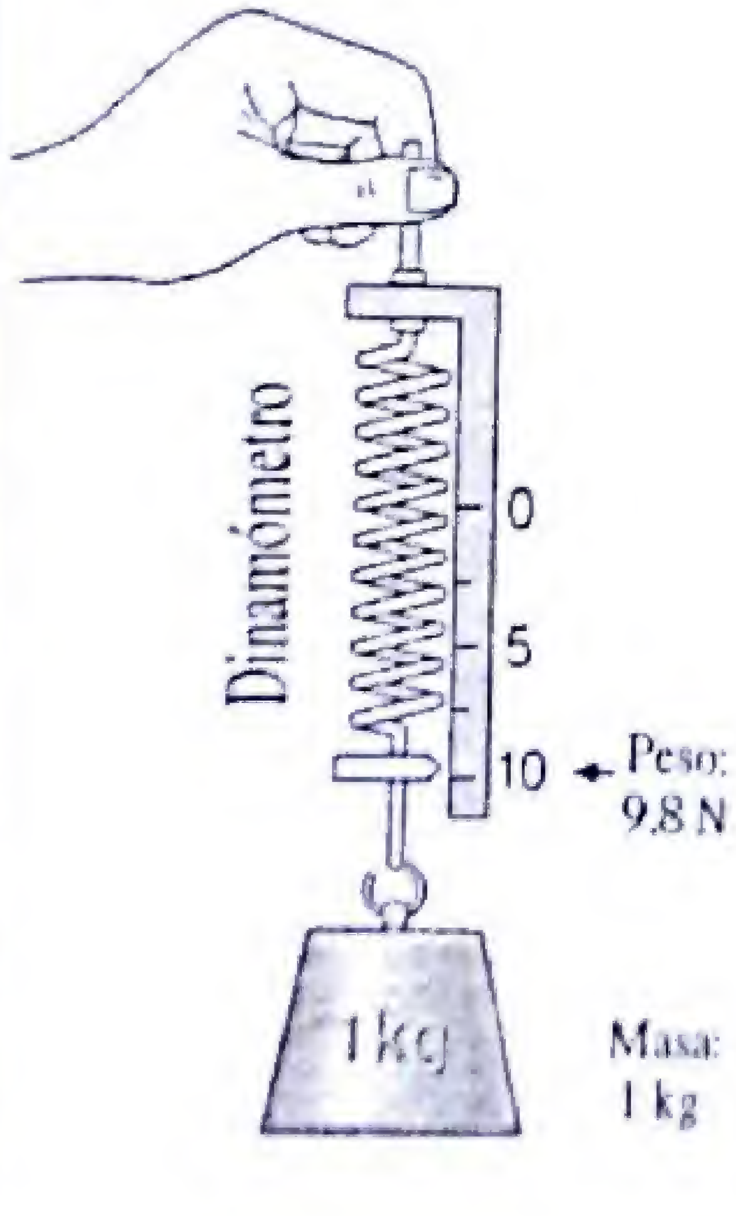
UNIDAD SI DE FUERZA: EL NEWTON

La unidad SI de fuerza es el newton (N).
El newton es una unidad derivada de las unidades básicas y según la segunda ley de Newton es la fuerza que produce una aceleración de 1 m/s² sobre una masa de 1 kg.

$$1 \text{ newton} = 1 \text{ N} = 1 \text{ kg m/s}^2$$

La dimensión de la fuerza es: $[F] = [M]\,[L]\,[T]^{-2}$

Si colgamos pesas en el extremo de un resorte, el estiramiento de éste puede ser graduado para medir fuerzas. Un resorte calibrado de esta manera recibe el nombre de *dinamómetro*. Este es el principio de funcionamiento de muchas básculas.



LAS LEYES DE NEWTON Y LOS MARCOS DE REFERENCIA

Sabemos que el carácter del movimiento depende del marco de referencia elegido. Un cuerpo podría estar en reposo con relación a un marco de referencia, pero estar acelerado en lo que atañe a otro marco de referencia. Por lo tanto, no puede cumplirse la primera ley de Newton en ambos marcos de referencia al mismo tiempo.

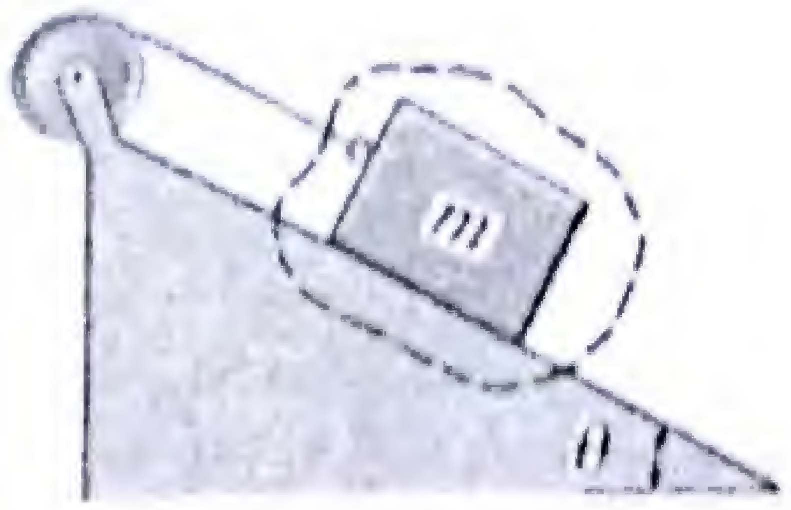
La primera ley de Newton define un tipo de marco de referencia, llamado *marco de referencia inercial*, en el cual un cuerpo no se acelera si no se le perturba. En un marco inercial la aceleración de un cuerpo es el resultado de fuerzas aplicadas por agentes identificables.

Marco inercial:
Aquel en el que se cumple la primera ley de Newton

medio que lo rodea. Ejemplos de estos marcos no inerciales, son los que están en rotación como un carrusel o un vehículo tomando una curva. Por ahora, solo examinaremos el movimiento relativo a marcos de referencia inerciales.

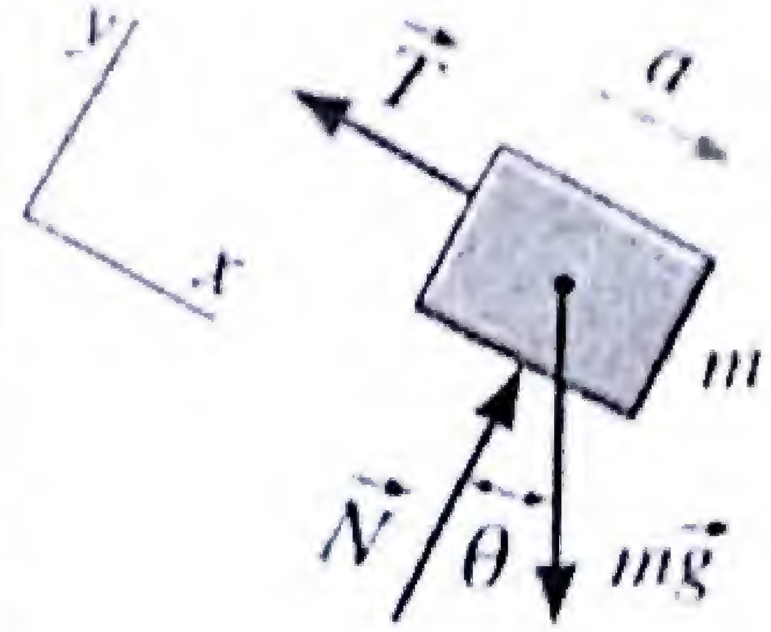
ESTRATEGIAS PARA RESOLVER PROBLEMAS

La resolución de problemas de dinámica conlleva una serie de estrategias, donde puede ser necesario poner en juego la intuición y la creatividad. En cualquier caso, siempre se recomienda al estudiante inexperto, seguir un plan de acción organizado en varias etapas :



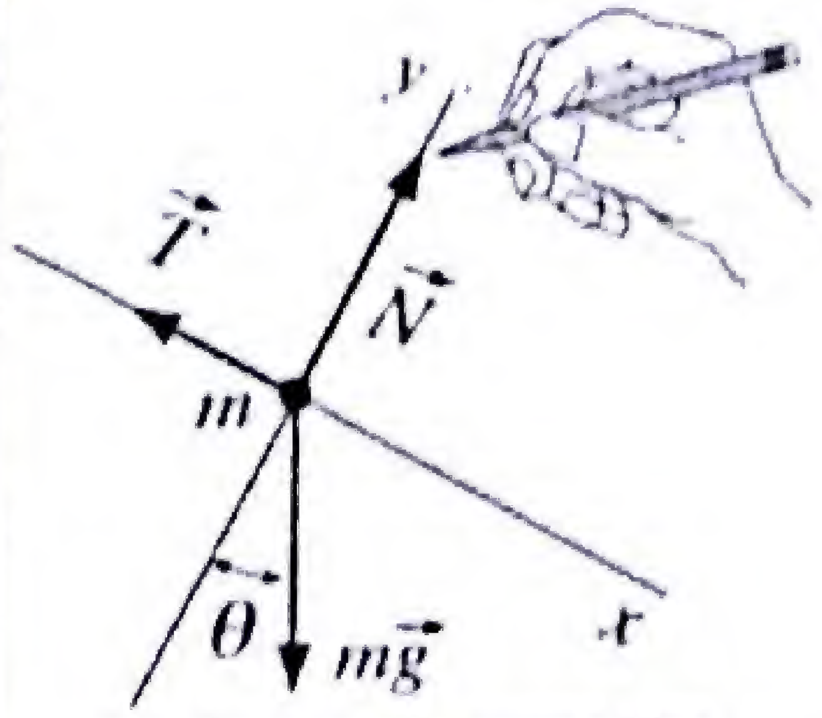
1. Identificar el cuerpo o cuerpos que se van a analizar y el entorno de cada uno de ellos (superficies, cuerdas, resortes u otros cuerpos).

2. Aislar cada cuerpo y hacer un diagrama, mostrando todas las fuerzas externas que actúan sobre él. Esto es lo que se denomina un *diagrama de cuerpo libre*.



Para los objetos reales, es importante indicar en este diagrama, dónde están aplicados los vectores fuerza, porque ello determina, los torques de estas fuerzas y las correspondientes rotaciones que pueden producir. Sin embargo, en la *dinámica de partículas*, solo nos interesa el movimiento lineal del cuerpo, podemos ignorar su tamaño y su forma y considerarlo como si se tratase de un cuerpo puntual. En este caso, todos los vectores fuerzas actúan sobre un punto común.

3. Elegir un marco de referencia inercial. Cada cuerpo puede tener sus propios ejes de coordenadas con origen y orientación apropiados.



Un diagrama de cuerpo libre

4. Aplicar la segunda ley de Newton en componentes ortogonales a cada diagrama de cuerpo libre.

5. Resolver las ecuaciones para las incógnitas. Se debe disponer de tantas ecuaciones como número de incógnitas. Finalmente, sustituir los valores numéricos en las expresiones algebraicas obtenidas.

Segunda ley de Newton en componentes cartesianas

$$\boxed{\begin{aligned}\sum F_x &= ma_x\\ \sum F_y &= ma_y\end{aligned}}$$

6. ¿Son razonables los resultados? Es una pregunta que siempre debemos hacernos. El uso del análisis dimensional puede ser útil como comprobación de la solución. En muchos casos, se podría verificar las predicciones de la solución para valores extremos de las variables. Esto permitiría detectar cualquier error o inconsistencia si los hubiere.

PROBLEMAS RESUELTOS

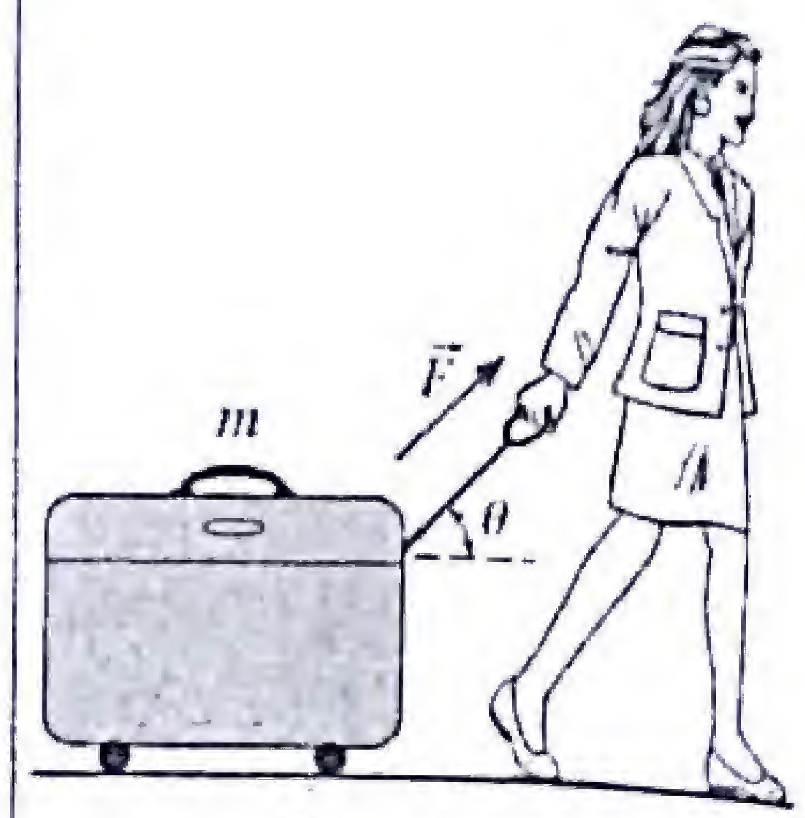
PR-1.01. *Arrastrando la maleta por el suelo sin fricción*

Una aeromoza desliza su maleta de masa $m = 30$ kg, sobre una superficie horizontal, jalándola por la correa con una fuerza $\vec{F}$ que forma un ángulo $\theta = 36{,}9°$ con la horizontal. Se desprecia la fricción entre la maleta y el suelo.

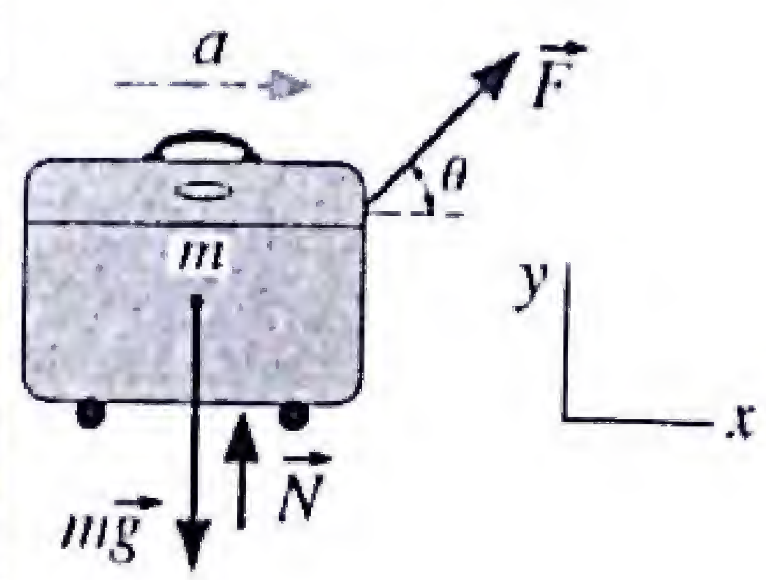
a) Si $F = 450$ N, ¿cuál es la aceleración de la maleta?

b) ¿Qué fuerza normal ejerce el piso sobre la maleta?

c) Suponga que se va aumentando gradualmente el valor de la fuerza, ¿para qué valor de F perderá la maleta contacto con el piso?



Solución: a) Las fuerzas que actúan sobre la maleta se ilustran en el diagrama de cuerpo libre. Además de la fuerza $\vec{F}$ aplicada a la correa, existen: la fuerza de gravedad $m\vec{g}$ y las fuerzas normales ejercidas por el piso sobre cada una de las cuatro ruedas. Esta la hemos representado por un solo vector, $\vec{N}$. Podemos aplicar la segunda ley de Newton en la forma de componentes cartesianas:



$$\sum F_x = F\cos\theta = ma \qquad (1)$$

$$\sum F_y = F\operatorname{sen}\theta + N - mg = 0 \qquad (2)$$

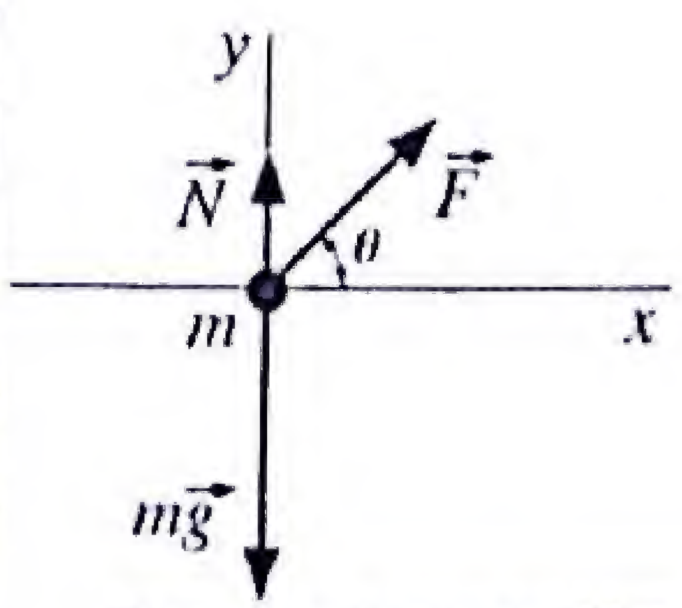


Diagrama de cuerpo libre

De la primera ecuación, se deduce que la aceleración en la dirección horizontal es:

$$a = \frac{F\cos\theta}{m} = \frac{450\text{N}\cos 36{,}9°}{30\text{kg}} = 12\text{m/s}^2$$

b) De la segunda ecuación se obtiene el valor de la fuerza normal:

$$N = mg - F\operatorname{sen}\theta = 30\text{kg}(9{,}8\text{m/s}^2) - 450\text{N}\operatorname{sen}36{,}9° = 23{,}8\text{N}$$

c) Si se aumenta la magnitud de la fuerza aplicada, el bloque mantendrá el contacto siempre que la fuerza normal se mantenga positiva ($mg > F\operatorname{sen}\theta$). El valor crítico de F corresponde a $N = 0$:

$$mg = F\operatorname{sen}\theta \;\Rightarrow\; F_c = \frac{mg}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{30\text{kg}(9{,}8\text{m/s}^2)}{\operatorname{sen}36{,}9°} = 490\text{N}$$

Respuesta:

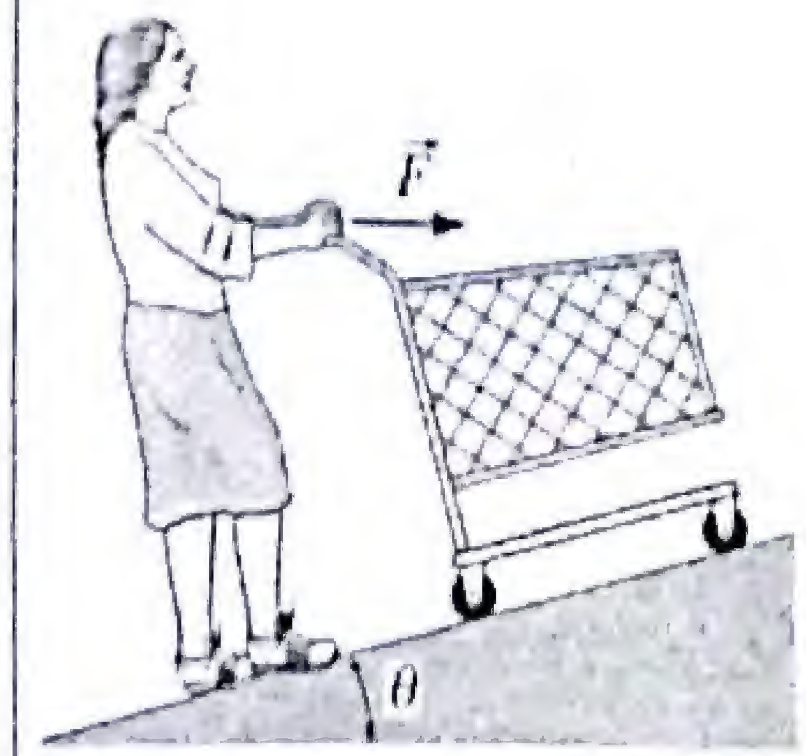
a) $a = 12\text{m/s}^2$
b) $N = 23{,}8\text{N}$
c) $F_c = 490\text{N}$

PR-1.02. *Empujando el carrito de mercado por la rampa*

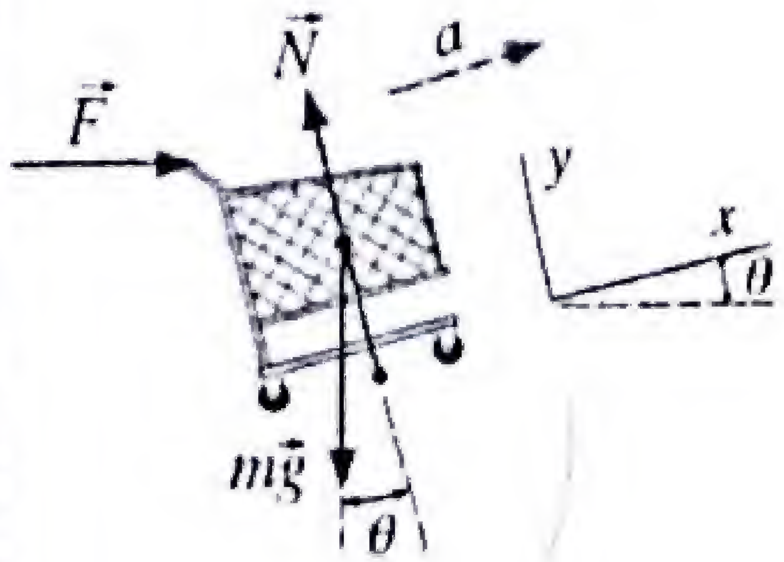
Una persona aplica una fuerza horizontal, $\vec{F}$, para empujar un carrito de mercado hacia arriba por una rampa de ángulo de inclinación $\theta = 20°$. La masa total del carrito con la carga es $m = 30$ kg y se desprecia el rozamiento entre el carrito y la superficie de la rampa.

a) Calcule la fuerza para mantener el carrito en reposo.

b) Si se aplica una fuerza $\vec{F}'$ que tiene dos veces el valor anterior, determine la aceleración del carrito.



Solución: a) Primero dibujamos el diagrama de cuerpo libre para el carrito. Hay tres fuerzas: el peso $m\vec{g}$ que actúa verticalmente hacia abajo, la fuerza horizontal $\vec{F}$ aplicada por la persona y la fuerza normal $\vec{N}$ que actúa perpendicular al plano. En problemas como éste que involucran planos inclinados, es conveniente elegir ejes de coordenadas con x a lo largo de la pendiente e y perpendicular a ella. De esta manera la aceleración tendría una sola componente. Si el carrito está en reposo, su aceleración es cero y la aplicación de la segunda ley de Newton en forma de componentes produce:



$$\sum F_x = F\cos\theta - mg\operatorname{sen}\theta = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = N - F\operatorname{sen}\theta - mg\cos\theta = 0 \qquad (2)$$

De la ecuación (1) se despeja la fuerza F:

$$F = \frac{mg\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = mg\operatorname{tg}\theta = (30\text{kg})(9{,}8\text{m/s}^2)\operatorname{tg}20° = 107\text{N}$$

b) Si se aumenta el valor de F, el carrito adquiere una aceleración a lo largo de la pendiente (*eje x*) y se obtiene:

$$\sum F_x = F'\cos\theta - mg\operatorname{sen}\theta = ma$$

Despejando, obtenemos la aceleración:

$$a = \frac{F'\cos\theta - mg\operatorname{sen}\theta}{m} = \frac{2F}{m}\cos\theta - g\operatorname{sen}\theta$$

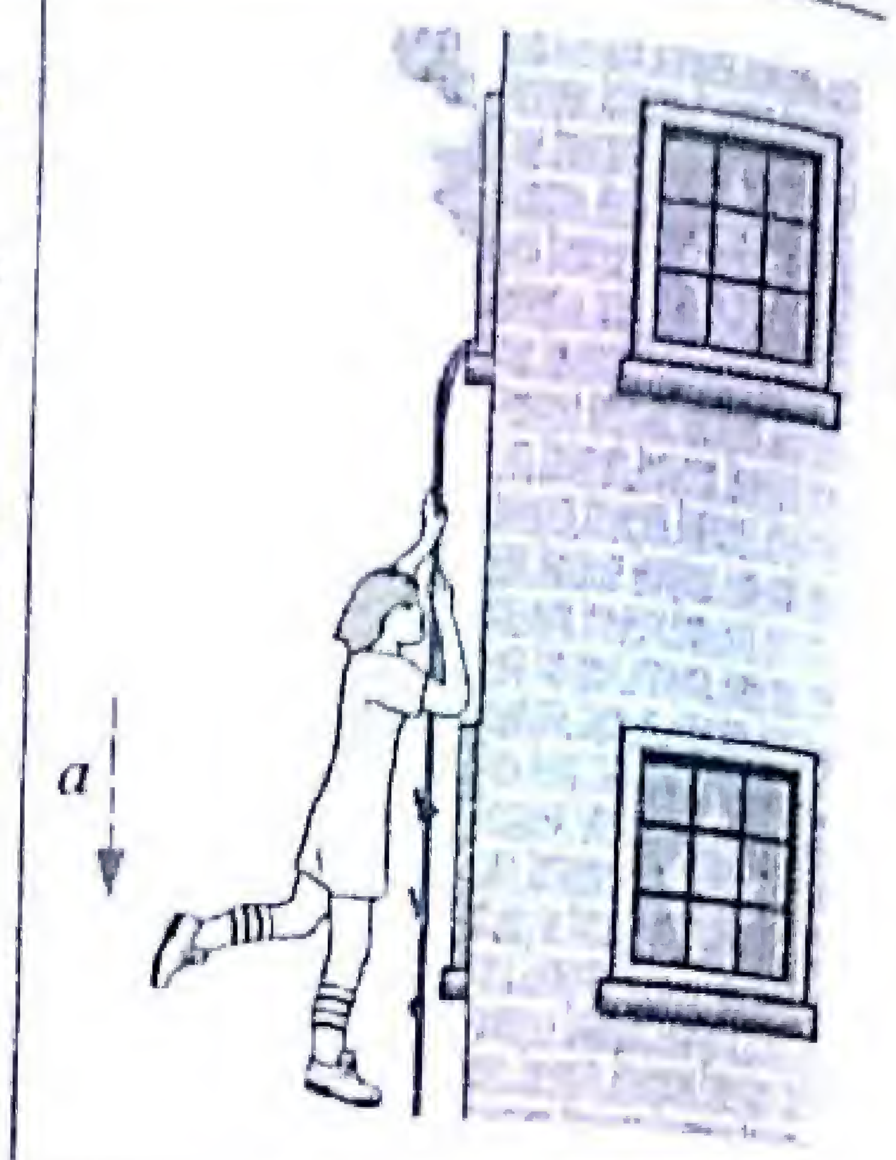
$$a = \frac{2(107\text{N})}{30\text{kg}}\cos 20° - (9{,}8\text{m/s}^2)\operatorname{sen}20° = 3{,}35\text{m/s}^2$$

Respuesta:

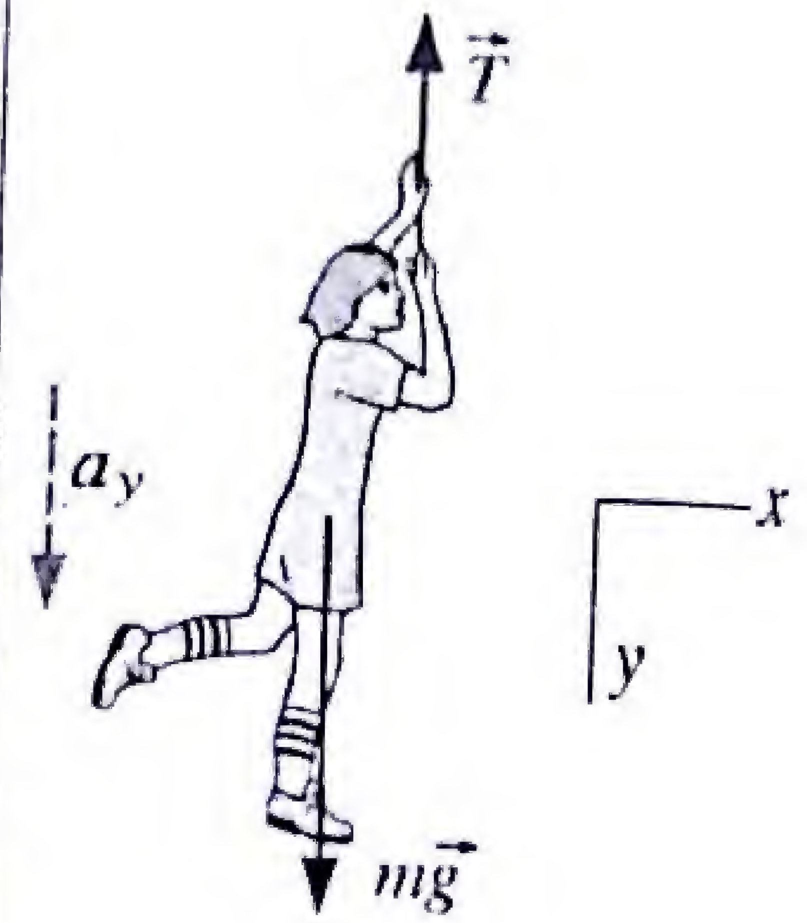
a) $F = 107\text{N}$
b) $a = 3{,}35\text{m/s}^2$

PR 1.03. ***Debe descender aceleradamente por la cuerda***

En el edificio de la residencia estudiantil se desata un incendio y una estudiante, para ponerse a salvo improvisa una cuerda empatando ropas, sábanas, toallas etc.... Después de amarrar un extremo de la cuerda a una cama, empieza a descender por la ventana deslizándose por dicha cuerda. La estudiante tiene un peso de 500 N pero la máxima tensión que puede resistir la cuerda es de 400 N. ¿Cómo debe bajar la estudiante sin que la cuerda colapse?



Solución: Cuando la estudiante tira de la cuerda hacia abajo, a su vez, la cuerda jala a la estudiante hacia arriba con una fuerza $\vec{T}$ de igual magnitud, se acuerdo a la tercera ley de Newton. En el diagrama de cuerpo libre se dibujan las dos fuerzas que actúan sobre la estudiante: su peso $m\vec{g}$ que apunta hacia abajo y la tensión de la cuerda $\vec{T}$, que apunta hacia arriba.



Si la estudiante trata de bajar muy lentamente (casi en reposo), la tensión de la cuerda que equilibraría su peso sería cerca de 500 N e inmediatamente se rompería la cuerda. Por lo tanto, ella debe deslizar aceleradamente de tal manera que la tensión de la cuerda no pueda exceder el valor límite de rotura de 400 N. La aplicación de la segunda ley de Newton resulta:

$$\sum F_y = mg - T = ma_y$$

Despejando a_y se obtiene:

$$a_y = \frac{mg - T}{m} = \left(\frac{mg - T}{mg}\right)g$$

Por lo tanto, la aceleración mínima de descenso debe ser:

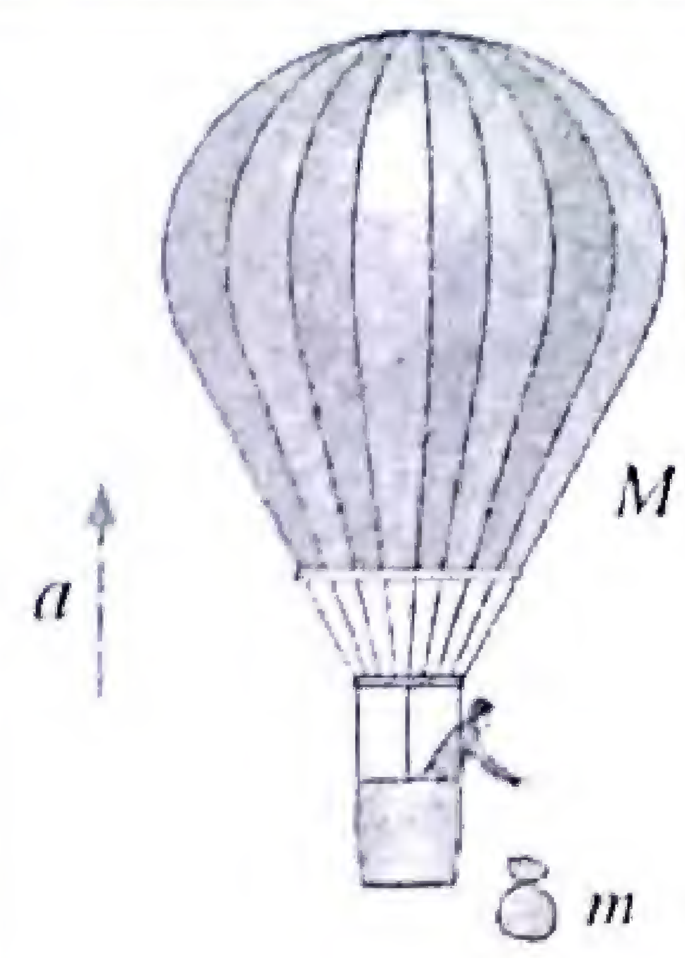
$$a_y = \left(\frac{500\text{N} - 400\text{N}}{500\text{N}}\right)(9.8\text{m/s}^2) = 1{,}96\text{m/s}^2$$

Respuesta:

Ella debe bajar aceleradamente con: $a_y = 1{,}96\text{m/s}^2$

PR-1.04. ***Arroja lastre para que el globo ascienda***

Un globo de masa total M = 300 kg está descendiendo verticalmente con una aceleración a = 0,2 m/s². Suponiendo que la fuerza de empuje ascensional ejercida por el aire sobre el globo no cambie, ¿qué cantidad de masa es necesario arrojar desde la canastilla para que el globo adquiera una aceleración ascendente de igual valor a = 0,2 m/s²?



Solución: Sea F la fuerza de empuje hacia arriba ejercida por el aire sobre el globo. Cuando el globo baja, escribimos:

$$Mg - F = Ma \qquad (1)$$

Por otra parte, cuando el globo sube se tiene:

$$F - (M - m)g = (M - m)a \qquad (2)$$

Sumando estas dos ecuaciones, se elimina la fuerza F y se obtiene la masa m de lastre que hay que arrojar:

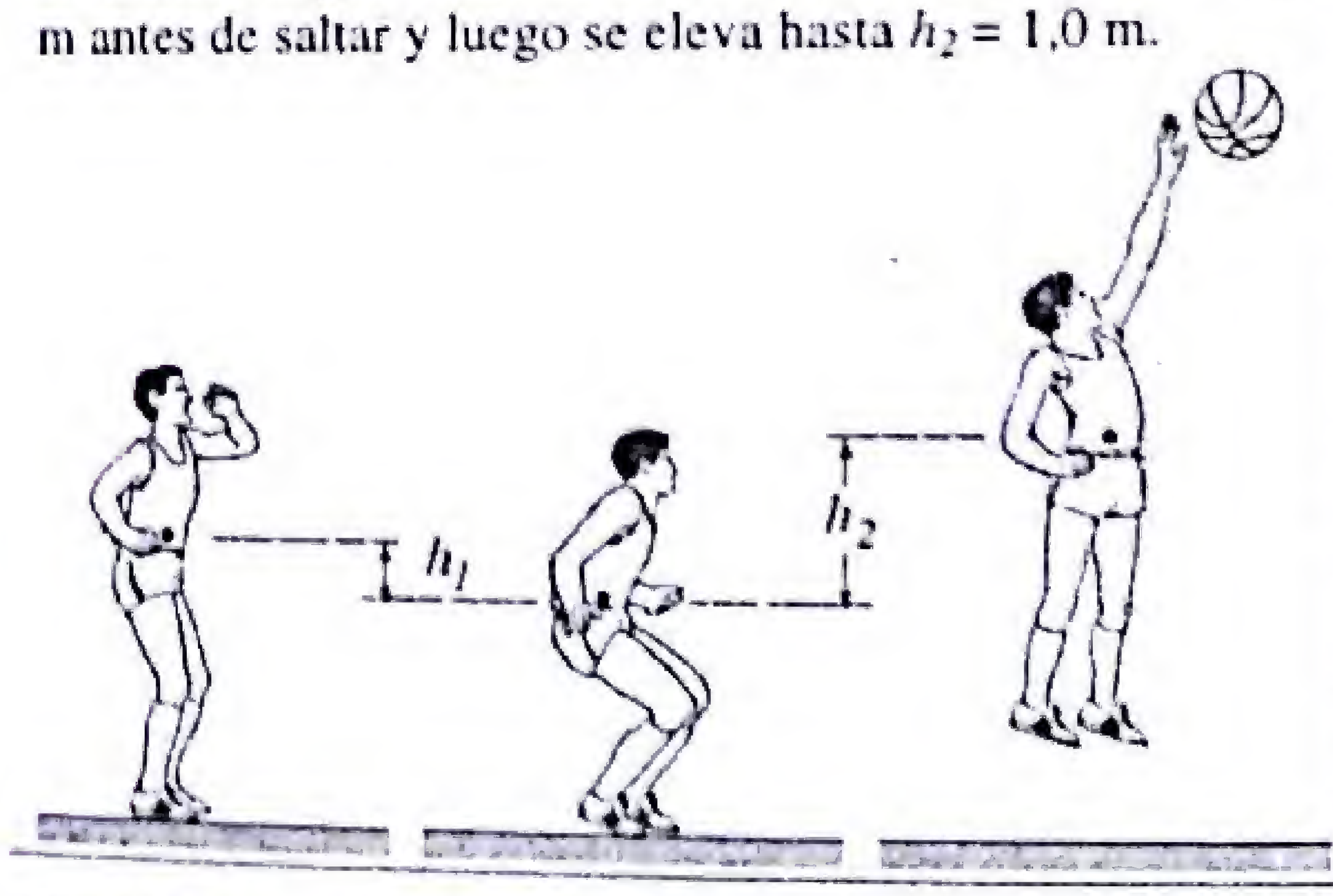
$$m = 2M\left(\frac{a}{a+g}\right) = 2(300\text{kg})\left(\frac{0{,}2}{0{,}2+9{,}8}\right) = 12\text{kg}$$

Respuesta:

$$\boxed{m = 2M\left(\frac{a}{a+g}\right) = 12 \text{ kg}}$$

PR-1.05. ***Para elevarse hay que tomar impulso***

En un partido de baloncesto, un jugador de masa m = 75 kg, para tomar impulso, primero se agacha de modo que su centro de gravedad desciende una distancia h_1 = 0,25 m antes de saltar y luego se eleva hasta h_2 = 1,0 m.



¿Cuál es la fuerza media que debe ejercer el jugador contra el suelo para lograr este salto?

Solución: Si $\vec{F}$ es la fuerza media que ejerce el suelo sobre el jugador durante el impulso, y $m\vec{g}$ es su peso, entonces experimenta una aceleración media a, que está dada por la segunda ley de Newton:

$$\sum F_y = F - mg = ma$$

Como el jugador parte del reposo, la velocidad que adquiere al perder contacto con el suelo está dada por:

$$v^2 = 0 + 2ah_1$$

Una vez en el aire, actúa solo la gravedad y alcanza una altura máxima $(h_2 - h_1)$:

$$0 = v^2 - 2g(h_2 - h_1) \quad \Rightarrow \quad 2ah_1 = 2g(h_2 - h_1)$$

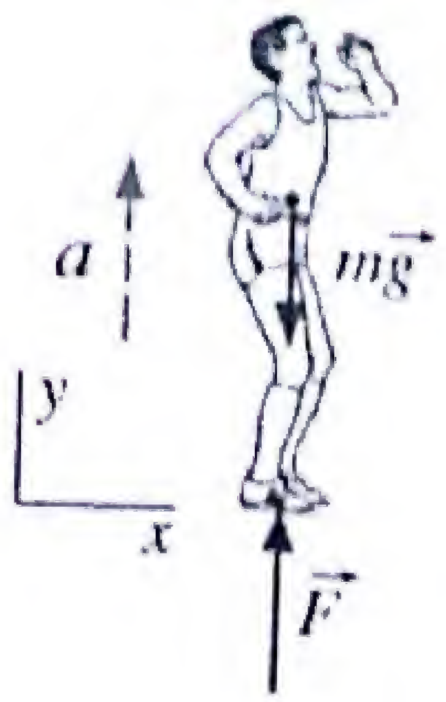
Por lo tanto, la aceleración media durante el impulso con el suelo es:

$$a = g(\frac{h_2}{h_1} - 1)$$

La fuerza media ejercida por el suelo sobre el hombre es:

$$F = mg + ma = mg + mg(\frac{h_2}{h_1} - 1) = mg(\frac{h_2}{h_1})$$

$$F = (75\text{kg})(9{,}8\text{m/s}^2)(\frac{1\text{m}}{0{,}25\text{m}}) = 2940\text{N}$$

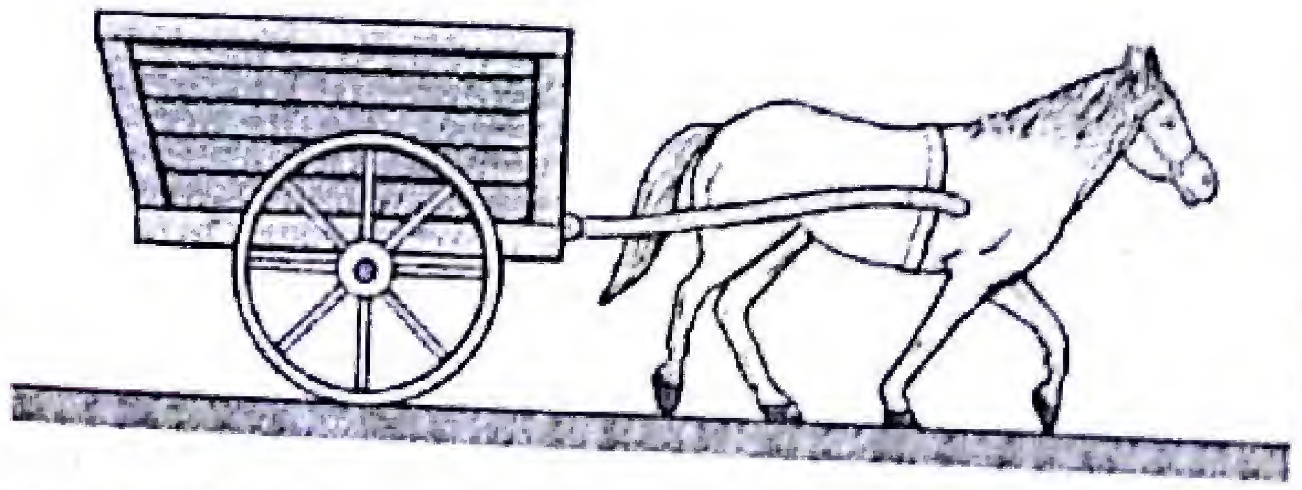


Respuesta:

$F = 2940\text{N}$

PR 1.06. *¿Cuáles son las fuerzas sobre el caballo?*

Una carreta de masa m_1 = 400 kg es arrastrada por un caballo de masa m_2 = 500 kg con una aceleración a = 1,5 m/s².



Suponga que la fuerza horizontal de fricción que ejerce el suelo sobre las ruedas de la carreta es F_1 = 300 N. Determine las fuerzas que se ejercen sobre el caballo.

Solución: En la figura se muestran la carreta y el caballo como sistemas separados que tienen una aceleración común, $\vec{a}$. No hemos dibujado las fuerzas verticales, el peso y la normal del suelo que se anulan entre sí porque no hay aceleración vertical.

Sobre la *carreta* se ejerce la fuerza de fricción del suelo hacia atrás y la del caballo hacia adelante. La segunda ley de Newton en la dirección horizontal es:

$$\sum F_x = T_1 - F_1 = m_1 a$$

Despejando, encontramos la magnitud de la fuerza $\vec{T}_1$:

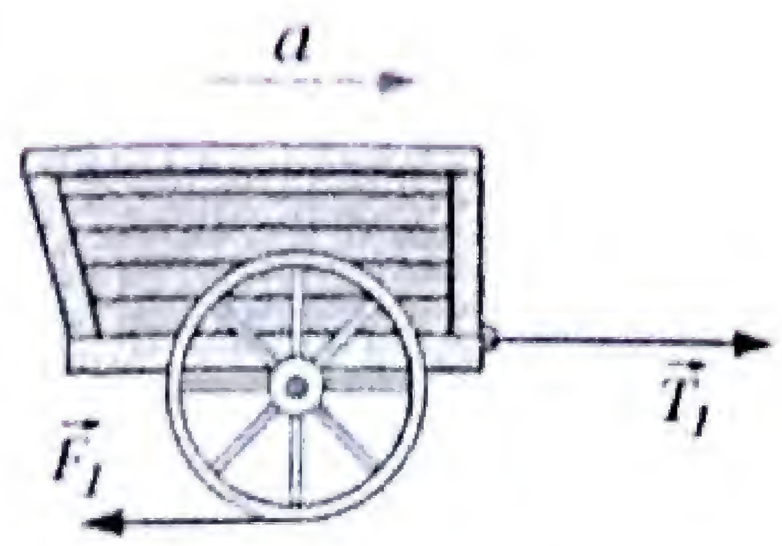
$$T_1 = F_1 + m_1 a = 300\text{N} + (400\text{kg})(1{,}5\text{m/s}^2) = 900\text{N}$$

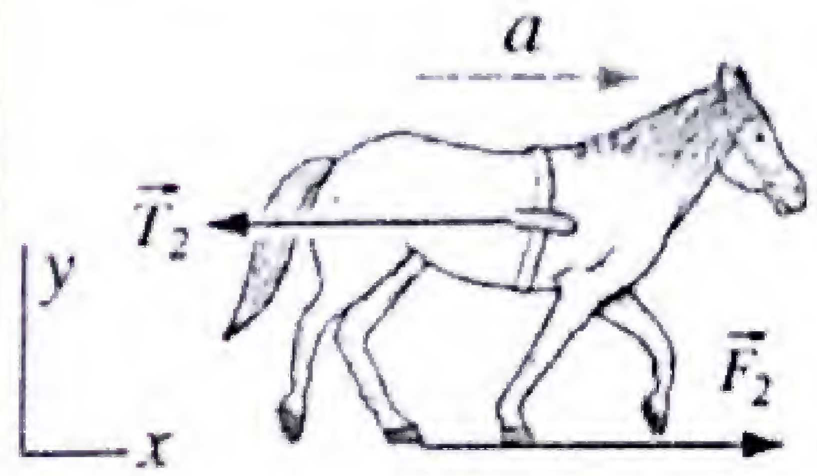
Sobre el *caballo* se aplica la fuerza de fricción del suelo hacia adelante y la que ejerce la carreta hacia atrás. La segunda ley de Newton es:

$$\sum F_x = F_2 - T_2 = m_2 a$$

Según la tercera ley de Newton, las fuerzas $\vec{T}_1$ sobre la carreta y $\vec{T}_2$ sobre el caballo constituyen un par acción-reacción y tienen igual módulo, 900 N. Por lo tanto, la fuerza que el suelo ejerce sobre las pezuñas del caballo, hacia adelante es:

$$F_2 = T_2 + m_2 a = 900\text{N} + (500\text{kg})(1{,}5\text{m/s}^2) = 1650\text{N}$$



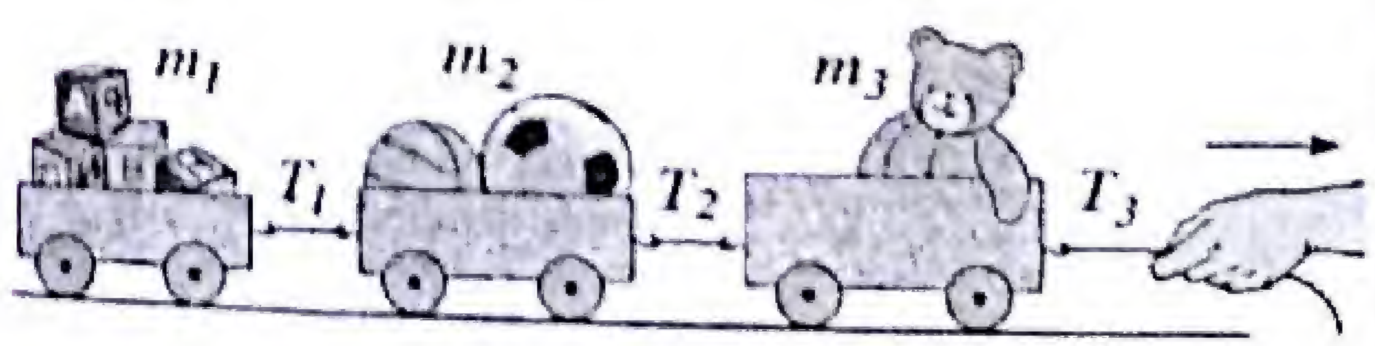


Respuesta:

Fuerzas horizontales sobre el caballo:
T_2 = 900 N, hacia atrás
F_2 = 1650 N, hacia adelante

PR-1.07. *Cuerdas bajo distintas tensiones*

Tres carritos de masas respectivas m_1 = 1kg, m_2= 2kg y m_3= 3kg, están conectados por cuerdas ligeras sobre una superficie horizontal sin rozamiento.

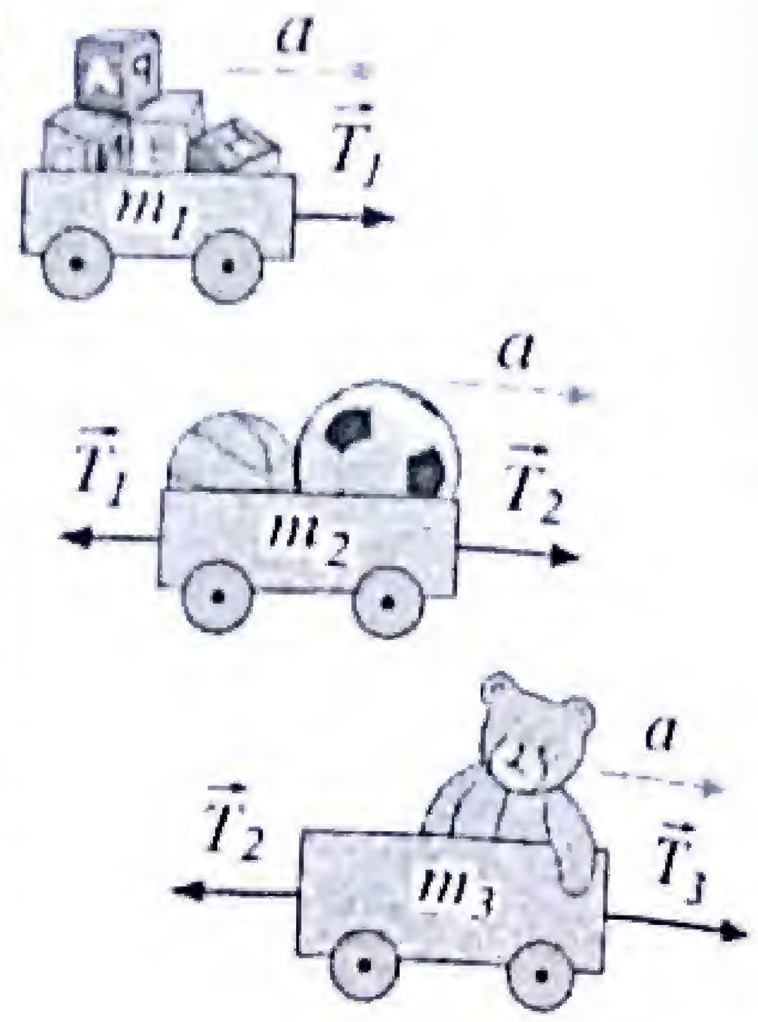


Si los carritos se jalan hacia la derecha con una fuerza T_3 = 6 N,

a) ¿Cuál es la aceleración del sistema?

b) Halle las tensiones T_1 y T_2 de las cuerdas.

Solución: Cuando dos o mas cuerpos están involucrados resulta conveniente considerar a cada uno de ellos como sistemas separados. Las cuerdas son ligeras de modo que la fuerza de *tensión* T que ejerce cada carrito sobre una cuerda se transmite por ésta y llega sin disminución a su conexión al carrito adyacente. Como los tres carritos se aceleran con la misma aceleración a en la dirección horizontal, por simplicidad podemos considerar solamente las fuerzas que están aplicadas sobre cada carrito en esa dirección. Aplicando la segunda ley de Newton:



Carrito m_1: $\sum F_x = T_1 = m_1 a$ (1)

Carrito m_2: $\sum F_x = T_2 - T_1 = m_2 a$ (2)

Carrito m_3: $\sum F_x = T_3 - T_2 = m_3 a$ (3)

Si sustituimos T_1 de la ecuación (1) en la (2), se obtiene:

$$T_2 = T_1 + m_2 a = m_1 a + m_2 a = (m_1 + m_2)a$$

Para hallar a sustituimos T_2 en la ecuación (3):

$$T_3 = T_2 + m_3 a = (m_1 + m_2)a + m_3 a = (m_1 + m_2 + m_3)a$$

$$a = \frac{T_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{6\text{N}}{(1+2+3)\text{kg}} = 1\text{m/s}^2$$

b) Las tensiones respectivas en las cuerdas son:

$$T_1 = m_1 a = (1\text{kg})(1\text{m/s}^2) = 1\text{N}$$

$$T_2 = T_1 + m_2 a = 1\text{N} + (2\text{kg})(1\text{m/s}^2) = 3\text{N}$$

Respuesta:

a) $a = 1\text{m/s}^2$
b) $T_1 = 1$ N, $T_2 = 3$ N

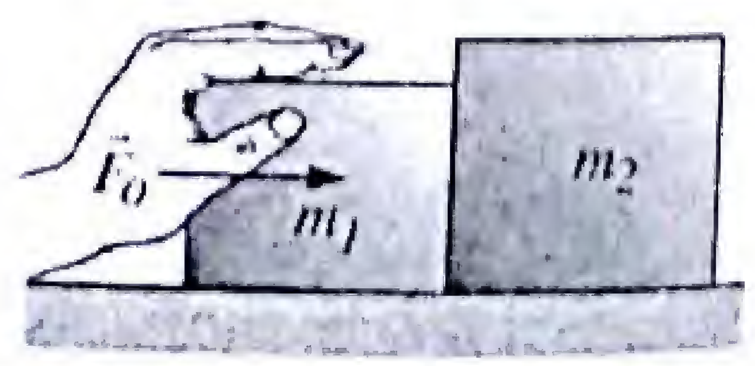
PR 1.08. *Diferentes fuerzas de contacto*

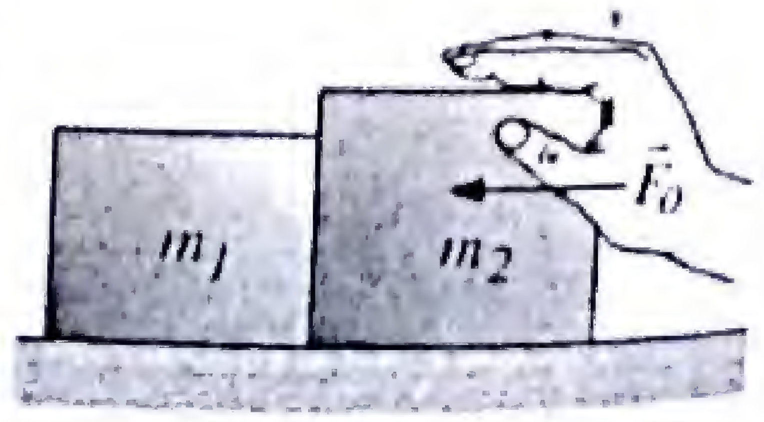
Dos bloques de masas respectivas $m_1 = 2$ kg y $m_2 = 3$ kg, están en contacto sobre una superficie horizontal sin fricción.

a) Se aplica por el lado de m_1, una fuerza horizontal F_o = 10 N. Determine la fuerza de contacto entre los bloques.

b) Se aplica por el lado de m_2, una fuerza horizontal igual, F_o = 10 N. Determine la nueva fuerza de contacto.

c) ¿Por qué la fuerza de contacto entre los bloques es diferente en los dos casos?

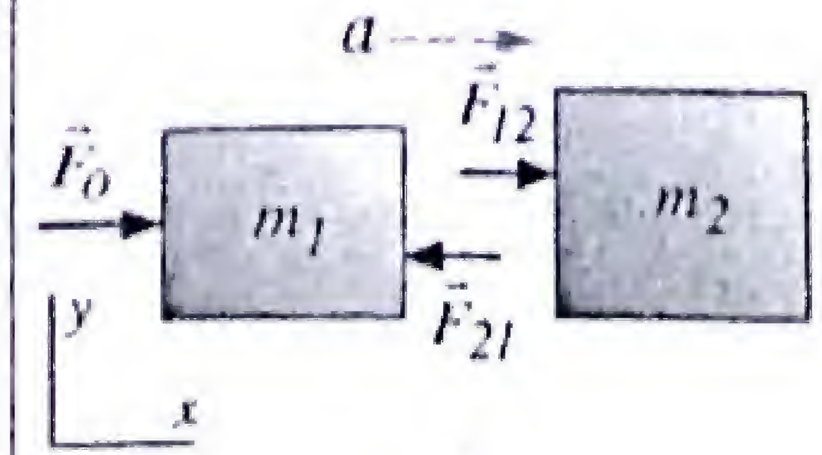




F_{21}

Solución: a) Consideremos los diagramas de cuerpo libre de m_1 y de m_2. Las fuerzas horizontales que actúan sobre m_1 son: la fuerza externa $\vec{F}_0$ y la fuerza de contacto $\vec{F}_{21}$ ejercida por m_2. Sobre el bloque m_2 solamente actúa la fuerza $\vec{F}_{12}$ ejercida por m_1. Aplicando la segunda ley de Newton, obtenemos:

$F_0 = a(m_1 + m_2)$



Bloque m_1: $\sum F_x = F_0 - F_{21} = m_1 a$ (1)

Bloque m_2: $\sum F_x = F_{12} = m_2 a$ (2)

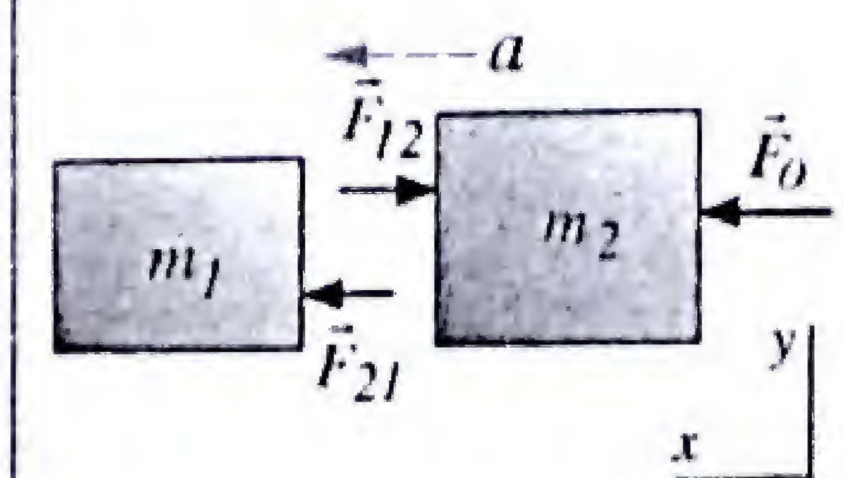
$F - m_1 a = F$

Por la tercera ley de Newton: $F_{12} = F_{21}$, por lo tanto, si despejamos la aceleración de la ecuación 2 y la sustituimos en la ecuación 1, obtenemos la fuerza de contacto entre los dos bloques:

$a(m_1 + m_2) - m_1 a = F_{21}$
$m_2 a = F_{21}$
$m_2 \frac{F}{m_2}$

$$F_{12} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} F_0 = (\frac{3\text{kg}}{2\text{kg} + 3\text{kg}})10\text{N} = 6\text{N}$$

b) Procediendo como en el caso anterior, pero esta vez tomamos el sentido positivo de las x hacia la izquierda. Aplicando la segunda ley de Newton:



Bloque m_2: $\sum F_x = F_0 - F_{12} = m_2 a$ (3)

Bloque m_1: $\sum F_x = F_{21} = m_1 a$ (4)

Combinando las ecuaciones (3) y (4) y tomando en cuenta que: $F_{12} = F_{21}$, obtenemos el valor de la fuerza:

$$F_{12} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} F_0 = (\frac{2\text{kg}}{2\text{kg} + 3\text{kg}})10\text{N} = 4\text{N}$$

Vemos que la fuerza de contacto resulta menor que en el caso anterior.

c) La aceleración resulta la misma: $a = F_0 /(m_1 + m_2)$ en ambos casos. Sin embargo, la fuerza de contacto en cada caso, es la que empuja a uno de los dos bloques, por lo tanto, ésta debe ser mayor en el primer caso pues debe acelerar al bloque mas masivo.

Respuesta:

a) $F_{12} = 6\text{N}$
b) $F_{12} = 4\text{N}$

PR-1.09. *Fuerzas entre los eslabones de una cadena*

Una cadena que está constituida por 5 eslabones idénticos de masa m = 0,204 kg, es elevada aplicándole una fuerza vertical, $\vec{F}$. La aceleración resultante es $a = 2{,}45\ m/s^2$.

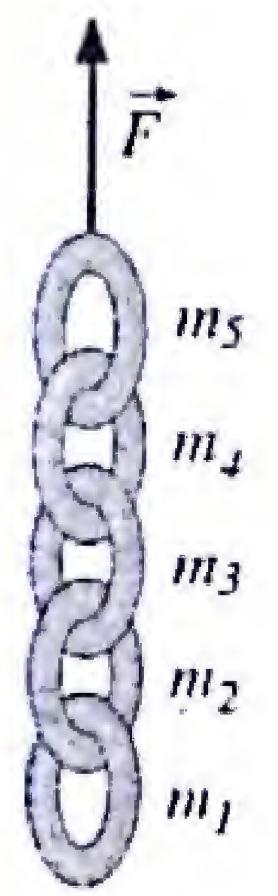
a) ¿Cuál es el valor de la fuerza neta sobre cada eslabón?

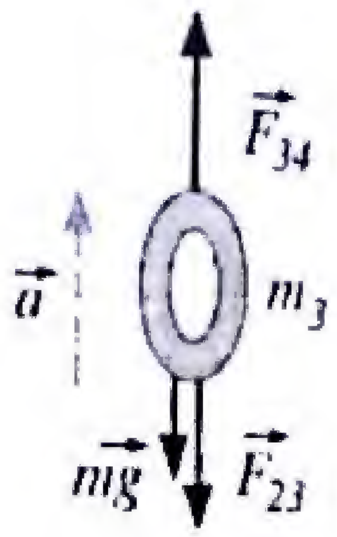
b) ¿Cuál es el valor de la fuerza aplicada $\vec{F}$?

c) ¿Cuál es el valor de la fuerza de contacto entre eslabones contiguos?

Solución: a) Si la aceleración común de los eslabones es a, la fuerza neta que se ejerce sobre cualquiera de ellos es:

$$F_m = ma = (0{,}204\text{kg})(2{,}45\text{m/s}^2) = 0{,}5\text{N}$$





b) Aplicando la segunda ley de Newton al sistema completo constituido por los cinco eslabones, se obtiene:

$$F - 5mg = 5ma \qquad \Rightarrow \qquad F = 5m(g+a)$$

$$F = 5(0{,}204\text{kg})(2{,}45\text{m/s}^2 + 9{,}8\ \text{m/s}^2) = 12{,}5\text{N}$$

b) Aplicando la segunda ley de Newton a cada eslabón individual en orden sucesivo, se obtiene:

$$m_1: \quad F_{12} - mg = ma \ \Rightarrow \ F_{12} = m(a+g) = 2{,}5\text{N}$$

$$m_2: \ F_{23} - F_{12} - mg = ma \Rightarrow \ F_{23} = 2{,}5\text{N} + 2{,}5\text{N} = 5\text{N}$$

$$m_3: \ F_{34} - F_{23} - mg = ma \ \Rightarrow \ F_{34} = 5\text{N} + 2{,}5\text{N} = 7{,}5\text{N}$$

$$m_4: \ F_{45} - F_{34} - mg = ma \ \Rightarrow \ F_{45} = 7{,}5\text{N} + 2{,}5\text{N} = 10\text{N}$$

Respuesta:

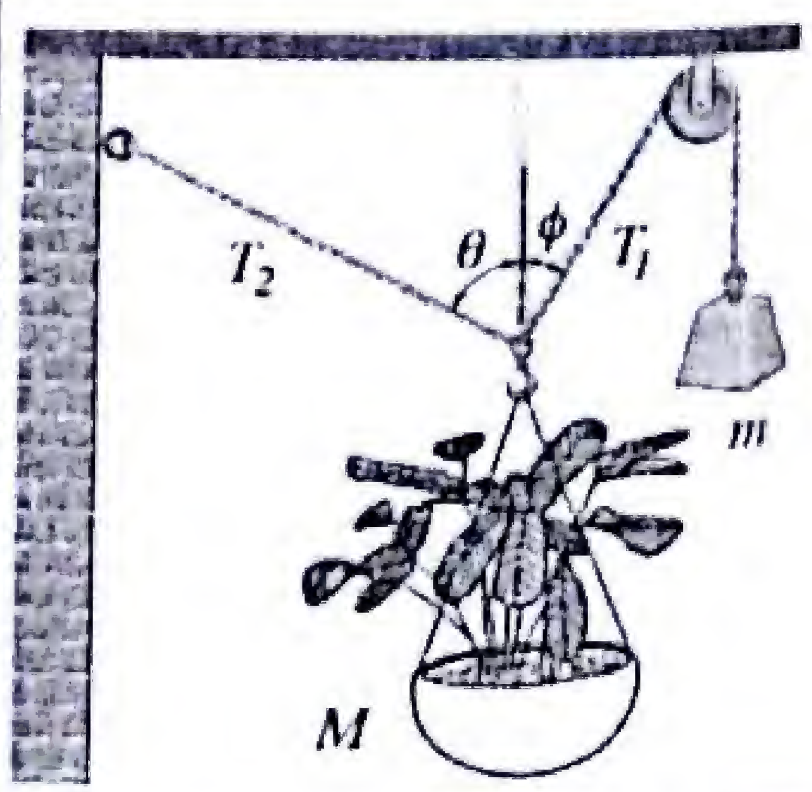
a) F_m = 0,5 N.
b) F = 12,5 N
c) F_{12} = 2,5 N, F_{23} = 5 N, F_{34} = 7,5 N, F_{45} = 10 N

PR-1.10. *Una pesa para equilibrar el matero*

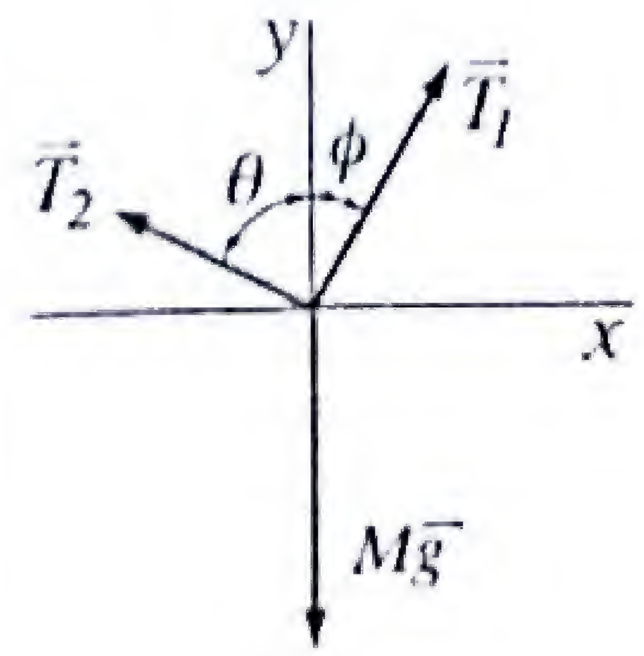
Se desea suspender un matero de masa M = 15 kg, del techo y de una pared, de manera que las cuerdas queden formando los ángulos mostrados en la figura: $\phi = 36{,}9°$ y $\theta = 53{,}1°$. Suponga que las masas de las cuerdas son despreciables y que la polea es ideal.

a) ¿Cuál es la masa m de la pesa que equilibra el matero?

b) Determine las tensiones de las cuerdas.



Solución: a) Dibujamos el diagrama de cuerpo libre del punto de unión de las cuerdas y el matero. La tensión de la cuerda que bordea la polea tiene igual valor a ambos lados y es igual al peso de la pesa suspendida, $T_1 = mg$. Las ecuaciones para el equilibrio del matero son:



$$\sum F_x = T_1 sen\phi - T_2 sen\theta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T_2 = T_1 \frac{sen\phi}{sen\theta}$$

$$\sum F_y = T_2 cos\theta + T_1 cos\phi - Mg = 0$$

$$Mg = T_2 cos\theta + T_1 cos\phi = mg\frac{sen\phi}{sen\theta}cos\theta + mg cos\phi$$

$$M = m(\frac{sen\phi}{tg\theta} + cos\phi) = m(\frac{sen 36{,}9°}{tg 53{,}1°} + cos 36{,}9°) = m\frac{5}{4}$$

La masa de la pesa suspendida es:

$$m = \frac{4}{5}M = \frac{4}{5}15\text{kg} = 12\text{kg}$$

b) Las tensiones de las cuerdas son:

$$T_1 = mg = (12\text{kg})(9{,}8\text{m/s}^2) = 117{,}6\text{N}$$

$$T_2 = T_1\frac{sen\phi}{sen\theta} = (12\text{kg})(9{,}8\text{m/s}^2)\frac{sen 36{,}9°}{sen 53{,}1°} = 88{,}3\text{N}$$

Respuesta:

a) m = 12 kg
b) T_2 = 88,3N
T_1 = 117,6N

PR-1.11. *Una cadena suspendida forma una catenaria*

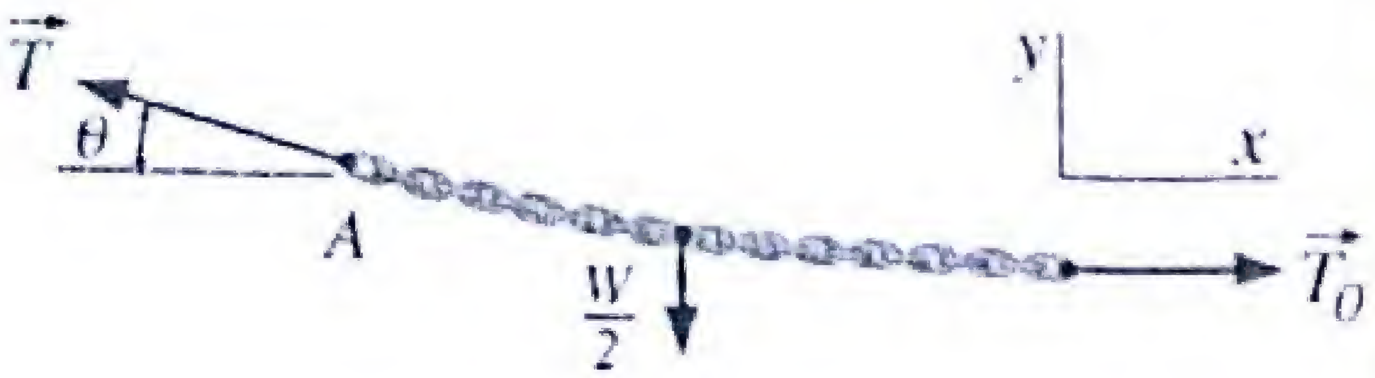
Una cadena flexible de peso W está suspendida entre dos puntos fijos ubicados a la misma altura. Su peso distribuido hace que adopte la forma de una curva llamada *catenaria*.

En los puntos extremos de suspensión A y B, el cable forma un ángulo θ con la horizontal.

a) Halle la tensión de la cadena en su punto medio.

b) Halle la fuerza que cada soporte ejerce sobre los extremos de la cadena.

Solución: Dibujamos el diagrama de cuerpo libre para una mitad de la cadena. Sea $\vec{T}_0$ la tensión de la cadena en el punto más bajo, $\vec{T}$ la tensión en el punto de soporte y W/2 el peso de la mitad de la cadena, que está aplicado en su centro de gravedad.



Las ecuaciones de equilibrio de translación son:

$$\sum F_x = T_0 - T\cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad T_0 = T\cos\theta \qquad (1)$$

$$\sum F_y = -\frac{W}{2} + T sen\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{W}{2} = T sen\theta \qquad (2)$$

Si dividimos estas dos ecuaciones, se obtiene la tensión en el punto medio de la cadena:

$$\frac{T_0}{W/2} = \frac{\cos\theta}{sen\theta} = ctg\theta \qquad \Rightarrow \qquad T_0 = \frac{W}{2tg\theta}$$

b) Si ahora sustituimos T_0 en la ecuación (1) se obtiene la tensión en los puntos de soporte:

$$T = \frac{T_0}{\cos\theta} = \frac{W}{2sen\theta}$$

Respuesta:

a) $T_0 = \dfrac{W}{2tg\theta}$
b) $T = \dfrac{W}{2sen\theta}$

PR 1.12. *A veces no es necesario llamar una grúa*

Un estudiante quiere sacar un Jeep atascado en un pantano y no logra moverlo porque la fuerza máxima que puede aplicar al empujarlo es apenas de 500 N. Luego recuerda un truco para amplificar fuerzas que aprendió en su curso de física. Este consiste en amarrar una cuerda tensada entre el parachoques del Jeep y algo fijo como un árbol, y luego jalar lateralmente la cuerda por su punto medio

Suponga que al aplicar una fuerza de 500 N, el Jeep empieza a moverse cuando las dos mitades de la cuerda se doblan a un ángulo $\theta = 6°$. ¿Cuál es la fuerza efectiva que es ejercida sobre el Jeep?

Solución: Como cuerpo libre para este caso, usaremos la pequeña porción de la cuerda alrededor del punto medio que es jalada por el estudiante. Hay tres fuerzas: la fuerza horizontal, $\vec{F_a}$, aplicada por el estudiante transversal a la cuerda y las tensiones, $\vec{T_1}$ y $\vec{T_2}$ de la cuerda a cada lado. Al jalar gradualmente la cuerda, su aceleración es prácticamente cero ($a = 0$) y tenemos una situación de equilibrio de fuerzas. Como las tres fuerzas quedan en el plano x-y, aplicamos la segunda ley de Newton en cada dirección:

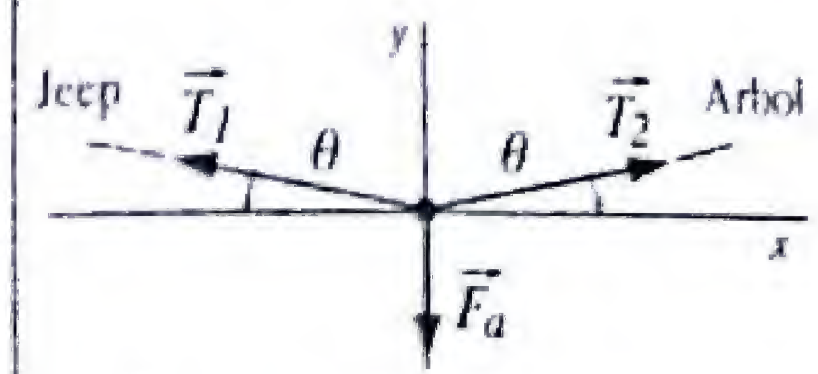


Diagrama de cuerpo libre del segmento central de cuerda (Plano horizontal)

$$\sum F_x = T_2\cos\theta - T_1\cos\theta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T_2 = T_1 = T$$

$$\sum F_y = T_1 sen\theta + T_2 sen\theta - F_a = 0 \quad \Rightarrow \quad F_a = 2T sen\theta$$

Despejando, encontramos la tensión de la cuerda:

$$T = \frac{F_a}{2sen\theta} = \frac{500\text{N}}{2sen6°} = 2392\text{N}$$

¡Vemos que, con este truco el estudiante consiguió amplificar su fuerza casi cinco veces!

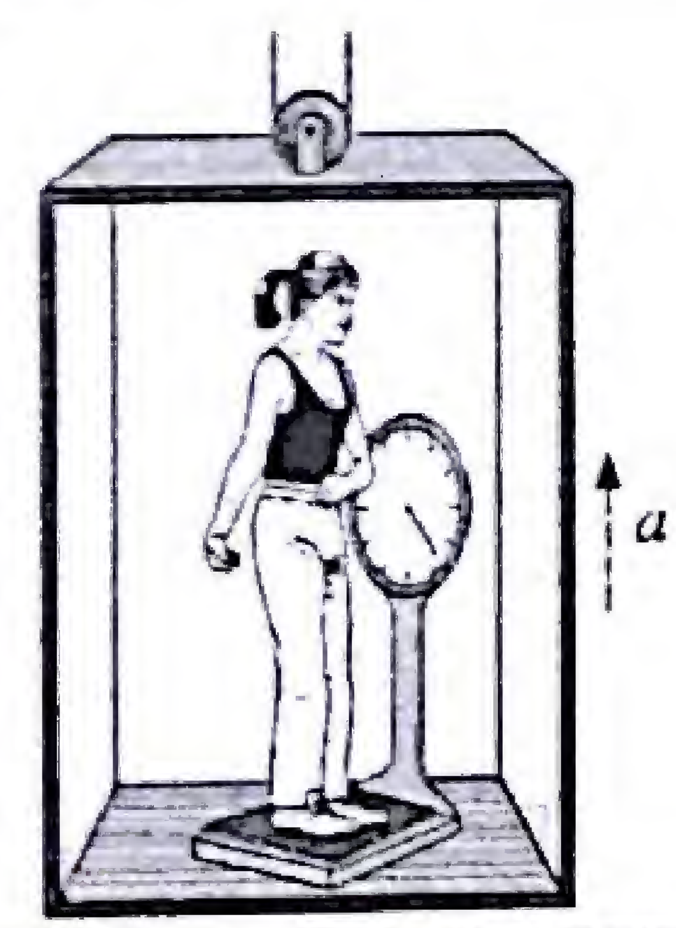
Respuesta:

$T = 2392\text{N}$

PR 1.13. *Diferentes pesos aparentes en un ascensor*

Una persona de 50 kg viaja parada sobre una báscula en un ascensor. La escala de la báscula está graduada en newtons. ¿Cuál será la indicación de la báscula en los siguientes casos ?

a) El ascensor sube o baja a velocidad constante.
b) El ascensor sube con una aceleración $a = +5,2$ m/s^2.
c) El ascensor baja con una aceleración $a = -5,2$ m/s^2
d) Si se rompieran las guayas del ascensor.



Solución: Elegimos un marco de referencia inercial fuera del ascensor (fijo en Tierra). Las fuerzas sobre la persona son: la ejercida por la báscula, $\vec{N}$ (lectura de la báscula) y el peso verdadero, $m\vec{g}$. Escogiendo el sentido positivo hacia arriba y aplicando la segunda ley de Newton, tenemos:

$$\sum F_y = N - mg = ma \qquad \Rightarrow \qquad N = m(g + a)$$

a) Cuando la velocidad del ascensor es constante (a es cero), el peso aparente de la persona es igual a su peso verdadero:

$$N = mg = (50\ \text{kg})(9{,}8\text{m/s}^2) = 490\ \text{N}$$

b) Cuando el ascensor acelera hacia arriba (a = +5,2 m/s²), el peso aparente de la persona es mayor que su peso verdadero:

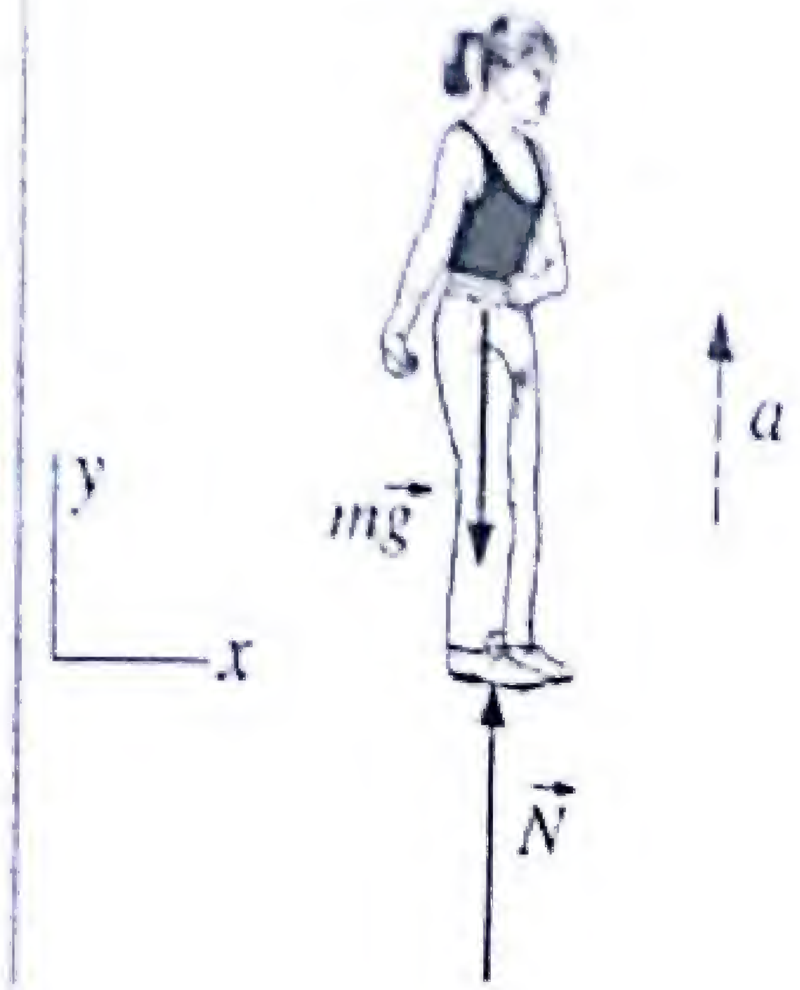
$$N = m(g + a) = (50\ \text{kg})(9{,}8\text{m/s}^2 + 5{,}2\text{m/s}^2) = 750\ \text{N}$$

c) Cuando el ascensor acelera hacia abajo (a = -5,2 m/s²), el peso aparente de la persona es menor que su peso verdadero:

$$N = m(g + a) = (50\ \text{kg})(9{,}8\text{m/s}^2 - 5{,}2\text{m/s}^2) = 230\ \text{N}$$

La persona siente estos efectos como un aumento o disminución del empuje hacia arriba que reciben sus pies. Note que lo que importa es el sentido de la aceleración en relación al sentido de movimiento del ascensor. Es irrelevante si el ascensor va subiendo o va bajando.

d) Si se rompen las guayas que sostienen el ascensor, tanto éste como la persona caen libremente ($a = -g$) y no existe fuerza normal, $N = M(g - g) = 0$. Es decir, el peso aparente será cero.

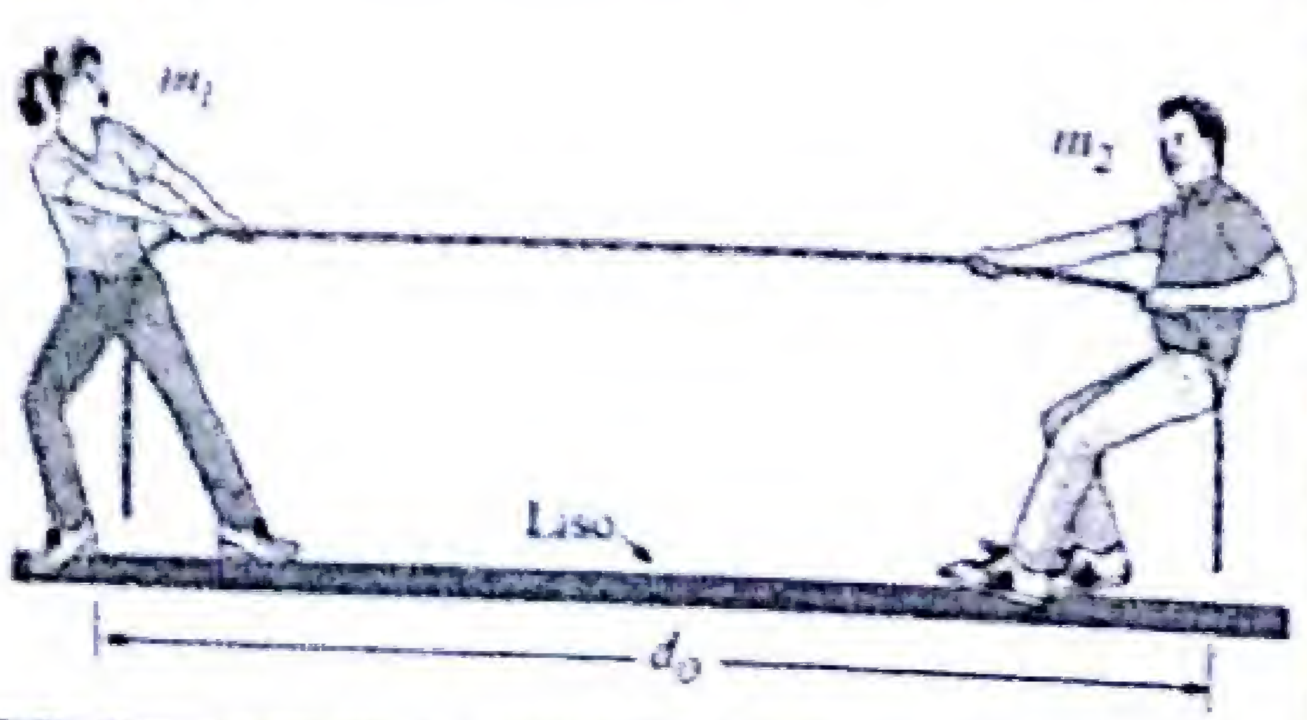


Respuesta:

a) N = 490 N
b) N = 750 N
c) N = 230 N
d) N = 0

PR 1.14. *No puedes jalar sin que te jalen*

Dos estudiantes, Rosa de masa m_1 = 50 kg y Juan de masa m_2 = 75 kg, están en una pista de hielo sin rozamiento a una distancia inicial d_0 = 20 m. Juan jala a Rosa mediante una cuerda liviana, aplicando una fuerza de 20 N.



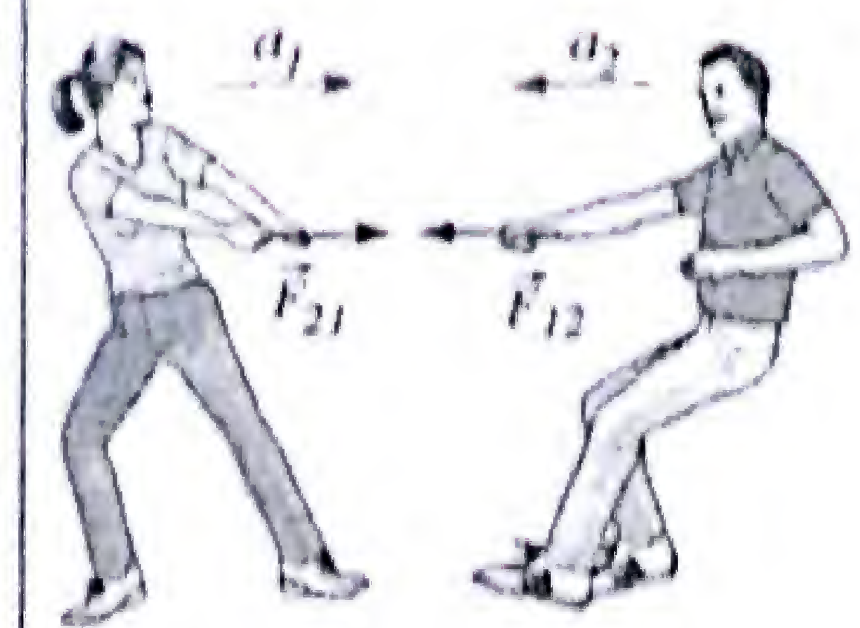
a) Halle la aceleración de Rosa.
b) Halle la aceleración de Juan.
c) ¿Al cabo de cuánto tiempo se encuentran Juan y Rosa?
d) ¿En que posición ocurre el encuentro?

Solución: a) Como no hay rozamiento, la única fuerza horizontal sobre Rosa es la que ejerce Juan mediante la cuerda. La aceleración de Rosa es hacia la derecha.

$$a_1 = \frac{F_{21}}{m_1} = \frac{20\text{N}}{50\text{kg}} = 0{,}400\text{m/s}^2$$

b) De acuerdo a la tercera ley de Newton, la fuerza que ejerce Rosa sobre Juan es también 20 N. La aceleración de Juan es hacia la izquierda:

$$a_2 = \frac{F_{12}}{m_2} = \frac{20\text{N}}{75\text{kg}} = 0{,}267\text{m/s}^2$$



c) Si escogemos el origen $x = 0$ en la posición inicial de Rosa, las distancias recorridas son:

Rosa: $\quad x_1 = \frac{1}{2}a_1t^2$

Juan: $\quad x_2 = d_0 - \frac{1}{2}a_2t^2$

Juan y Rosa se encuentran cuando $x_1 = x_2$, es decir:

$$\frac{1}{2}a_1t^2 = d_0 - \frac{1}{2}a_2t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2d_0}{a_1 + a_2}} = \sqrt{\frac{2(20\text{m})}{(0{,}400 + 0{,}267)\text{m/s}^2}} = 7{,}74\text{s}$$

d) La posición de Rosa al encontrarse con Juan es:

$$x_1 = \frac{1}{2}a_1t^2 = \frac{1}{2}(0{,}400\text{m/s}^2)(7{,}74\text{s})^2 = 12\text{m}$$

Respuesta:

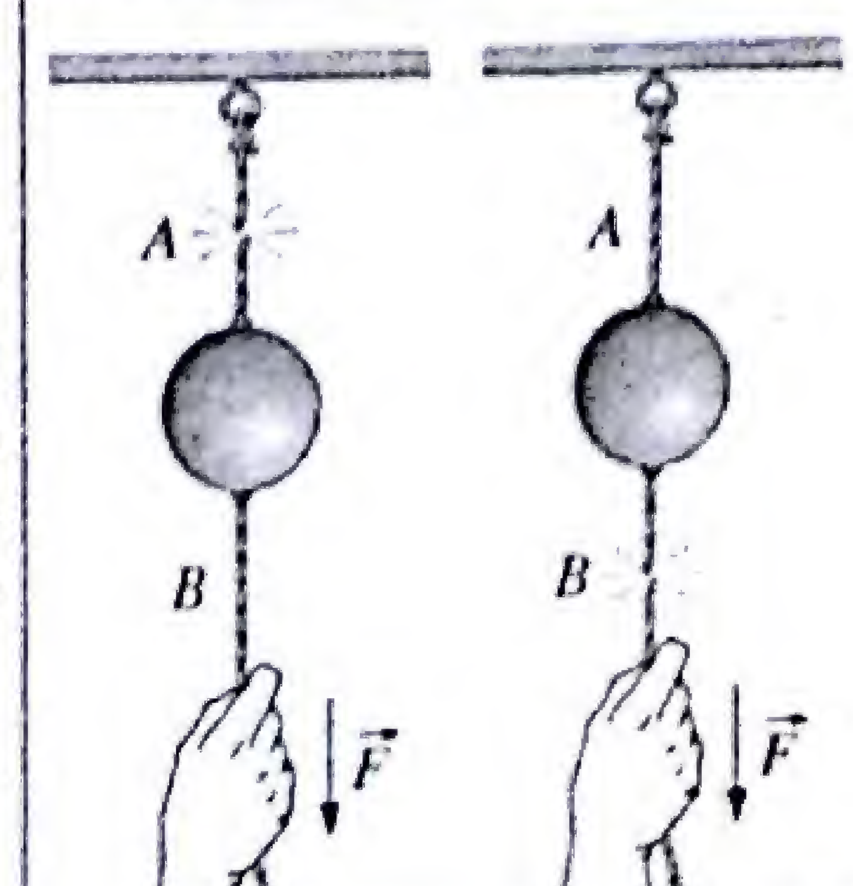
a) a_1 = 0,400 m/s²
b) a_2 = 0,267 m/s²
c) t = 7,74 s
d) x_1 = 12,0 m

PR 1.15. *¿Cuál de los dos hilos se romperá primero?*

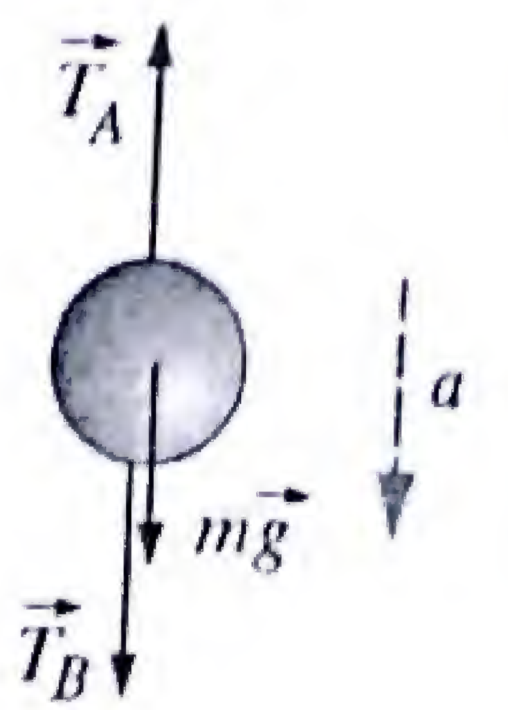
En una demostración de física, suspendemos de un hilo A una pelota pesada de masa m, que en la parte inferior tiene atado un segundo hilo B, como se indica en la figura. Los dos hilos tienen igual resistencia a la rotura. Si el hilo inferior se jala hacia abajo, ¿cuál de los dos hilos se romperá primero? Suponga dos casos diferentes:

(a) Si la fuerza se va aumentando desde cero lentamente.

(b) Si se aplica la fuerza bruscamente (un jalón).



Solución: En el diagrama de cuerpo libre de la pelota, las fuerzas aplicadas son: $\vec{T}_A$ ejercida por el hilo superior, $\vec{T}_B$ ejercida por el hilo inferior, y $m\vec{g}$ la fuerza gravitatoria ejercida por la Tierra. Si tomamos la dirección vertical y el sentido positivo hacia abajo, la segunda ley de Newton aplicada a la pelota se escribe:



$$\sum F_y = mg + T_B - T_A = ma$$

Consideremos ahora los dos experimentos por separado:

Experimento (a): Cuando se tira del hilo inferior tal que T_B va aumentando lentamente, la aceleración de m es en todo momento pequeña $(a<<g)$, de acuerdo a la expresión anterior:

$$T_A = T_B + m(g-a) \equiv T_B + mg$$

Por lo tanto, la tensión T_A es siempre mayor que T_B y se romperá primero el hilo A.

Experimento (b): Cuando se produce un tirón brusco al hilo inferior, la aceleración instantánea de la pelota puede llegar a exceder el valor de la aceleración de la gravedad $(a >> g)$, por lo tanto:

$$T_A = T_B - m(a-g) < T_B$$

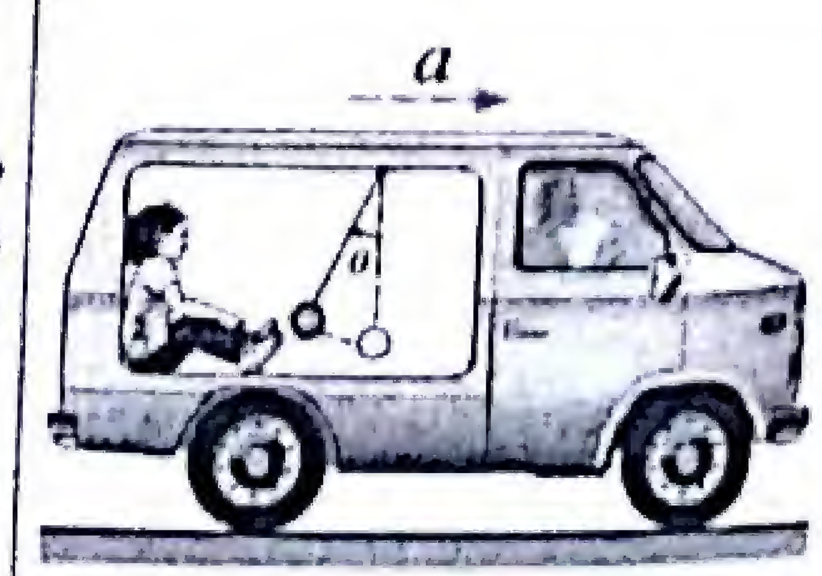
En este caso el hilo inferior B, estará sometido a una tensión mayor que T_A y se romperá primero.

Respuesta:

a) $a \approx 0$ y $T_A > T_B$ (se rompe el hilo A)
b) $a >> g$ y $T_A < T_B$ (se rompe el hilo B)

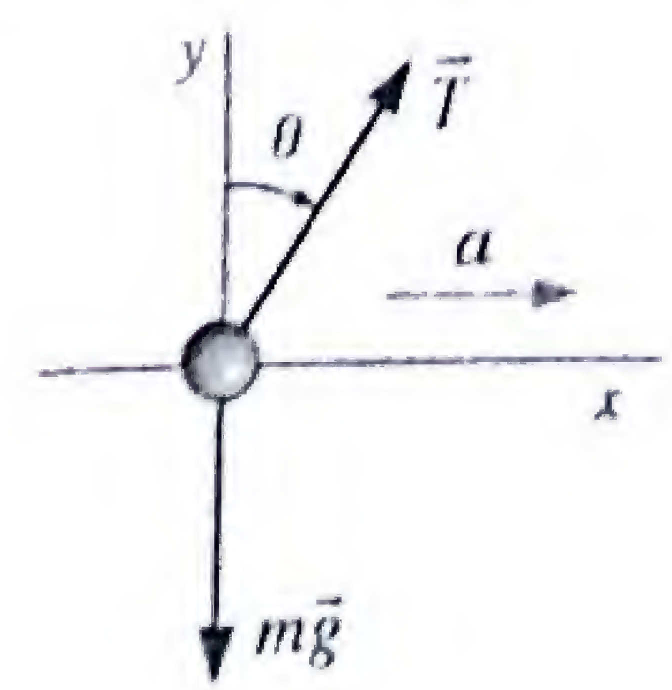
PR 1.16. *Por el ángulo se sabe cual es su aceleración*

Una pelota está suspendida mediante una cuerda del techo de una camioneta van. Se observa que cuando la camioneta va hacia delante con una aceleración constante, el hilo forma un ángulo $\theta = 15°$ con la vertical.
a) ¿Cuál es la aceleración de la camioneta?
b) ¿Con esta información, se podría determinar la velocidad de la camioneta?
c) ¿Qué sucede si la camioneta empieza a frenar?



Solución: a) En la figura de abajo se muestra el diagrama de cuerpo libre de la pelota, según un observador inercial fijo en la carretera.

Las fuerzas actuando son: la gravedad $m\vec{g}$ y la tensión de la cuerda, $\vec{T}$. Aplicando la segunda ley de Newton a la pelota en la dirección horizontal:



$$\sum F_x = T sen\theta = ma \qquad (1)$$

Mientras que, en la dirección vertical no hay aceleración:

$$\sum F_y = T cos\theta - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad T cos\theta = mg \qquad (2)$$

Dividiendo la ecuación 1 entre la ecuación 2, obtenemos la aceleración a en términos del ángulo θ:

$$tg\theta = a/g$$

$$a = gtg\theta = (9{,}8 m/s^2)tg15° = 2{,}63 m/s^2$$

b) La información suministrada es insuficiente para determinar la velocidad de la camioneta.

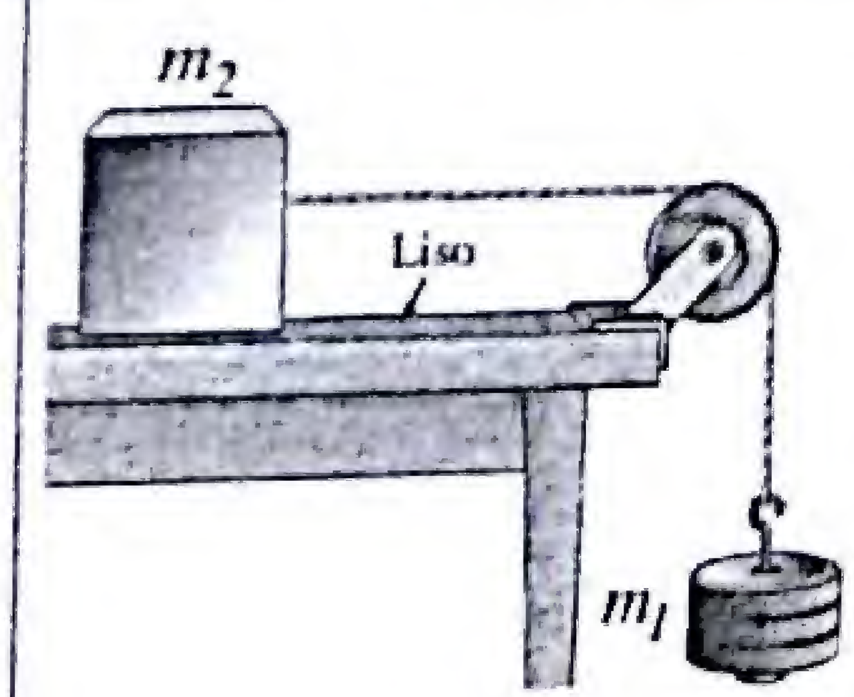
c) Si la camioneta frena, entonces el hilo se inclina hacia adelante. Es decir, la tensión del hilo es tal que provee una componente de fuerza en dirección de la aceleración que es hacia atrás.

Respuesta:

a) $a = gtg\theta = 2{,}63$ m/s^2
b) No
c) Hacia adelante

PR 1.17. *Dos bloques conectados por una cuerda*

Una pesa de masa m_1 está suspendida de una cuerda que pasa por una polea ligera y sin rozamiento; con el otro extremo conectado a un bloque de masa m_2, situado sobre una superficie horizontal pulida. Determine:
a) La aceleración de la pesa y el bloque.
b) La tensión de la cuerda.



Solución: Construimos primero los diagramas de cuerpo libre de la pesa y el bloque por separado y luego aplicamos la segunda ley de Newton para cada uno. Las tensiones de la cuerda a cada lado de la polea las llamamos $\vec{T}_1$ y $\vec{T}_2$. La ecuación para el movimiento horizontal del bloque m_2, es:

$$\sum F_x = T_2 = m_2 a_2$$

Similarmente para el movimiento vertical de la pesa m_1:

$$\sum F_y = m_1 g - T_1 = m_1 a_1$$

Como la cuerda no se estira, las aceleraciones a_1 y a_2 tienen magnitudes iguales, a. Además, ni la polea ni la cuerda tienen masas, así que la tensión de la cuerda es homogénea y $\vec{T}_1$ y $\vec{T}_2$ son de igual magnitud, T. Podemos escribir las ecuaciones anteriores:

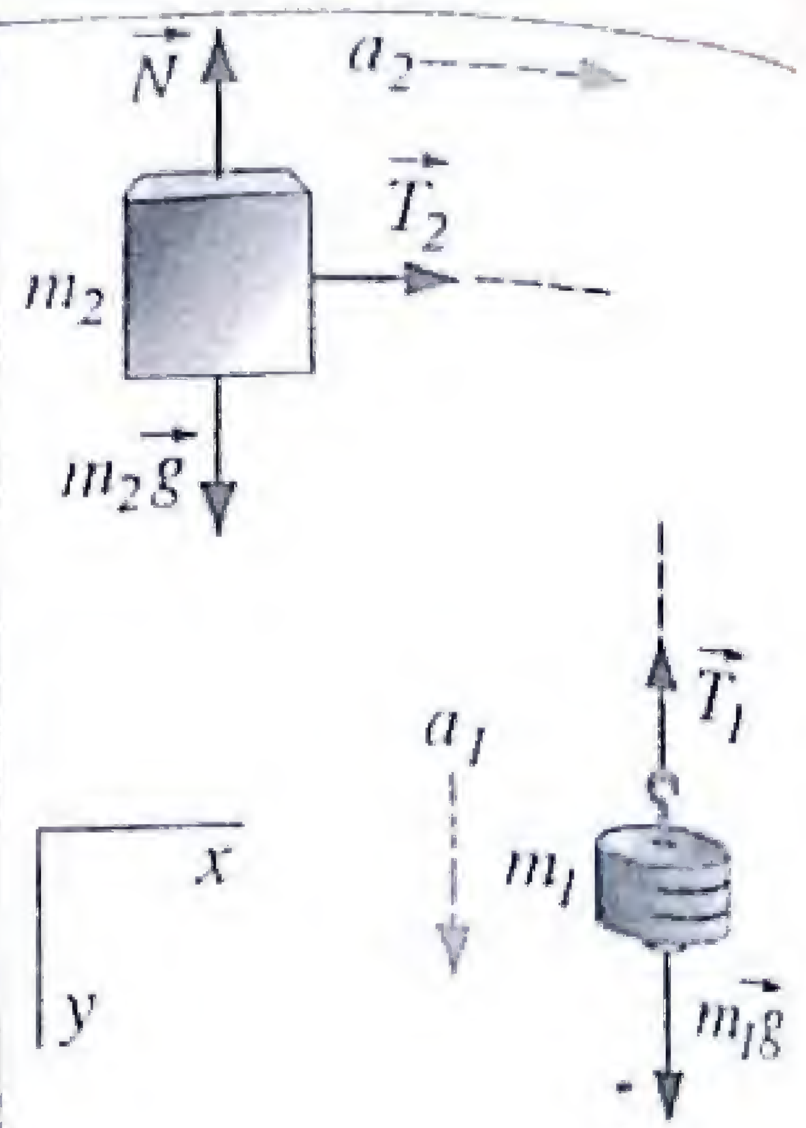
$$T = m_2 a \qquad\qquad m_1 g - T = m_1 a$$

Sumando estas dos ecuaciones para eliminar T, se obtiene la aceleración común a los dos bloques:

$$m_1 g = m_1 a + m_2 a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{m_1}{m_1 + m_2} g$$

Sustituyendo este resultado en la primera ecuación, se obtiene la magnitud de la tensión de la cuerda:

$$T = m_2 a = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$



Respuesta:

a) $a = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} g$

b) $T = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$

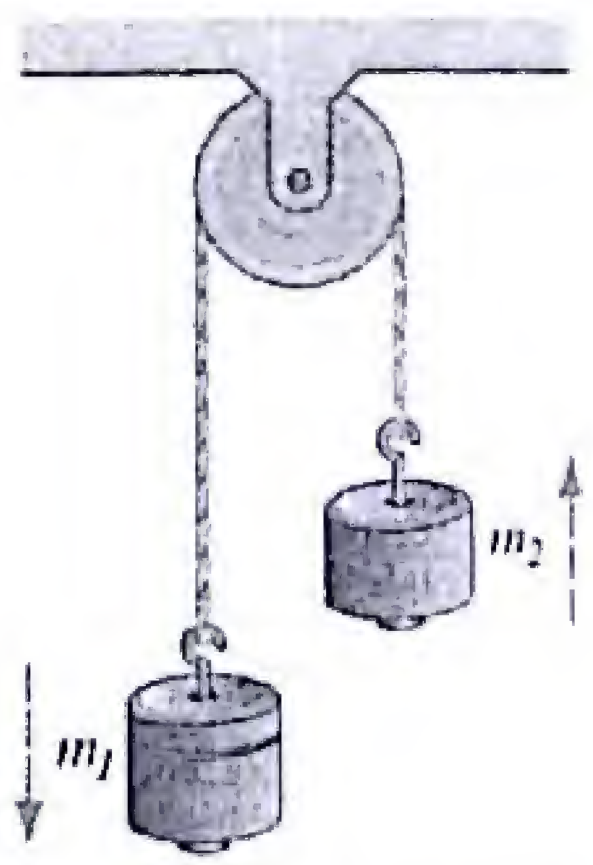
PR-1.18. *La máquina de Atwood*

Dos pesas de masas desiguales $m_1 > m_2$, están suspendidas verticalmente mediante una cuerda ligera que pasa por una polea ideal. Determine:

a) la aceleración de las pesas.

b) la tensión de la cuerda.

*La descripción de este dispositivo fue publicada en 1874 por George Atwood, y su finalidad era "diluir" el efecto de la gravedad, facilitando así una determinación precisa de g.



Solución: a) En la Figura se muestran los diagramas de cuerpo libre para las dos pesas. Como $m_1 > m_2$, el bloque $m_1$debe acelerar hacia abajo, mientras que m_2 hacia arriba. Estas aceleraciones deben ser iguales en magnitud ($|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = a$). Además la polea es ideal, y la tensión de la cuerda tiene magnitud constante,

$$|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$$

Aplicando la segunda ley de Newton a cada pesa:

$$\sum F_y = m_1 g - T_1 = m_1 a_1 \quad \Rightarrow \quad m_1 g - T = m_1 a$$

$$\sum F_y = T_2 - m_2 g = m_2 a_2 \quad \Rightarrow \quad T - m_2 g = m_2 a$$

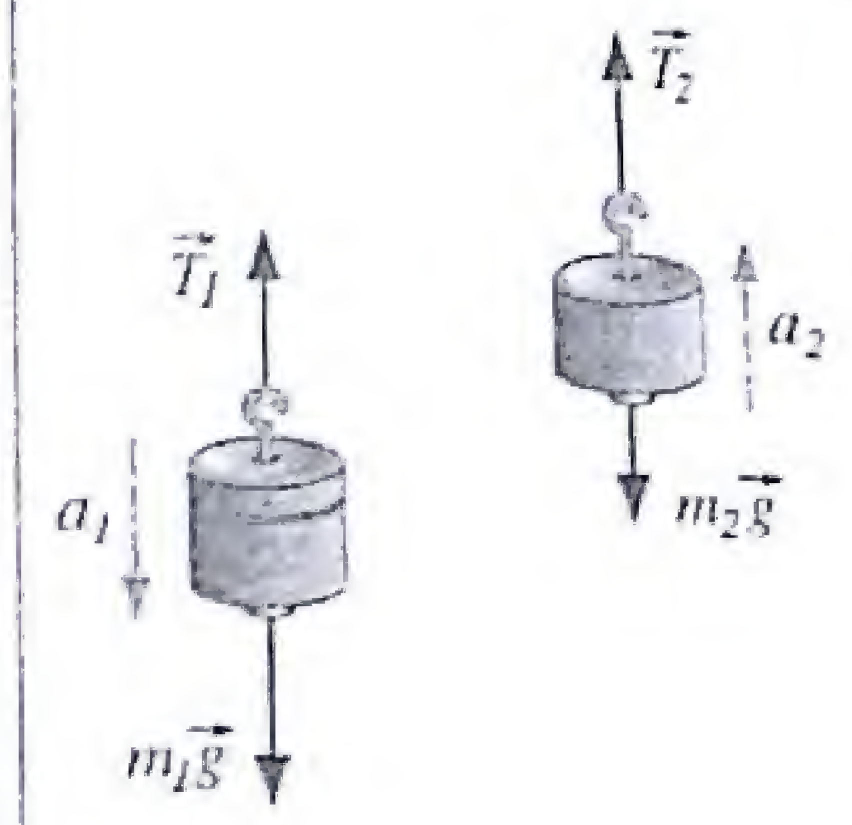
Cuando sumamos estas dos ecuaciones se elimina T, y así se obtiene la aceleración de las pesas:

$$m_1 g - m_2 g = m_1 a + m_2 a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

b) Si esta expresión es sustituida en la anterior, encontramos la tensión de la cuerda:

$$T = m_2 \left(1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right) g = \frac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

Observe que, si las dos masas son iguales ($m_1 = m_2$), entonces $a = 0$ (hay equilibrio) y en este caso, la tensión de la cuerda sería: $T = m_1 g = m_2 g$



Respuesta:

a) $a = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$

b) $T = \dfrac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$

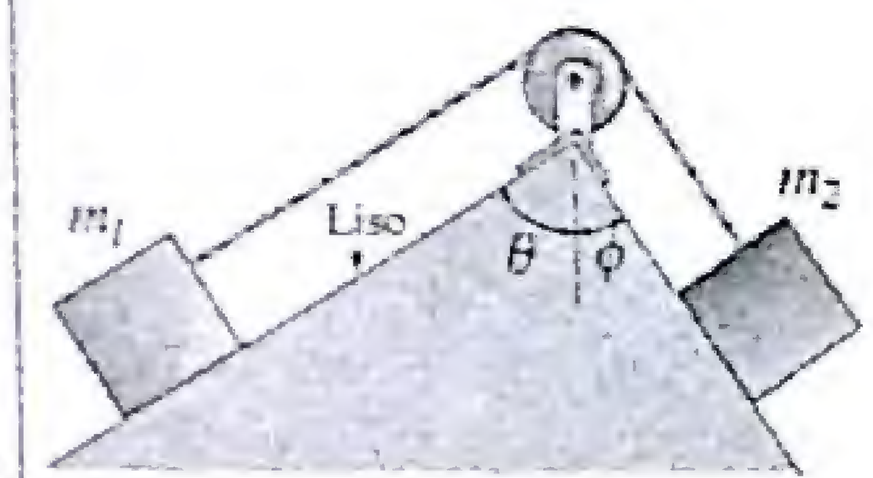
PR-1.19. *Bloques sobre planos inclinados: Tres casos*

Dos bloques de masas respectivas m_1 y m_2, están sobre planos inclinados lisos y unidos entre sí por medio de una cuerda ligera que pasa a través de una polea de masa despreciable y sin rozamiento. Determine:

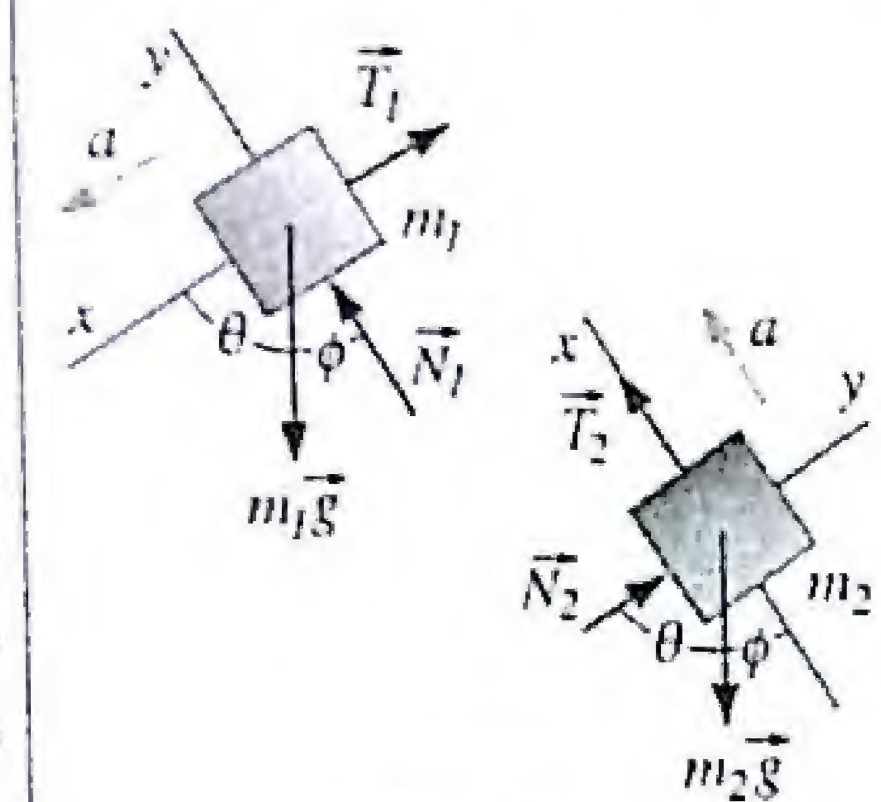
a) La aceleración del sistema y la tensión de la cuerda.

b) ¿Para qué lado se irán los bloques?

c) La aceleración y la tensión de la cuerda para los tres casos: ($\theta = 0°$, $\phi = 90°$), ($\theta = \phi = 0°$), ($\theta = 0°$, $\phi = 180°$)



Solución: a) Supongamos que el movimiento ocurre en el sentido indicado (m_1 desciende) y consideremos el diagrama de cuerpo libre para cada bloque por separado. Sobre cada uno actúan tres fuerzas: el peso hacia abajo, la normal en dirección perpendicular al plano y la tensión ejercida por la cuerda. Como la polea es ideal (sin masa) y no hay rozamiento, su función es cambiar la dirección de la tensión de la cuerda sin alterar su magnitud, $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$. Además, la cuerda no se estira y por lo tanto las aceleraciones de los bloques son de igual magnitud, a.



(Fig. a)

Supongamos que el movimiento ocurre en la dirección indicada. Aplicando la segunda ley de Newton a cada bloque:

Bloque m_1: $\sum F_x = m_1 g\cos\theta - T = m_1 a$

Bloque m_2: $\sum F_x = T - m_2 g\cos\phi = m_2 a$

Sumando estas dos ecuaciones, se obtiene:

$$m_1 g\cos\theta - m_2 g\cos\phi = (m_1 + m_2)a$$

Despejando, encontramos la aceleración a:

$$a = \left(\frac{m_1\cos\theta - m_2\cos\phi}{m_1 + m_2}\right)g$$

Sustituyendo la expresión de a en cualquiera de las ecuaciones anteriores, encontramos la tensión de la cuerda:

$$T = \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)(\cos\theta + \cos\phi)g$$

b) El sentido del movimiento está dado por el signo de a. Si $m_1\cos\theta > m_2\cos\phi$ entonces m_1 desciende, mientras que si $m_1\cos\theta < m_2\cos\phi$ entonces m_2 desciende.

c) Veamos los tres casos particulares:

$\theta = 0°, \phi = 90°$: Un bloque desciende verticalmente y jala al otro bloque en el plano horizontal (Problema PR-1.17):

$$a = \frac{m_1}{m_1 + m_2}g, \qquad T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}g$$

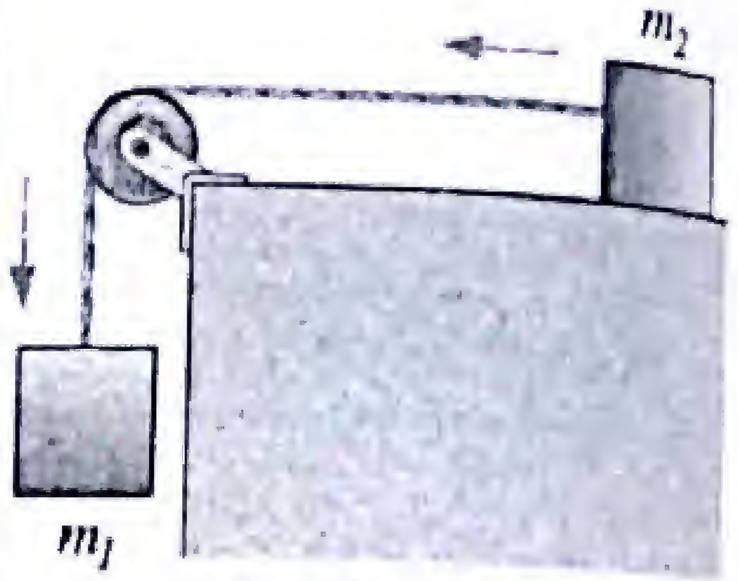
$\theta = \phi = 0°$: Los dos bloques quedan suspendidos de la polea (Máquina de Atwood), uno sube y el otro baja (Problema PR-1.18):

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g, \qquad T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}g$$

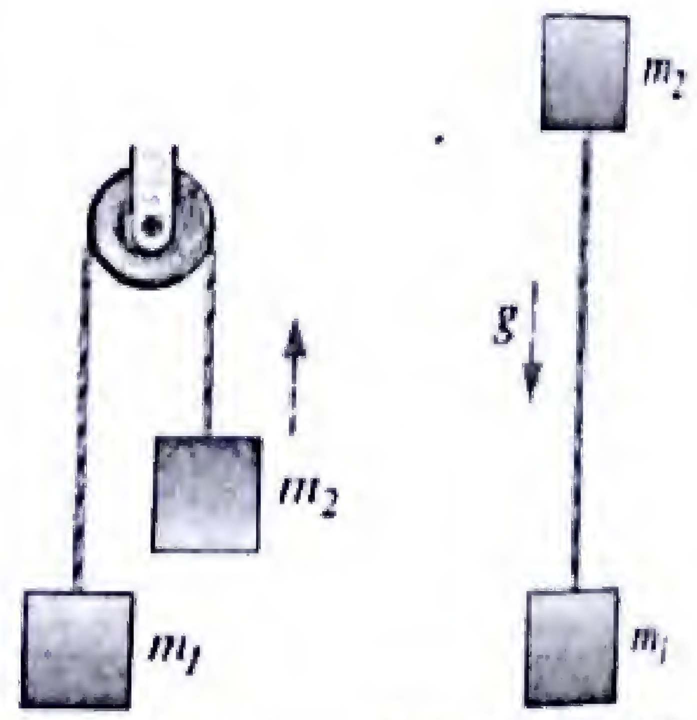
$\theta = 0°, \phi = 180°$: Los dos cuerpos quedan en caída libre.

$$a = g \qquad T = 0$$

$\theta = 90°, \phi = 90°$: Las dos superficies son horizontales: $a = 0$, $T = 0$. (no hay movimiento).



$\theta = 0°$, $\phi = 90°$



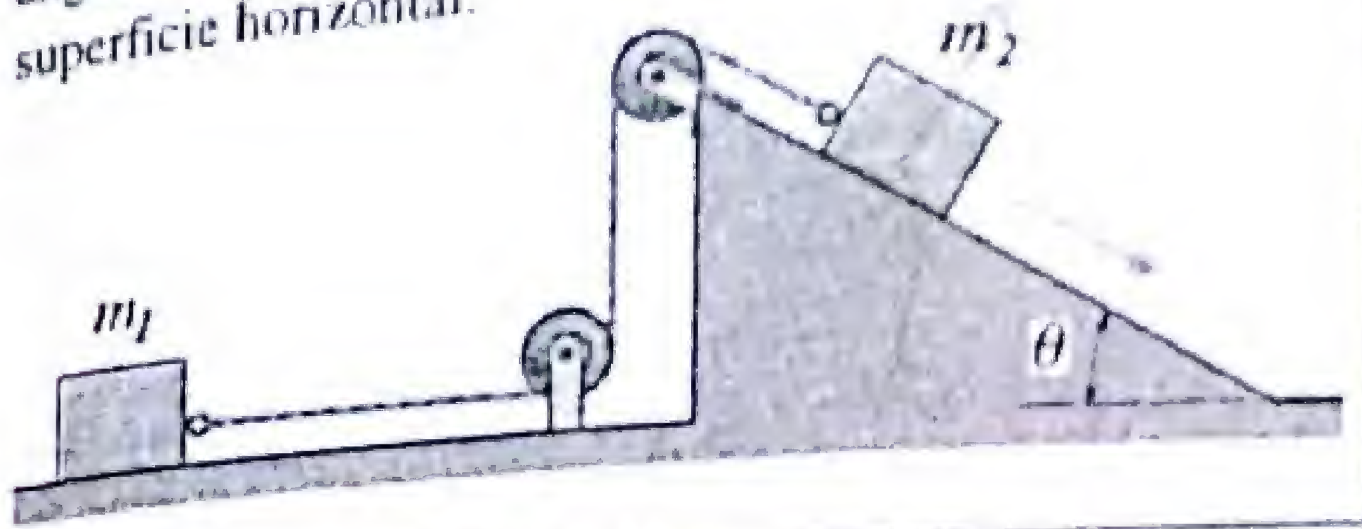
$\theta = \phi = 0°$ $\qquad$ $\theta = 0°, \phi = 180°$

Respuesta:

$$\boxed{a = \left(\frac{m_1\cos\theta - m_2\cos\phi}{m_1 + m_2}\right)g \qquad T = \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right)(\cos\theta + \cos\phi)g}$$

PR-1.20. ¿Cuánto tarda el bloque en descender?

Cuando el bloque m_2 desciende por el plano inclinado de ángulo $\theta = 36°$, con la cuerda arrastra al bloque m_1 en la superficie horizontal.



Todas las superficies son lisas y las poleas son ideales. Si las masas de los bloques son iguales, $m_1 = m_2 = 2kg$ y la longitud del plano inclinado es $L =$ 0,5 m, determine:

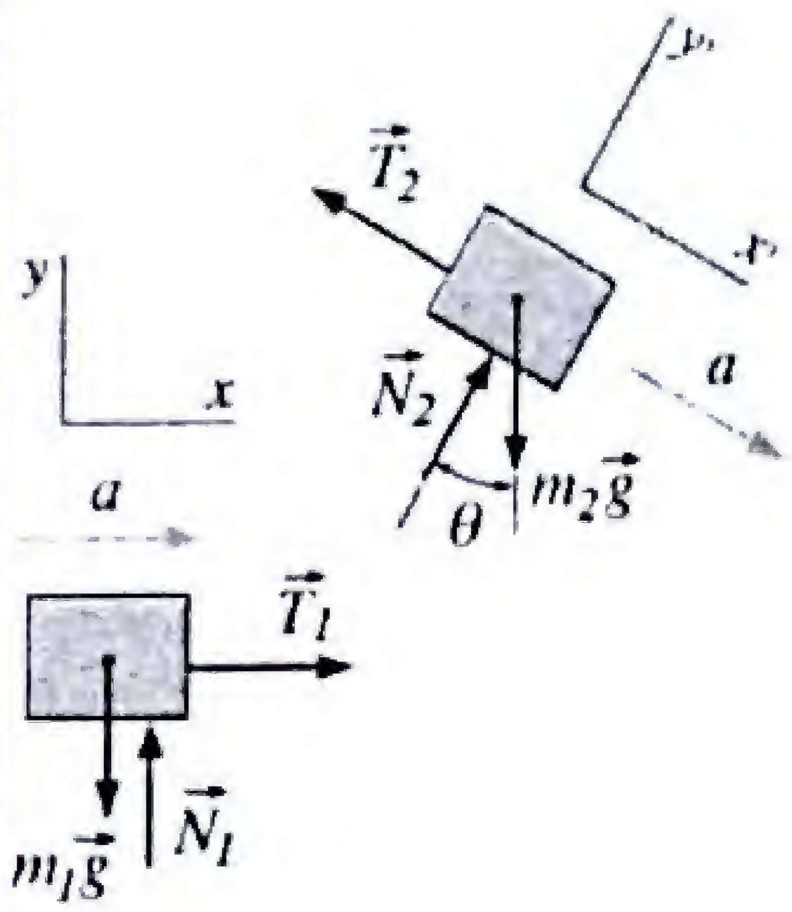
a) El tiempo que tarda el bloque m_2 en descender por el plano.

b) La tensión de la cuerda.

Solución: Si se supone que la cuerda no se estira, la tensión de la cuerda tiene el mismo valor, a lo largo de toda su longitud ($|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$) y el módulo de la aceleración es común a ambos bloques ($a_1 = a_2 = a$). Para cada bloque por separado escogemos ejes de modo que el eje x quede en la dirección del movimiento y si aplicamos la segunda ley de Newton, se tiene:

$$m_1: \sum F_x = T = ma \qquad (1)$$

$$m_2: \sum F_x = mg\,sen\theta - T = ma \qquad (2)$$



Si sustituimos T de la primer ecuación en la segunda, hallamos la aceleración a:

$$mg\,sen\theta - ma = ma \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}g\,sen\theta$$

El tiempo de descenso se obtiene empleando la relación conocida para cinemática con aceleración constante:

$$x = L = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2L}{a}} = \sqrt{\frac{4L}{g\,sen\theta}}$$

$$t = \sqrt{\frac{4(0{,}5\text{m})}{(9{,}8\text{m/s}^2)\text{sen}30°}} = 0{,}639\text{s}$$

b) La tensión de la cuerda se obtiene directamente de la ecuación (1):

$$T = ma = \frac{mg}{2}sen\theta = \frac{(2\text{kg})(9{,}8\text{m/s}^2)}{2}\text{sen}30° = 4{,}9\text{N}$$

*El θ no es 36°?

Respuesta:

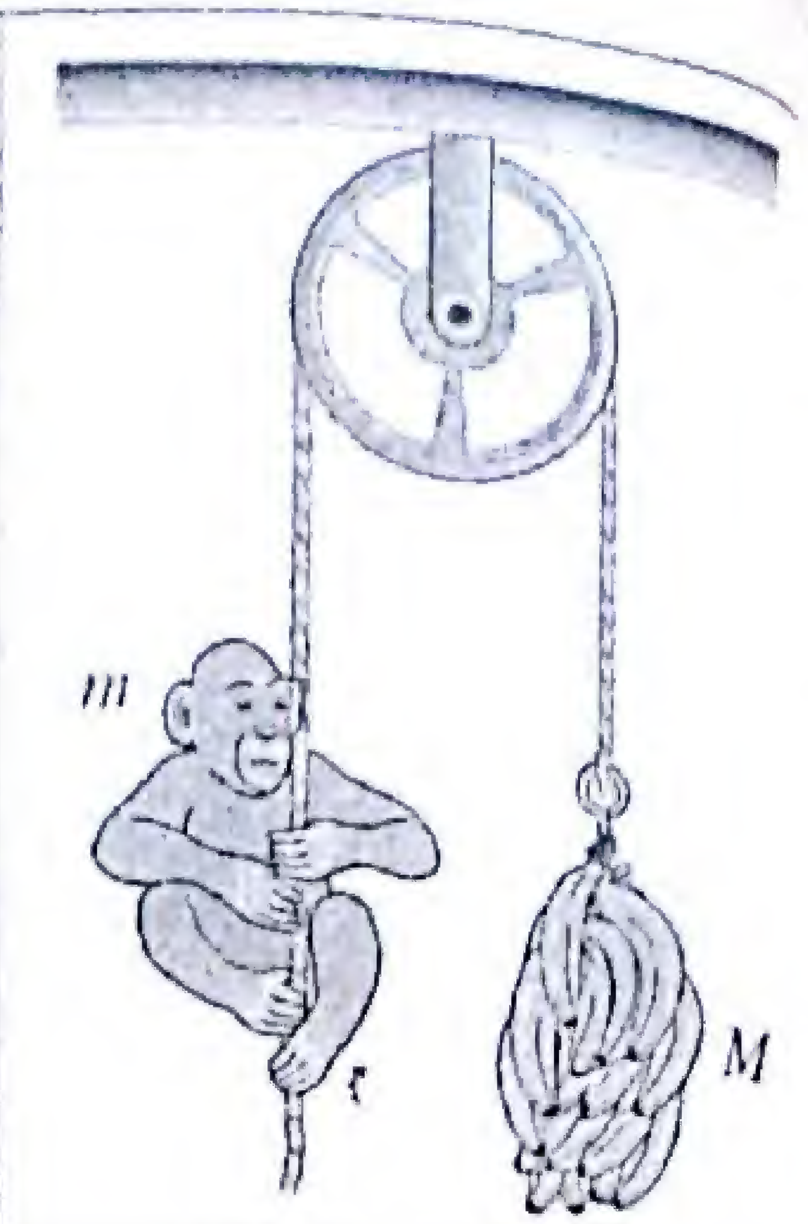
a) $t = 0{,}639$s
b) $T = 4{,}9$N

PR 1.21. *El mono trepa la cuerda y suben las bananas*

Un mono de masa m = 12 kg va a trepar por una cuerda liviana que cuelga de una polea fija y sin fricción; en el otro extremo de la cuerda está atado un racimo de bananas de masa M = 18 kg, que descansa sobre el suelo.

a) ¿Cuál debe ser la mínima aceleración de subida del mono para que se pueda elevar el racimo de bananas?

b) En un momento dado durante la subida, el mono se detiene para descansar. Determine la aceleración de caída del racimo de bananas y la tensión de la cuerda.



Solución: Cuando el mono tira de la cuerda hacia abajo, la cuerda jala al mono hacia arriba con una fuerza $\vec{T}_1$ igual y opuesta, por la tercera ley de Newton (Fig. a). Como la polea es ideal, la tensión es igual a ambos lados: $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$. Tomando la dirección positiva hacia arriba, y aplicando la segunda ley de Newton al mono:

$$\text{Mono:} \quad \sum F_y = T - mg = ma_m \qquad (1)$$

Aplicando la segunda ley de Newton al racimo:

$$\text{Racimo:} \quad \sum F_y = T + N - Mg = Ma_b \qquad (2)$$

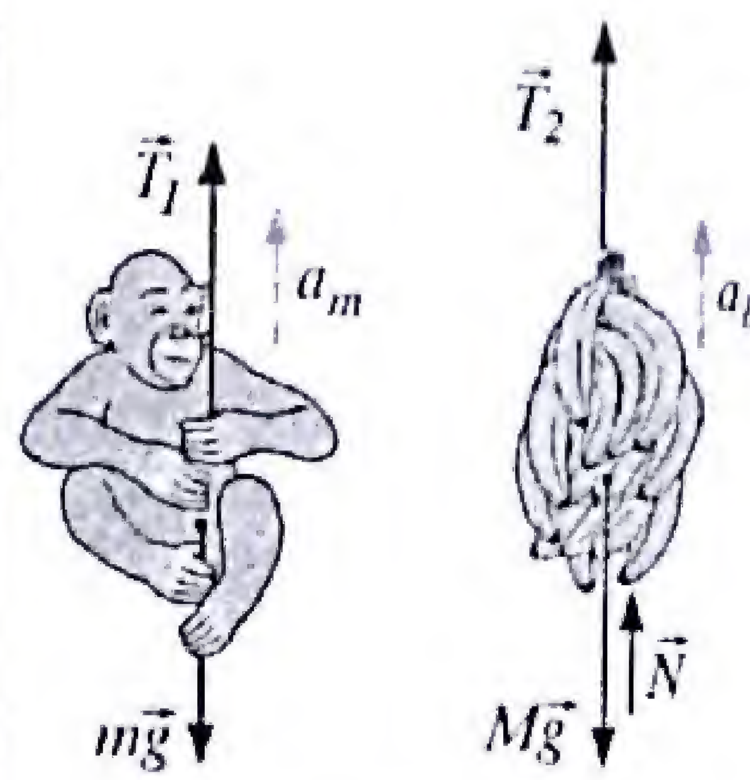


Fig. a: Subida del racimo

Donde N es la fuerza normal ejercida hacia arriba inicialmente por el piso sobre el racimo. La menor fuerza T requerida para elevar el racimo, corresponde al caso crítico en que éste pierde contacto con el piso (N = 0) y su aceleración es mínima (a_b = 0). Por lo tanto, podemos simplificar la ecuación 2: $T = Mg$. Sustituyendo este valor de T en la ecuación 1, obtenemos:

$$a_m = \left(\frac{M-m}{m}\right)g = \left(\frac{18\text{kg} - 12\text{kg}}{12\text{kg}}\right)9{,}8\text{m/s}^2 = 4{,}9\text{m/s}^2$$

b) Cuando el mono se detiene a descansar agarrado de la cuerda, el racimo desciende por ser mas masivo, mientras que el mono asciende con una aceleración de igual magnitud (fig. b). Aplicando la segunda ley de Newton obtenemos:

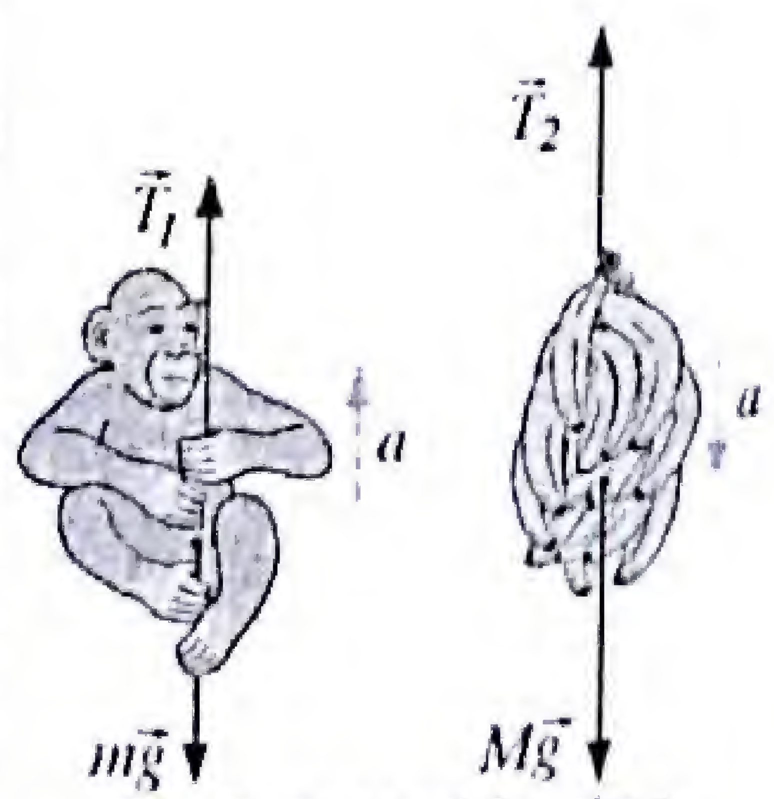


Fig. b: Caída del racimo

$$\text{Mono:} \quad \sum F_y = T - mg = ma \qquad (3)$$

$$\text{Racimo:} \quad \sum F_y = T - Mg = -Ma \qquad (4)$$

Note el signo (-) para la aceleración en la Ec. 3 del racimo. Si restamos la Ec. 4 de la Ec. 3 y despejamos la aceleración:

$$a = \left(\frac{M-m}{M+m}\right)g = \left(\frac{18\text{kg} - 12\text{kg}}{18\text{kg} + 12\text{kg}}\right)9{,}8\text{m/s}^2 = 1{,}96\text{m/s}^2$$

Sustituyendo este valor de la aceleración en la Ec. 3, obtenemos la tensión de la cuerda:

$$T = m(g + a) = 12\text{kg}(9{,}8\text{m/s}^2 + 1{,}96\text{m/s}^2) = 141\text{N}$$

Respuesta:

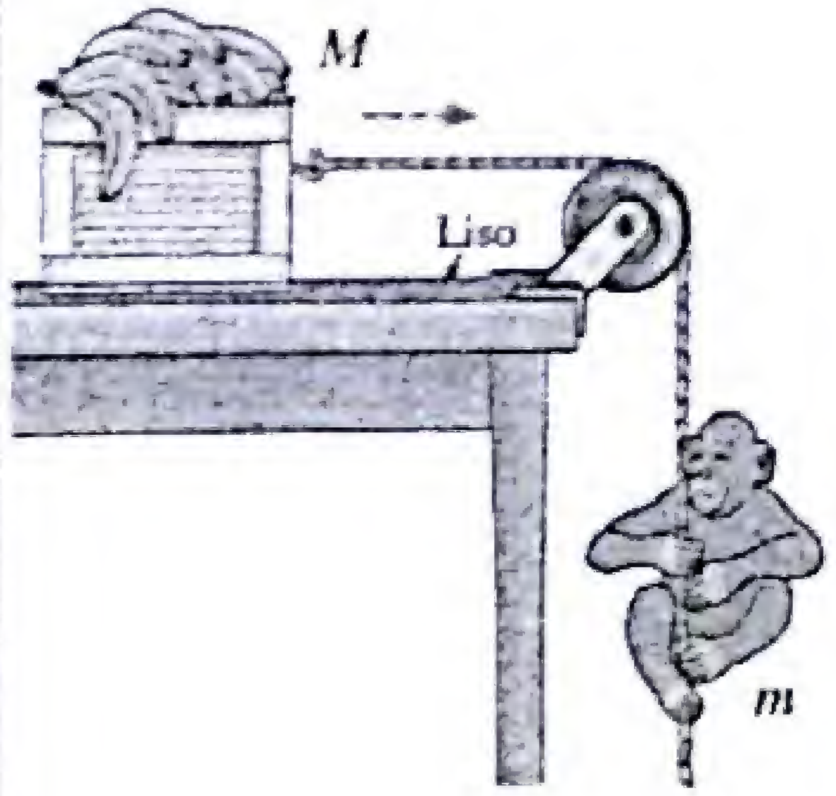
a) a_m = 4,9 m/s^2
b) a = 1,96 m/s^2, T = 141 N

PR-1.22. *El mono insiste en trepar hacia las bananas*

Un mono de masa m cuelga de una cuerda que pasa por una polea ligera y sin rozamiento. El otro extremo de la cuerda está atado a un cajón lleno de bananas, de masa total M, que puede moverse sin fricción sobre una superficie horizontal. Si el mono se mueve hacia arriba con aceleración a con respecto a la cuerda, determine:

a) Las aceleraciones del cajón y del mono con respecto a la mesa.

b) La tensión de la cuerda.



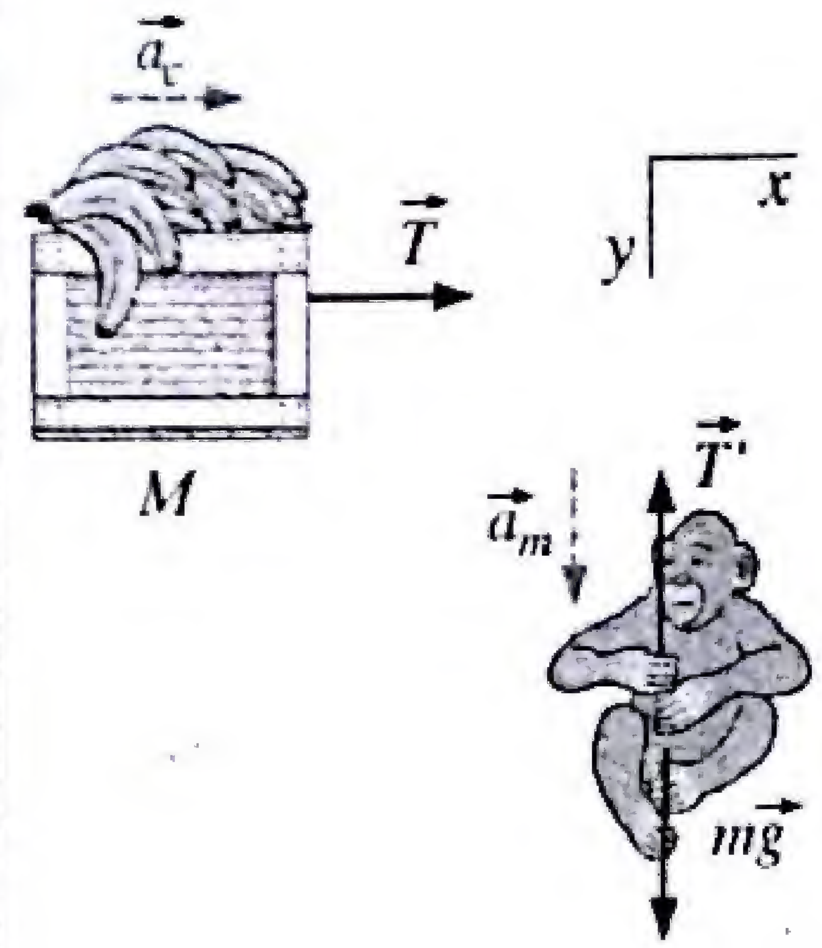
Solución: Si el mono se mueve hacia arriba con relación a la cuerda (o al cajón) con una aceleración a, entonces el movimiento de los dos cuerpos será diferente. Con relación a la mesa, la aceleración del cajón es a_c mientras que la aceleración del mono será:

$$a_m = a_c - a$$

Aplicando la 2a ley de Newton al mono y al cajón por separado y tomando en cuenta que $|\vec{T}'| = |\vec{T}| = T$, se obtiene:

$$\text{Mono:} \quad \sum F_y = mg - T = ma_m$$

$$\text{Cajón:} \quad \sum F_x = T = Ma_c$$



Sustituyendo T de la segunda ecuación en la primera y tomando en cuenta que: $a_m = a_c - a$, se obtiene la aceleración del cajón con respecto a la mesa:

$$mg - Ma_c = ma_m \qquad mg - Ma_c = m(a_c - a)$$

$$a_c = \frac{m(g+a)}{M+m}$$

Mientras que la aceleración del mono con respecto a la mesa es:

$$a_m = a_c - a = \frac{m(g+a)}{M+m} - a = \frac{mg - Ma}{M+m}$$

b) La tensión de la cuerda es:

$$T = Ma_c = \frac{Mm(g+a)}{M+m}$$

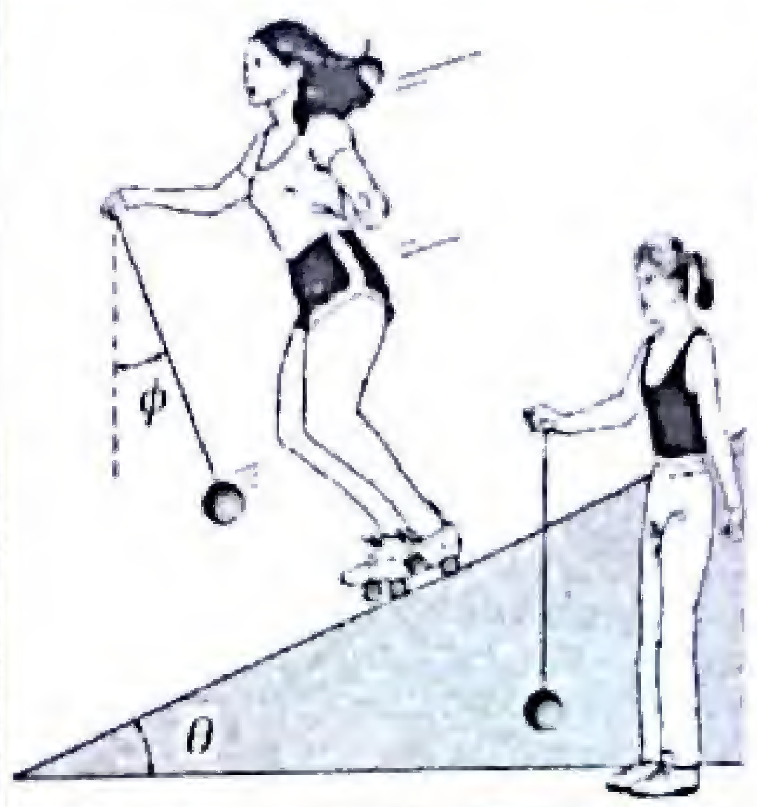
Respuesta:

a) $a_c = \dfrac{m(g+a)}{M+m}$, $a_m = \dfrac{mg - Ma}{M+m}$

b) $T = \dfrac{mM(g+a)}{M+m}$

PR-1.23. *¿En qué dirección se inclina la plomada?*

Una patinadora se desliza hacia abajo en un plano inclinado sin rozamiento que forma un ángulo θ con la horizontal. Durante el descenso, ella mantiene suspendida una pelota mediante un hilo, como indica la figura. ¿A qué ángulo ϕ se inclinará el hilo de la plomada con respecto a la vertical?

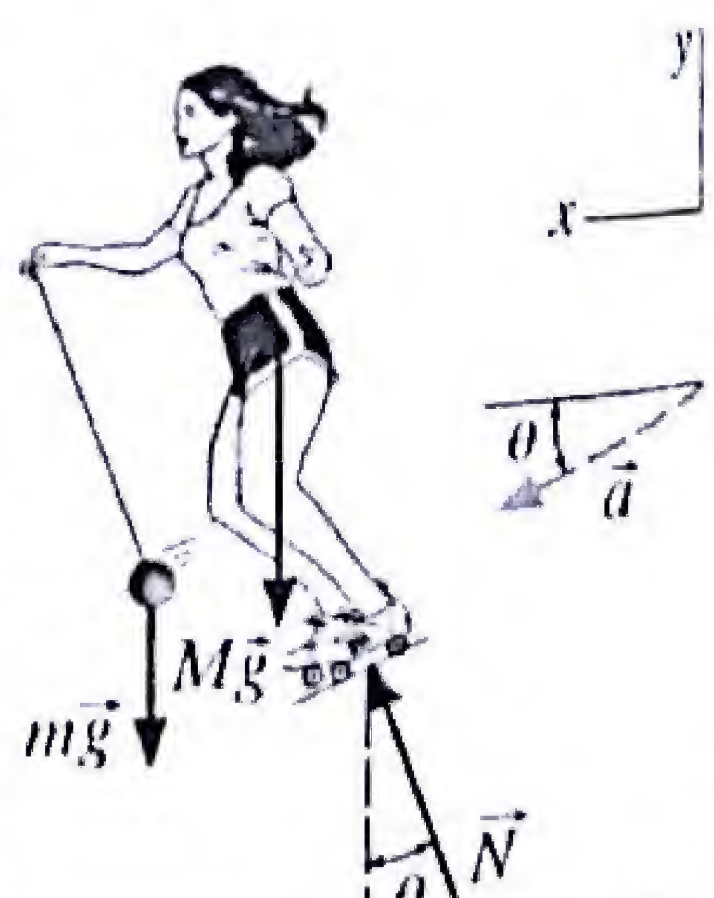


Solución: Analizaremos la situación desde el punto de vista de un observador inercial en Tierra. Para hallar la aceleración del sistema patinadora (masa M) con plomada (masa m), escribimos la segunda ley de Newton en las direcciones horizontal y vertical:

$$\sum F_x = N sen\theta = (m+M)acos\theta \qquad (1)$$

$$\sum F_y = N cos\theta - (m+M)g = -(m+M)asen\theta \qquad (2)$$

Despejando la fuerza normal N de la ecuación (1) y sustituyéndola en la (2), obtenemos la expresión (ya familiar) para la aceleración de un sistema que desciende sin rozamiento sobre el plano inclinado:



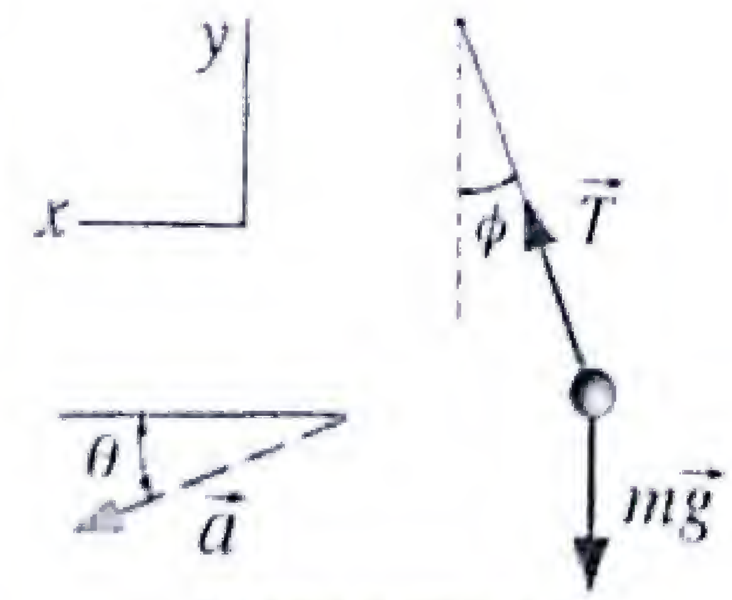
Sistema patinadora-plomada

$$\frac{acos^2\theta}{sen\theta} - g = -asen\theta \qquad \Rightarrow \qquad a = gsen\theta$$

Consideramos ahora el diagrama de cuerpo libre de la plomada solamente, sobre la cual actúa su peso mg y la tensión del hilo, T. Escribiendo la segunda ley de Newton en las direcciones horizontal y vertical:

$$\sum F_x = Tsen\phi = macos\theta \qquad (3)$$

$$\sum F_y = Tcos\phi - mg = -masen\theta \qquad (4)$$



Sistema plomada

Eliminando T de las ecuaciones (3) y (4), y usando la expresión para la aceleración, $a = gsen\theta$, se obtiene:

$$\frac{macos\theta cos\phi}{sen\phi} - mg = -masen\theta$$

simplificando: $\quad tg\theta = tg\phi \quad \Rightarrow \quad \phi = \theta$

Esto significa que el hilo de la plomada quedará alineado en la perpendicular al plano inclinado.

Respuesta:

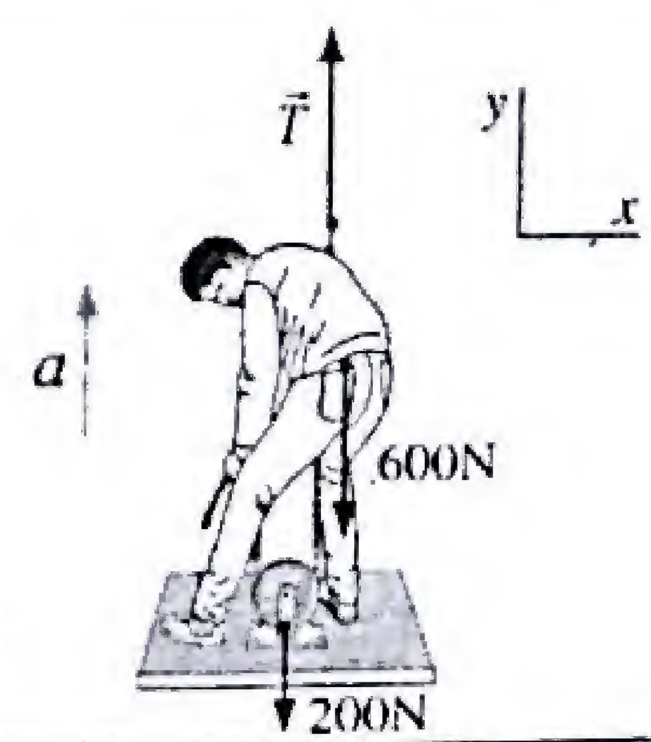
$\boxed{\phi = \theta}$

PR 1.24. *¿Será posible elevarse jalando hacia arriba?*

En el dibujo se muestra una persona que pesa 600 N y quiere elevarse, jalando hacia arriba la cuerda que pasa por una polea fija a una plataforma. El peso total de la plataforma junto con la polea es 200 N. Determine qué tan fuerte debe la persona jalar la cuerda para elevarse a velocidad constante.

Solución: Consideremos el sistema constituido por el hombre junto con la plataforma. La fuerza T, aplicada por el hombre a la cuerda de un lado de la polea, se transmite por la cuerda al otro lado de la polea y tiene el mismo valor que fuerza externa aplicada al sistema por el otro lado de la cuerda. Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum F_y = T - 600\text{N} - 200\text{N} = (M+m)a$$



Para elevarse a velocidad constante la aceleración debe ser nula ($a = 0$) y la fuerza aplicada debe ser:

$$T = 600\text{N} + 200\text{N} = 800\text{N}$$

Respuesta:

$T = 800\text{N}$

PR 1.25. *Un mejor método para elevarse con una polea*

A un pintor se le ocurre un método mejor para elevarse en una plataforma jalando por el extremo libre de la cuerda, como se ilustra en la figura. El peso del pintor es 600 N y el de la plataforma es 200 N.

a) ¿Qué tan fuerte debe jalar la cuerda hacia abajo para subir a velocidad constante?

b) Si el pintor jala aplicando una fuerza de 420 N, determine la aceleración del sistema y la fuerza que ejerce el pintor sobre la plataforma.

Solución: a) Consideremos el sistema constituido por el pintor y la plataforma. Las fuerzas ejercidas son: el peso $M\vec{g}$ del pintor, el peso $m\vec{g}$ de la plataforma y dos fuerzas iguales $\vec{T}$, ejercidas por cada cuerda. Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum F_y = 2T - Mg - mg = (M + m)a$$

Despejando tenemos: $$a = \left[\frac{2T}{(M+m)g} - 1\right]g$$

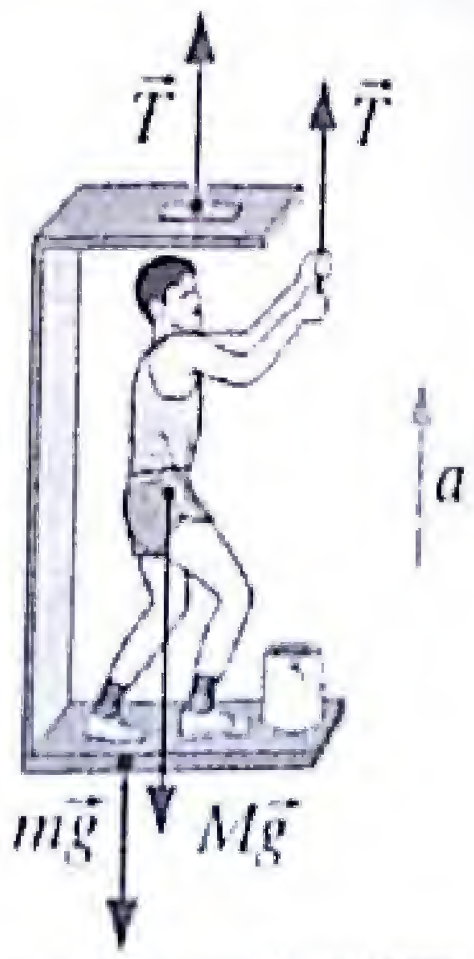


Fig. a: Sistema Pintor+Plataforma

Para elevarse a velocidad constante, la expresión anterior para la aceleración debe anularse. Por lo tanto la magnitud de la fuerza que debe aplicar el pintor es:

$$T = \frac{Mg + mg}{2} = \frac{600\text{N} + 200\text{N}}{2} = 400\text{N}$$

Qué es la mitad del valor requerido en la situación del problema anterior.

b) Si el pintor aplica una fuerza de 420 N, la aceleración es:

$$a = \left[\frac{2(420\text{N})}{600\text{N} + 200\text{N}} - 1\right]9{,}8\text{m/s}^2 = 0{,}49\text{m/s}^2$$

Fig. b: Sistema Pintor

Para determinar la fuerza $\vec{N}$ que ejerce la plataforma sobre el pintor, tomamos como sistema aislado al pintor solamente (Figura b). Aplicando la 2ª ley de Newton:

$$\sum F_y = N + T - Mg = Ma \quad \Rightarrow$$

$$N = Mg\left(1 + \frac{a}{g}\right) - T$$

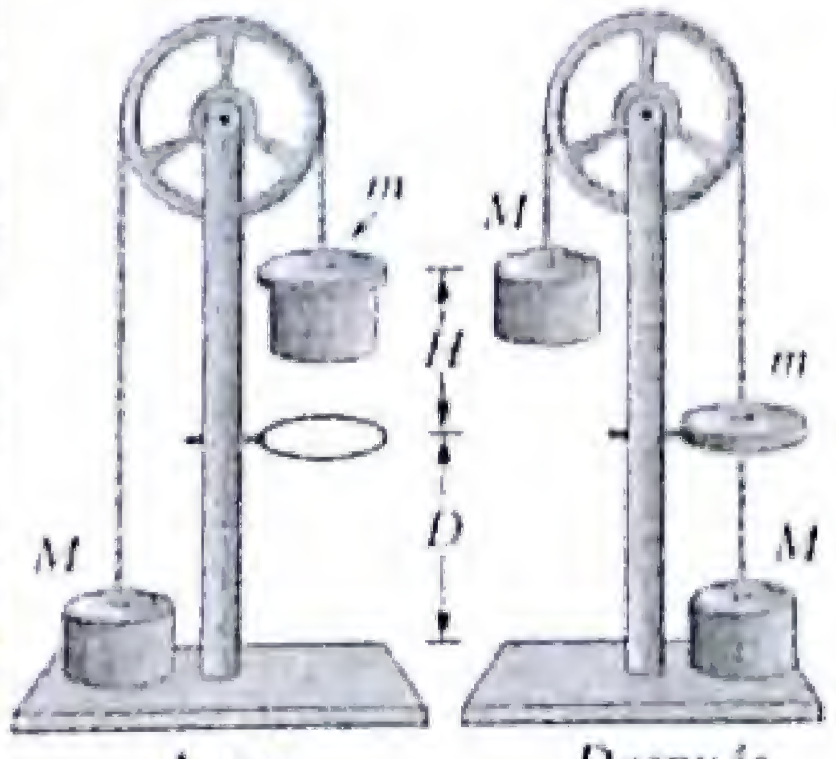
$$N = 600\text{N}\left(1 + \frac{0{,}49\text{m/s}^2}{9{,}8\text{m/s}^2}\right) - 420\text{N} = 210\text{N}$$

Respuesta:

a) $T = 400\text{N}$
b) $a = 0{,}49\ \text{m/s}^2$
$N = 210\ \text{N}$

PR 1.26. *Una práctica de laboratorio para determinar g*

El dispositivo mostrado en la figura se emplea en una práctica de laboratorio de física, para determinar la aceleración de la gravedad, g. Dos pesas de masas iguales, M, están sujetas entre sí por un hilo inextensible que pasa por una polea ideal fija. Encima de la pesa de la derecha se coloca una sobrecarga de masa m. Cuando se suelta el dispositivo, la pesa de la derecha cae aceleradamente en una distancia H, hasta que la sobrecarga queda enganchada en un soporte fijo. De allí en adelante la pesa cae sola, en una distancia D a velocidad constante. Halle la expresión que permite determinar g en términos del tiempo t empleado durante la caída en la distancia D.



Antes *Después*

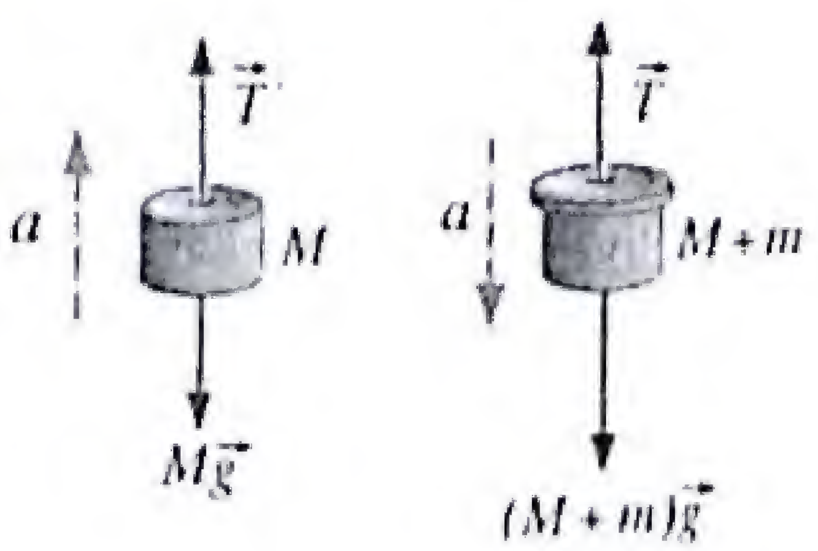
Solución: La *primera etapa* del movimiento del sistema ocurre con aceleración constante, a. Aplicando la segunda ley de Newton a cada sistema:

Pesa izquierda ⇑: $$\sum F_y = T - Mg = Ma$$

Pesa+sobrecarga ⇓: $$\sum F_y = (M+m)g - T = (M+m)a$$

Si se elimina T de este par de ecuaciones, obtenemos la aceleración:

$$a = \left(\frac{m}{2M + m}\right)g$$



Después de descender una distancia H con aceleración constante a, la sobrecarga queda enganchada en el soporte de retención, y el sistema ha alcanzado una velocidad:

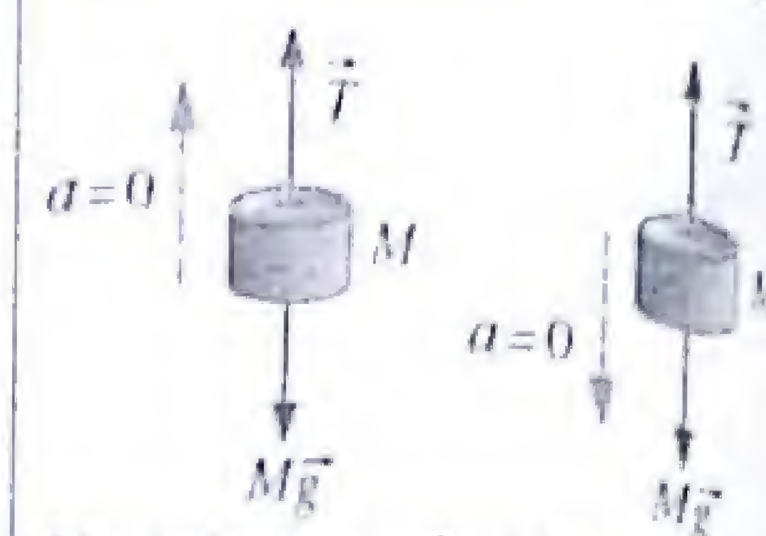
$$v = \sqrt{2aH} = \sqrt{\frac{2mgH}{2M+m}}$$

En la *segunda etapa*, la masa M que cae recorre a velocidad constante una distancia:

$$D = vt = \sqrt{\frac{2mgH}{2M+m}}\,t$$

Despejando, se obtiene la aceleración de la gravedad:

$$g = \frac{(2M+m)D^2}{2mHt^2}$$



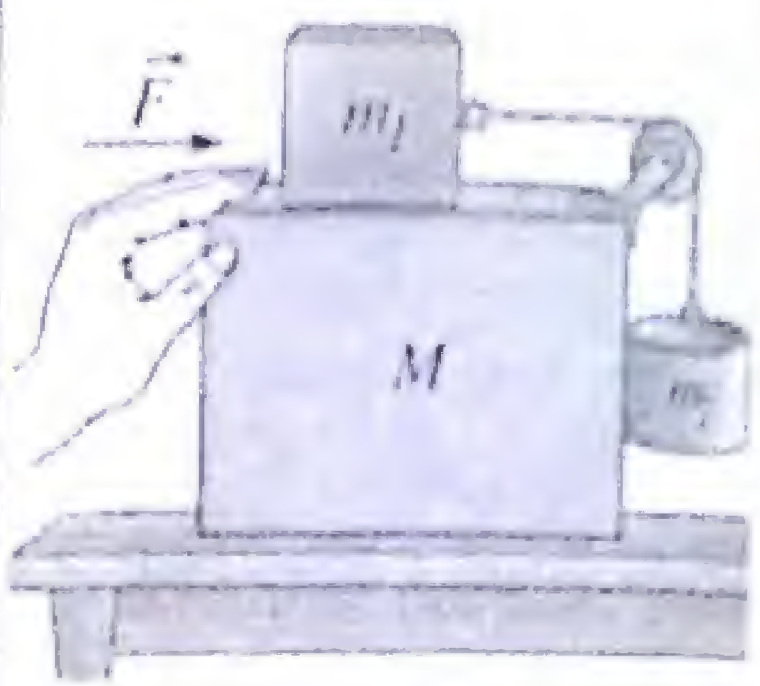
Movimiento a velocidad constante

Respuesta:

$$\boxed{g = \frac{(2M+m)D^2}{2mHt^2}}$$

PR 1.27. *Al empujar el bloque M, la pesa no debe caer*

Un bloque de masa M lleva encima otro bloque de masa m_1, el cual está acoplado a una pesa de masa m_2, mediante una cuerda que pasa por una polea ideal. Se desprecia el rozamiento entre todas las superficies. Determine el valor de la fuerza horizontal $\vec{F}$ que debe aplicarse al bloque M para que el sistema se mueva como un todo sin que caiga la pesa m_2.



Solución: En la Figura a, hemos dibujado los diagramas de cuerpo libre para el bloque m_1 y para la pesa m_2, los cuales deben tener la misma aceleración horizontal, a. El bloque m_1 es acelerado por la tensión de la cuerda, $\vec{T}$.

La pesa m_2 no debe moverse en la dirección vertical y debe permanecer en contacto con el bloque M mediante la fuerza horizontal de contacto, $\vec{N}_2$. Aplicando la segunda ley de Newton:

Bloque m_1: $$\sum F_x = T = m_1 a \qquad (1)$$

Pesa m_2: $$\sum F_y = T - m_2 g = 0 \qquad (2)$$

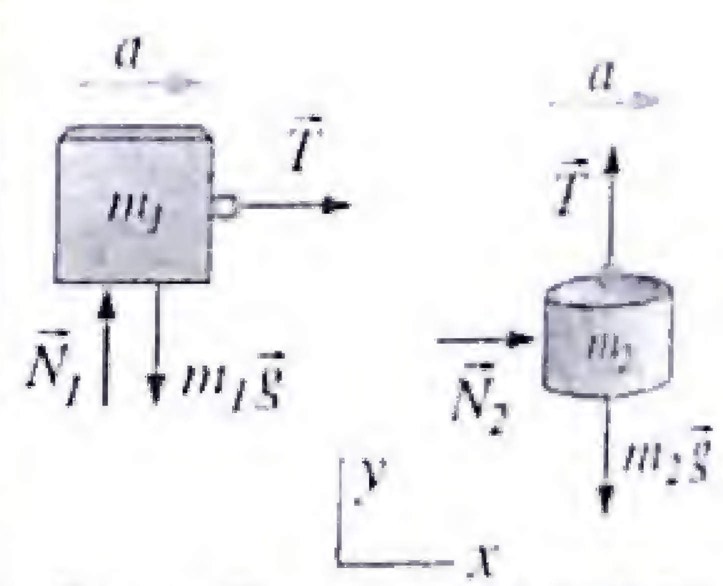


Fig. a: Fuerzas sobre m_1 y m_2

Eliminando T de la ecuaciones. 1 y 2 obtenemos la aceleración:

$$a = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)g \qquad (3)$$

Consideremos ahora el sistema completo constituido por los dos bloques y la pesa. Aplicando la segunda ley de Newton en la dirección horizontal:

$$\sum F_x = F = (m_1 + m_2 + M)a$$

Reemplazando en esta expresión la aceleración dada por la ecuación 3, obtenemos finalmente la fuerza requerida:

$$F = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)(m_1 + m_2 + M)g$$

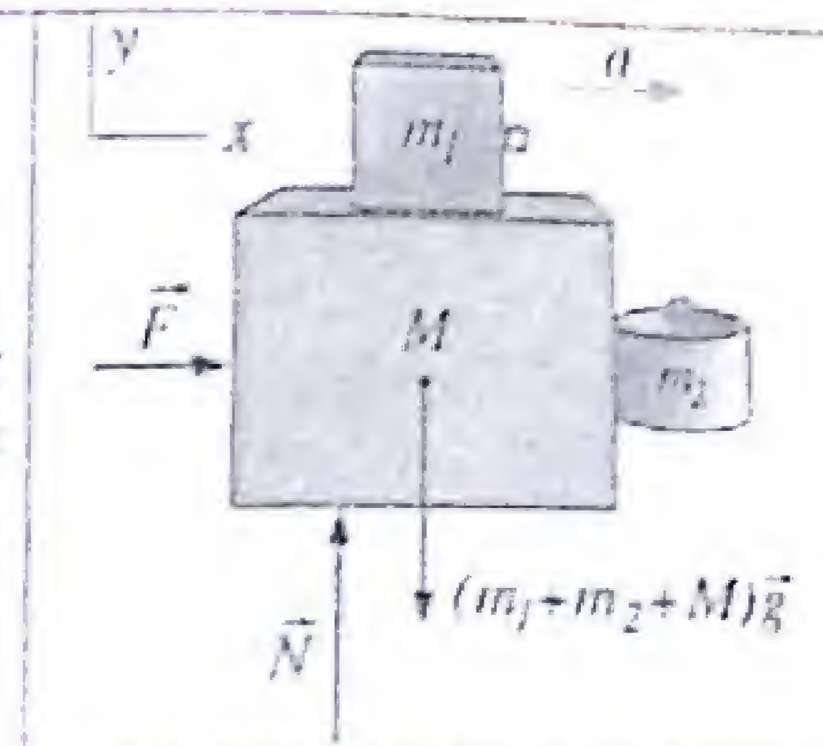


Fig.b: Fuerzas sobre todo el sistema

Respuesta:

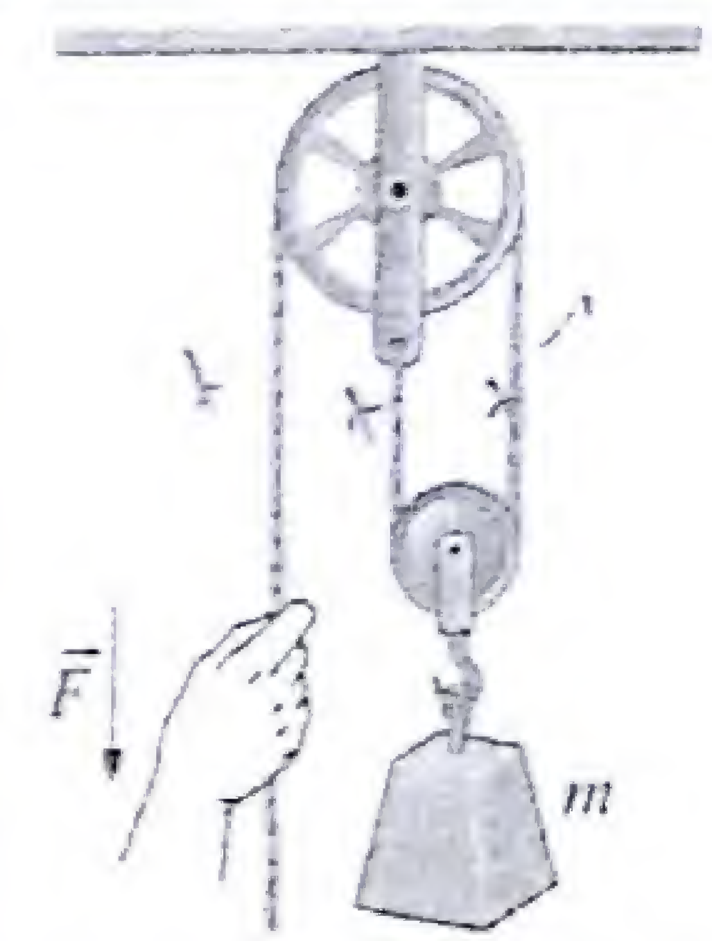
$$\boxed{F = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)(m_1 + m_2 + M)g}$$

PR 1.28. *Dos poleas para elevar un objeto*

En la figura se muestra una combinación de dos poleas para elevar un objeto pesado de masa m. Las poleas son de masa despreciable y no ofrecen rozamiento.

a) Determine la magnitud de la fuerza aplicada F, requerido para elevar el objeto a velocidad constante.

b) Halle la tensión en cada cuerda.



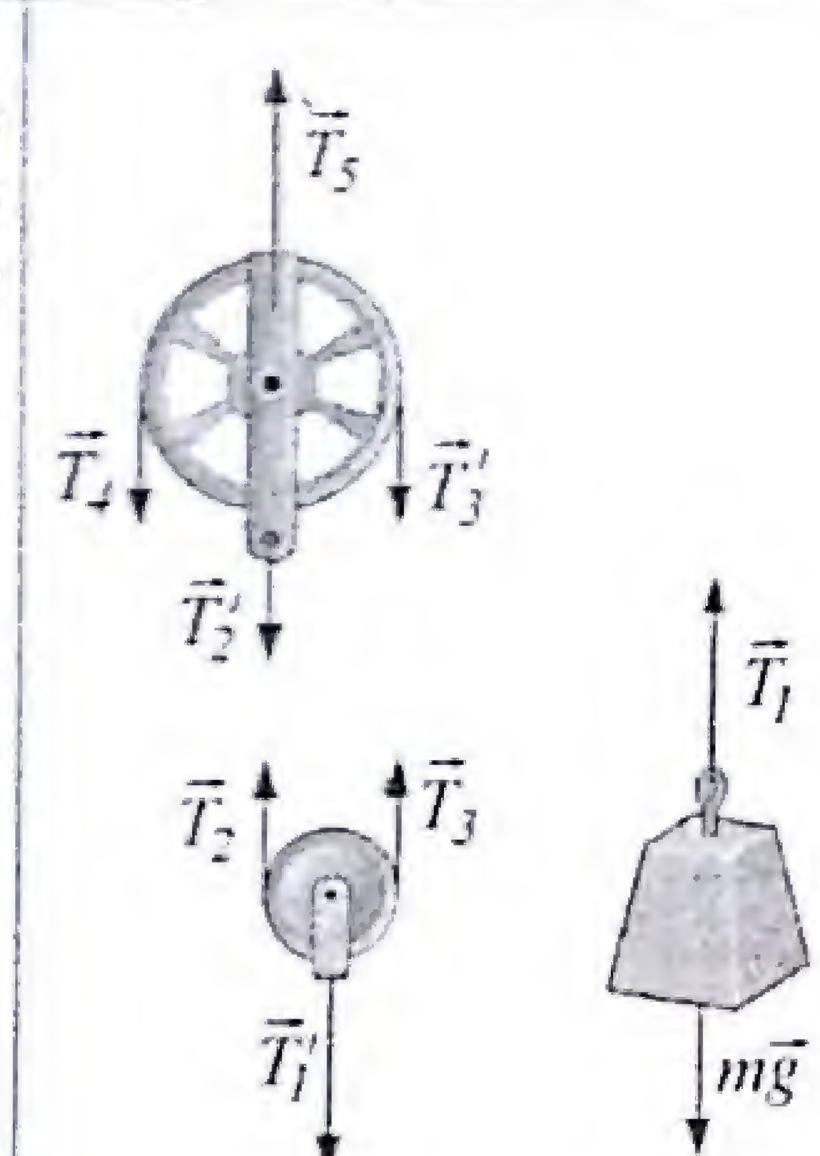
Solución: En la figura se muestran los diagramas de cuerpo libre de la pesa y de cada polea. La aceleración es cero, por lo tanto, aplicando la segunda ley de Newton a la pesa tenemos:

Pesa: $$\sum F_y = T_1 - mg = ma = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 = mg$$

En este caso idealizado en que no hay fricción, la tensión es trasmitida a lo largo de la cuerda y es la misma a ambos lados de cada una de las poleas:

$$T_2 = T_3 = T_4$$

a) Aplicando la segunda ley de Newton a la polea móvil, obtenemos:



$$\sum F_y = T_2 + T_3 - T_1 = Ma = 0 \quad \Rightarrow \quad 2T_2 = T_1$$

$$T_2 = T_3 = T_4 = \frac{1}{2}T_1 = \frac{1}{2}mg,$$

$$F = T_4 = \frac{1}{2}mg$$

b) Aplicando la segunda ley de Newton a la polea fija tenemos:

$$\sum F_y = T_5 - T_4 - T_3 - T_2 = M'a = 0$$

$$T_5 = T_2 + T_3 + T_4 = \frac{3}{2}mg$$

Respuesta:

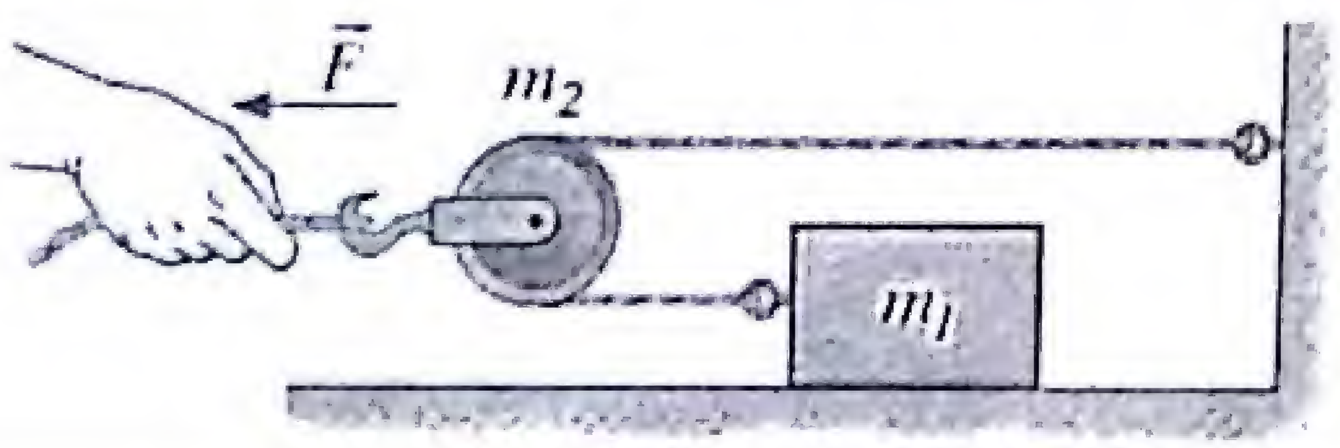
a) $F = \frac{1}{2}mg$

b) $T_2 = T_3 = T_4 = \frac{1}{2}mg$

$T_1 = mg, \quad T_5 = \frac{3}{2}mg$

PR 1.29. *El bloque se acelera el doble que la polea*

Un bloque de masa m_1 está sobre una superficie horizontal lisa, acoplado mediante una cuerda a una polea sin rozamiento de masa m_2.

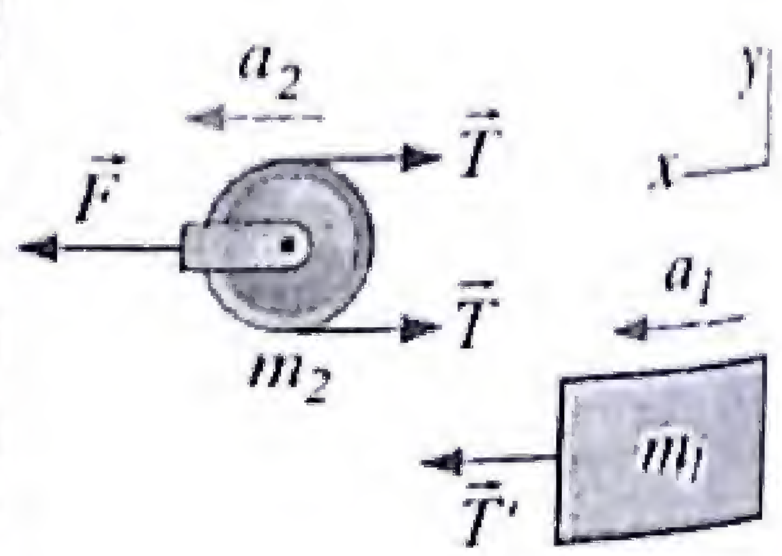


Si se aplica una fuerza horizontal a la polea hacia la izquierda, halle:

a) La tensión de la cuerda.

b) La aceleración de la polea y del bloque.

Solución: a) Como la polea no presenta fricción, la tensión de la cuerda a cada lado tiene igual magnitud, T. Dibujamos los diagramas de cuerpo libre de la polea y del bloque por separado y aplicamos la segunda ley de Newton:

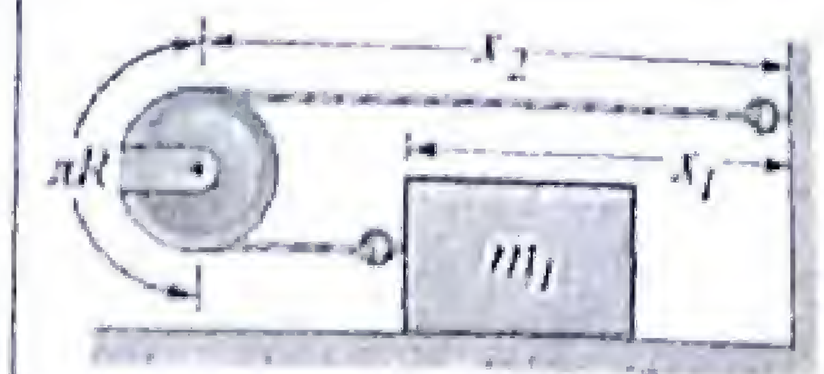


Bloque: $\sum F_x = T = m_1 a_1$ (1)

Polea: $\sum F_x = F - 2T = m_2 a_2$ (2)

La aceleración del bloque resulta el doble que la de la polea ($a_1 = 2a_2$), ya que por cada pedazo de cuerda de

longitud x que se desliza alrededor de la polea, esta viaja solo la mitad, mientras que el bloque viaja la distancia x. Esta relación entre las dos aceleraciones también puede ser deducida a partir de la condición de vínculo geométrico, de que la longitud L de la cuerda es una constante.



$$x_2 + \pi R + (x_2 - x_1) = L \quad \Rightarrow$$

$$2x_2 - x_1 = L - \pi R = constante$$

Tomando diferenciales:

$$2dx_2 - dx_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2a_2 = a_1$$

Sustituyendo $a_1 = 2a_2$ en la ecuación (1) y combinándola con la ecuación (2) para eliminar a_2, se obtiene la tensión T de la cuerda:

$$T = \left(\frac{2m_1}{4m_1 + m_2}\right)F$$

Sustituyendo T, encontramos las aceleraciones respectivas de la polea y del bloque:

$$a_2 = \frac{F}{4m_1 + m_2}, \qquad a_1 = \frac{2F}{4m_1 + m_2}$$

Respuesta:

a) $T = \left(\frac{2m_1}{4m_1 + m_2}\right)F$

b) $a_1 = 2a_2 = \frac{2F}{4m_1 + m_2}$

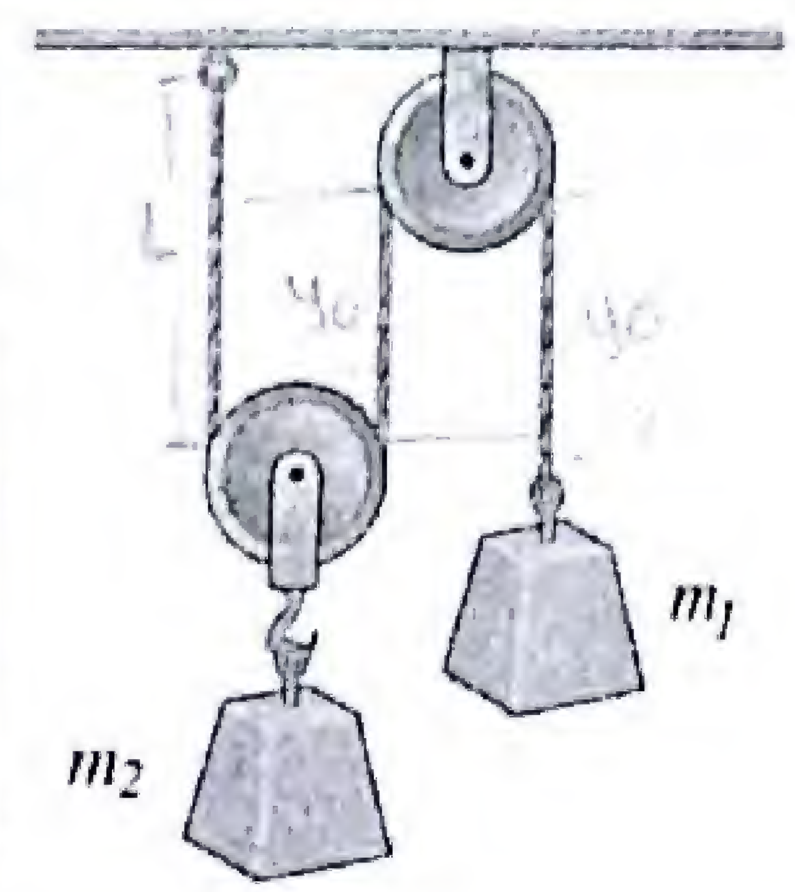
PR 1.30. *Máquina de Atwood con doble polea*

Dos pesas de masas m_1 y m_2 respectivamente, están conectadas mediante cuerdas ligeras que pasan sobre poleas de masa despreciable y sin rozamiento.

a) Determine las aceleraciones de las pesas.

b) Determine la tensión de la cuerda.

c) ¿En que sentido ocurre el movimiento?



Solución: a) Si tomamos los sentidos indicados para las aceleraciones y aplicamos la segunda ley de Newton a cada pesa, se obtiene:

Pesa m_1: $\sum F_y = m_1 g - T = m_1 a_1$ (1)

Pesa m_2: $$\sum F_y = 2T - m_2 g = m_2 a_2 \qquad (2)$$

Como la longitud de la cuerda es constante, cuando m_1 desciende en Δy_1, los segmentos de cuerda a ambos lados de la polea móvil se elevan en $\Delta y_2 = \Delta y_1 / 2$, por lo tanto las velocidades y las aceleraciones de las pesas guardan esta misma relación: $a_2 = a_1 / 2$. Podemos escribir las dos primeras ecuaciones:

$$m_1 g - T = m_1 a_1$$

$$2T - m_2 g = m_2 \frac{a_1}{2}$$

Eliminando T de este par de ecuaciones, obtenemos a_1:

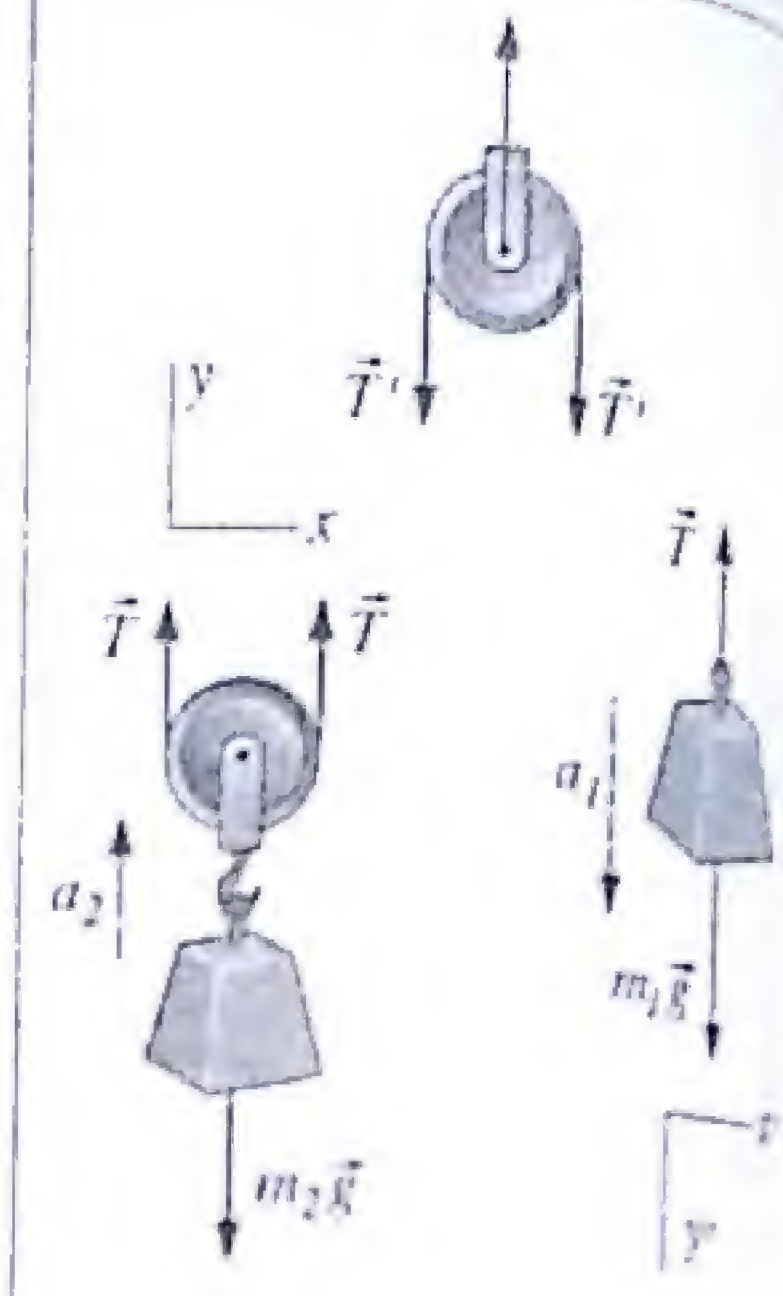
$$a_1 = 2\left(\frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2}\right)g \quad \text{y} \quad a_2 = \frac{a_1}{2} = \left(\frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2}\right)g$$

b) Usando estas expresiones de las aceleraciones, hallamos finalmente la tensión de la cuerda:

$$T = \left(\frac{3m_1 m_2}{4m_1 + m_2}\right)g$$

c) Se pueden presentar tres situaciones del movimiento:

1) Si $2m_1 > m_2$, entonces m_1 baja y m_2 sube.
2) Si $2m_1 = m_2$, $a_1 = a_2 = 0$ (sistema queda en equilibrio)
3) Si $2m_1 < m_2$, entonces m_1 sube y m_2 baja.



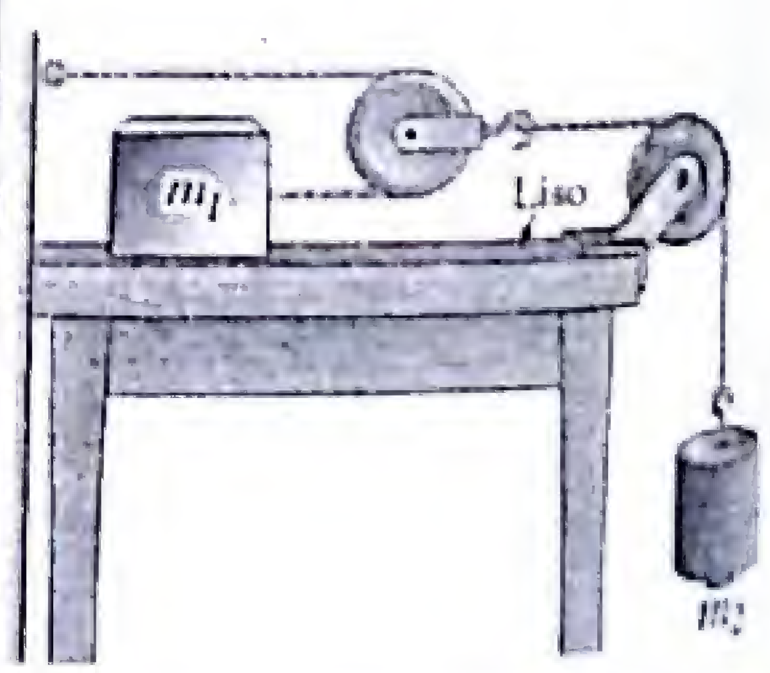
Respuesta:

a) $a_1 = 2\left(\frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2}\right)g$, $a_2 = \left(\frac{2m_1 - m_2}{4m_1 + m_2}\right)g$

b) $T = \left(\frac{3m_1 m_2}{4m_1 + m_2}\right)g$

PR 1.31. *Halle la aceleración del bloque y de la pesa*

Un bloque de masa m_1 y una pesa de masa m_2 están conectados mediante un par de poleas ideales. El bloque descansa sobre una mesa horizontal sin fricción; está atado a una cuerda que rodea la polea móvil y tiene su otro extremo fijo. La pesa está suspendida de la polea fija y luego se suelta.
a) ¿Cuáles son las aceleraciones de la pesa y del bloque?
b) ¿Cuáles son las tensiones en las cuerdas?



Solución: Cuando la pesa desciende una cierta distancia, desplaza a la polea móvil la misma distancia, ésta suelta

arriba y recoge abajo, trozos iguales de cuerda. Por lo tanto, en el mismo tiempo el bloque es arrastrado hacia la derecha una distancia doble y su aceleración será el doble que la de la polea móvil (y la pesa):

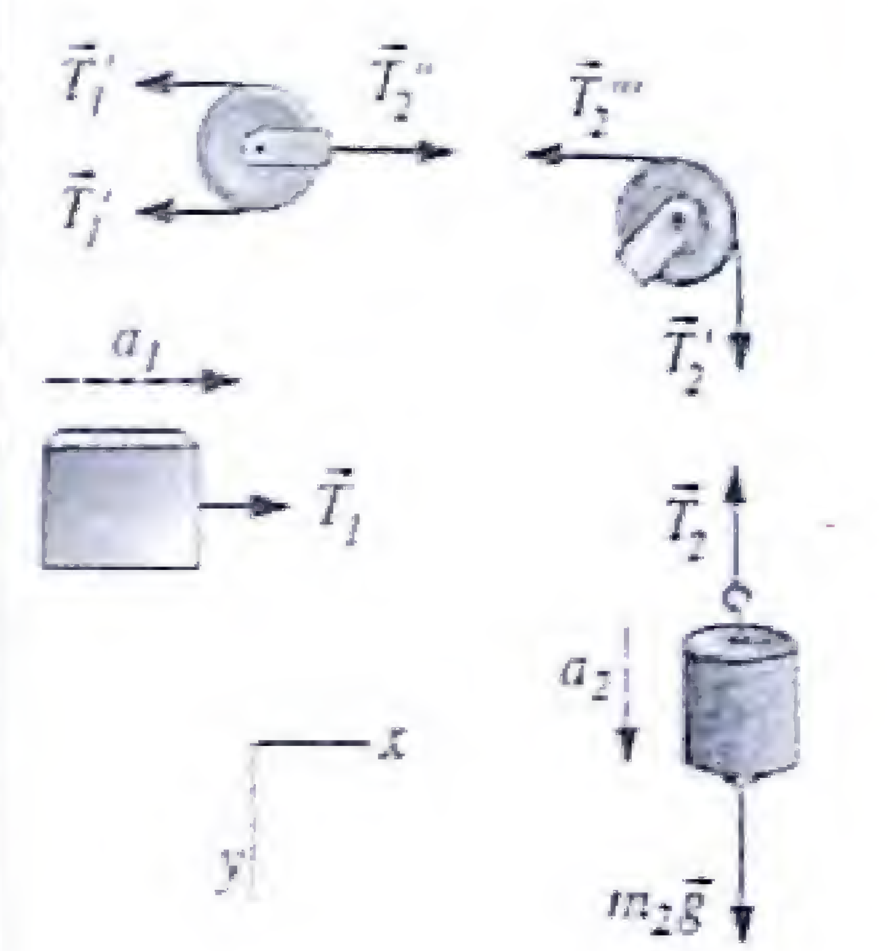
$$a_1 = 2a_2$$

Aplicando la segunda ley de Newton en componentes:

Pesa (↓): $$\sum F_y = m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \qquad (1)$$

Bloque (→): $$\sum F_x = T_1 = m_1 a_1 = 2m_1 a_2 \qquad (2)$$

Polea móvil ($m = 0$): $$\sum F_x = T_2 - 2T_1 = 0 \qquad (3)$$



a) De la ecuación (3) se obtiene: $T_2 = 2T_1$. Eliminando a_2 de las ecuaciones (1) y (2) se obtienen las tensiones:

$$m_2 g - 2T_1 = m_2 \frac{T_1}{2m_1} \quad \Rightarrow \quad T_1 = \left(\frac{2m_1 m_2}{4m_1 + m_2}\right)g$$

$$T_2 = 2T_1 = \left(\frac{4m_1 m_2}{4m_1 + m_2}\right)g$$

b) Sustituyendo los valores de T_1 y T_2 en las ecuaciones (1) y (2) se obtienen las aceleraciones:

$$a_1 = \left(\frac{2m_2}{4m_1 + m_2}\right)g \qquad a_2 = \left(\frac{m_2}{4m_1 + m_2}\right)g$$

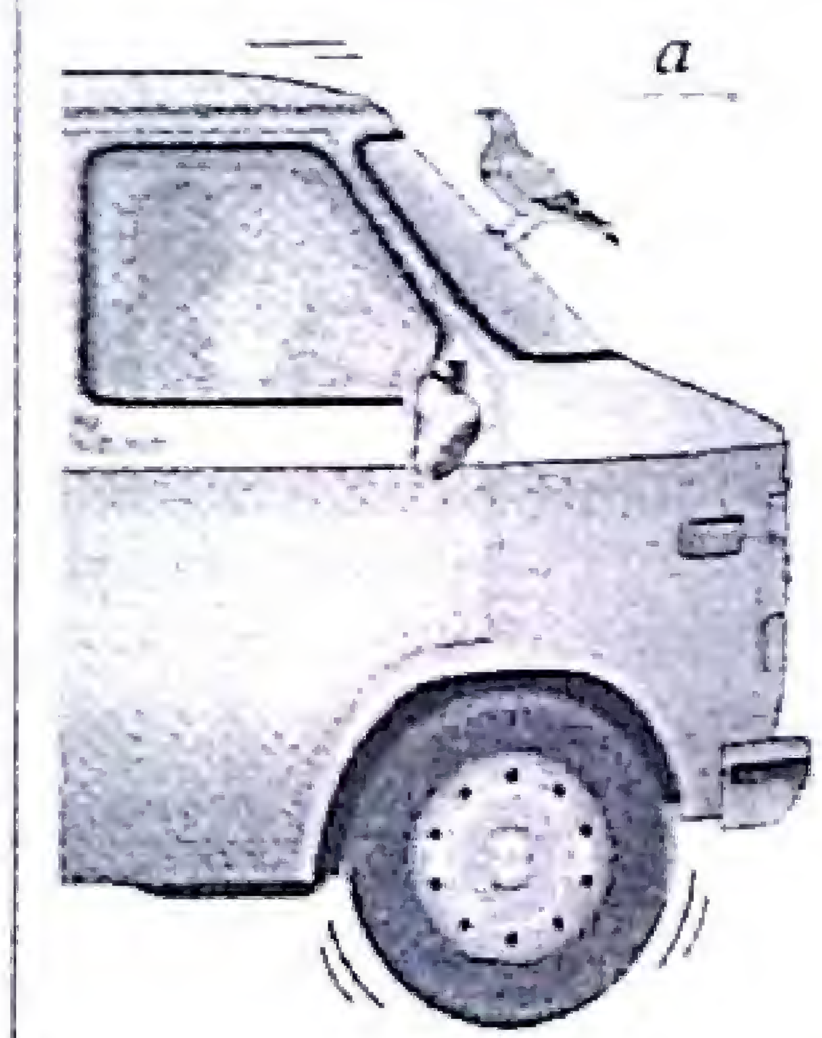
Respuesta:

$T_2 = 2T_1 = \left(\frac{4m_1 m_2}{4m_1 + m_2}\right)g$

$a_1 = 2a_2 = \left(\frac{2m_2}{4m_1 + m_2}\right)g$

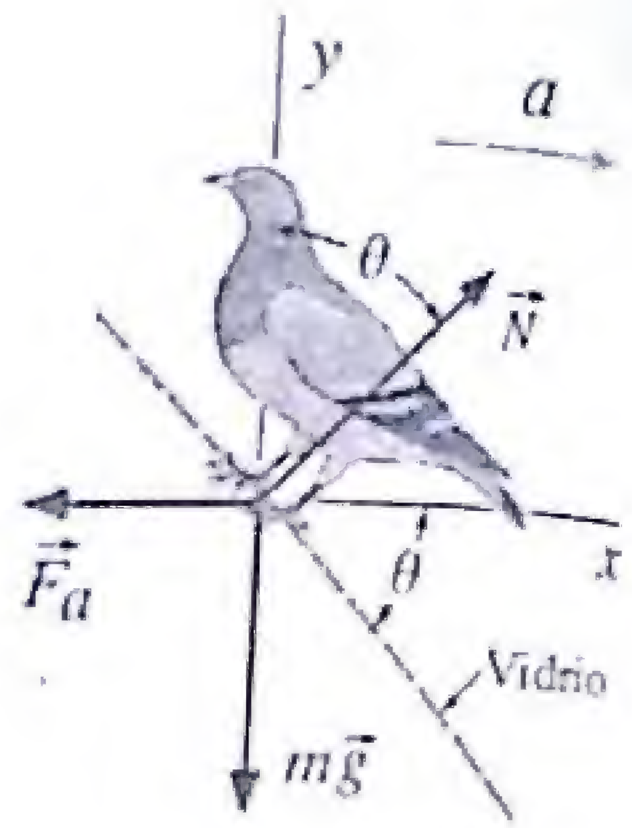
PR 1.32. *Para que el pájaro no resbale en el vidrio*

Sobre el vidrio parabrisas de un carro en marcha se posa un pajarito de masa m. El vidrio forma un ángulo θ con la horizontal. La fricción entre el vidrio y el pajarito es despreciable, pero se sabe que sobre el pajarito actúa la fuerza resistiva del aire que es horizontal y tiene una magnitud que es un tercio de su peso. El conductor trata de evitar que el pajarito resbale hacia abajo o que sea empujado hacia arriba del vidrio. ¿Cuál debe ser la aceleración del carro para que el pajarito se quede estacionario sobre el vidrio?



Solución: Escogemos un marco de referencia estacionario en el suelo. Como el pajarito no debe resbalar ni hacia arriba ni hacia abajo del vidrio, su aceleración relativa al vidrio debe ser cero, por lo tanto:

$$\vec{a}_p = \vec{a}_c = \vec{a}$$



El diagrama de cuerpo libre del pajarito está representado en la figura. Aplicándole la segunda ley de Newton:

$$\sum F_x = N sen\theta - F_a = ma \qquad (1)$$

$$\sum F_y = N\cos\theta - mg = 0 \qquad (2)$$

Siendo la fuerza del aire: $F_a = mg/3$. Eliminando la fuerza normal N de este par de ecuaciones, se obtiene la aceleración:

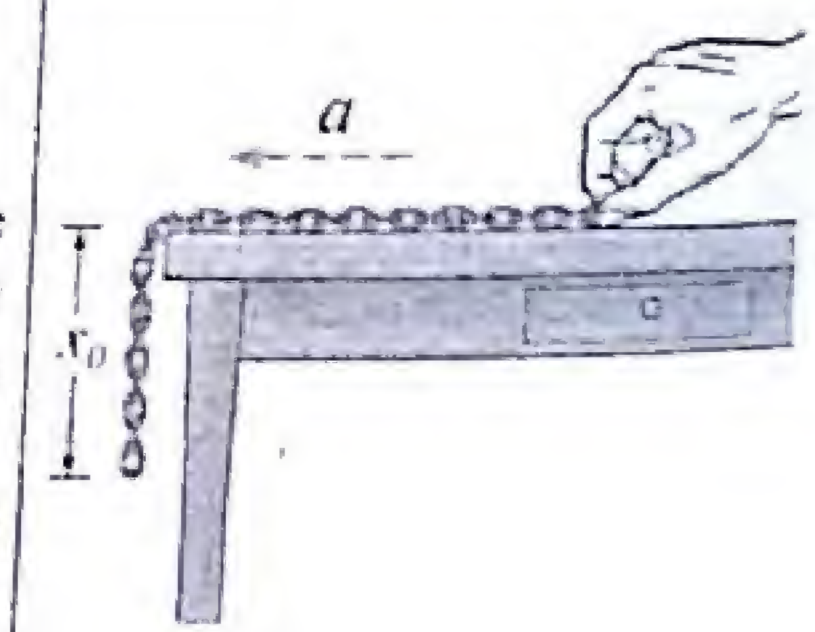
$$a = g(tg\theta - \frac{1}{3})$$

Respuesta:

$a = g(tg\theta - 1/3)$

Si la aceleración del carro es menor que este valor crítico, el pajarito deslizará hacia abajo del vidrio y si excede este valor, deslizará hacia arriba.

PR-1.33. ***Cadena deslizando sobre mesa resbalosa***



Una cadena flexible y uniforme de longitud L está sobre una mesa sin rozamiento. Inicialmente se suspende desde el borde de la mesa un segmento de cadena de longitud x_0 y luego se suelta:

a) Halle la aceleración de la cadena en función de la longitud suspendida, x.

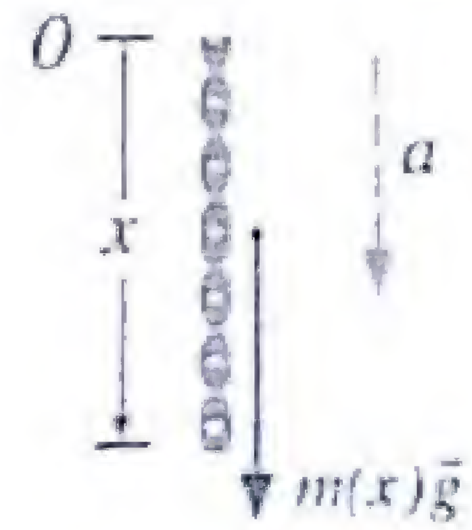
b) ¿Cuál será la velocidad de la cadena en el instante en que se desprende completamente del borde de la mesa?

Solución: a) Si M es la masa total de la cadena y L su longitud, la fuerza que la arrastra es debida solamente al peso de su parte suspendida:

$$F(x) = m(x)g = \frac{x}{L}Mg$$

Aplicando la segunda ley de Newton a la cadena completa, se obtiene la aceleración:

$$a(x) = \frac{F(x)}{M} = \frac{(x/L)Mg}{M} = \frac{x}{L}g$$



b) Por la regla de derivación en cadena, se obtiene:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}v = \frac{x}{L}g$$

Si separamos las variables v y x, e integramos:

$$vdv = \frac{g}{L}xdx \qquad \Rightarrow \qquad \int_0^v vdv = \frac{g}{L}\int_{x_0}^{L} xdx$$

Por lo tanto, la velocidad de la cadena en el instante en que se desprende completamente del borde de la mesa es:

$$\frac{v^2}{2} = \frac{g}{L}(\frac{L^2}{2} - \frac{x_0^2}{2}) \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{g}{L}(L^2 - x_0^2)}$$

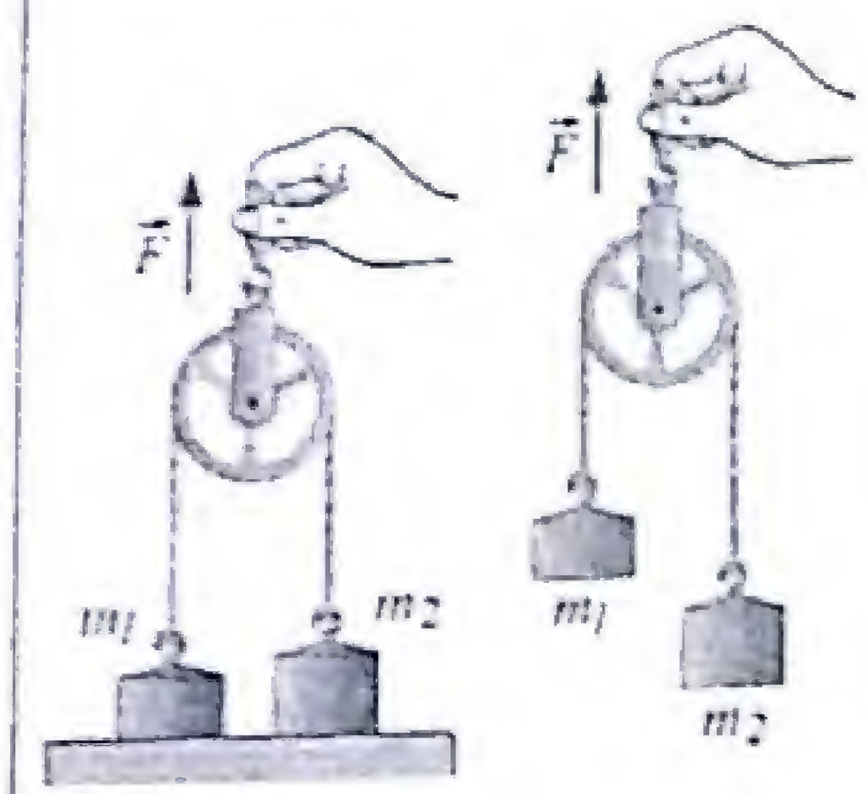
Respuesta:

a) $a = (x/L)g$

b) $v = \sqrt{\frac{g}{L}(L^2 - x_0^2)}$

PR-1.34. ***Levantando la máquina de Atwood***

Dos pesas de masas m_1 y m_2, respectivamente están conectadas por una cuerda ligera que pasa sobre una polea ideal. Inicialmente, las pesas están en reposo sobre una superficie horizontal y, a continuación se aplica al eje de la polea, una fuerza $\vec{F}$ hacia arriba. Si $m_2 > m_1$ y el valor de $\vec{F}$ se va incrementando, determine las aceleraciones de las pesas respecto al suelo, en los casos siguientes:



a) $F < 2m_1g$, b) $2m_1g < F < 2m_2g$, c) $F > 2m_2g$

d) ¿Cuál es la aceleración de la polea?

Solución: Como la polea no tiene masa, la fuerza aplicada es dos veces la tensión de la cuerda:

$$F = 2T \qquad \Rightarrow \qquad T = F/2$$

Si aplicamos la segunda ley en el marco inercial del suelo a cada pesa por separado, se obtiene:

$$\text{Pesa } m_1: \quad \sum F_y = T - m_1g = m_1a_1 \qquad (1)$$

$$\text{Pesa } m_2: \quad \sum F_y = T - m_2g = m_2a_2 \qquad (2)$$

a) Si $F < 2m_1g$, entonces $T < m_1g < m_2g$. Según las ecuaciones (1) y (2), esto implica que ninguna de las pesas tendrán aceleración, permaneciendo ambas en reposo sobre la mesa.

b) Si $2m_1g < F < 2m_2g$, entonces $m_1g < T < m_2g$. Según la ecuación (1) la pesa m_2 permanece en reposo sobre la mesa, mientras que según la ecuación (2), la pesa m_1 se moverá hacia arriba con una aceleración:

$$a_1 = \frac{T - m_1g}{m_1} = \frac{F}{2m_1} - g$$

c) Si $F > 2m_2g$, entonces $T > m_1g > m_2g$. Ambas pesas (y la polea) se aceleran hacia arriba:

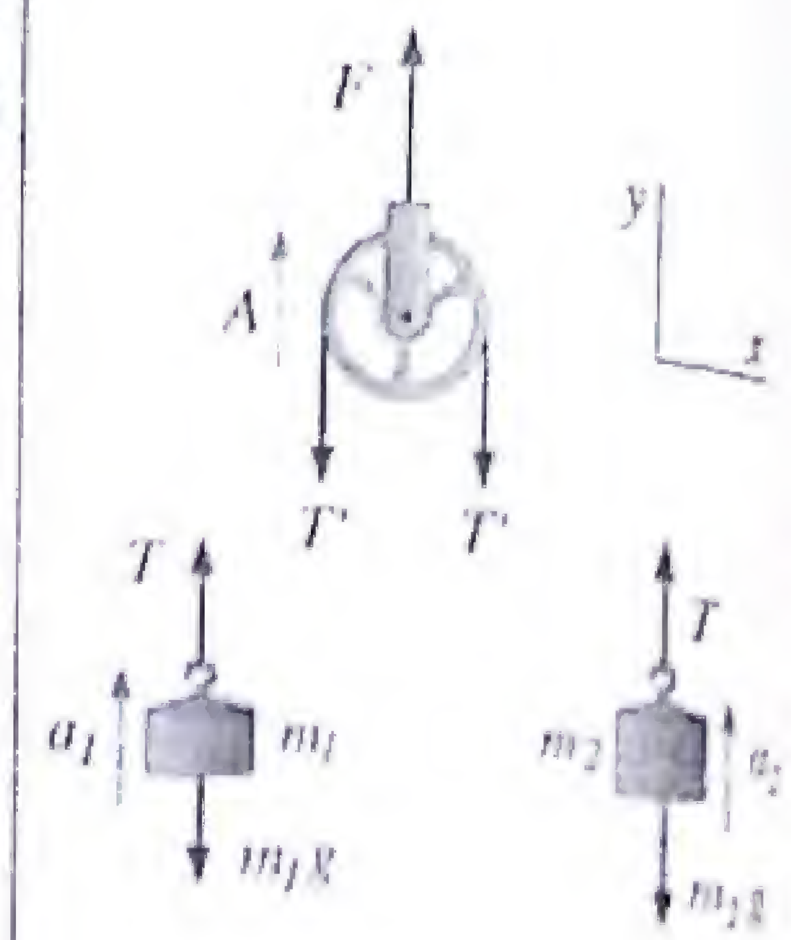
$$a_1 = \frac{T - m_1g}{m_1} = \frac{F}{2m_1} - g \qquad a_2 = \frac{T - m_2g}{m_2} = \frac{F}{2m_2} - g$$

d) La aceleración de una pesa respecto al suelo es igual a su aceleración respecto a la polea más la aceleración, A, de la polea respecto al suelo.

$$a_1 = a_{1P} + A, \qquad a_2 = a_{2P} + A$$

Además, como la longitud de la cuerda es constante, se cumple la relación de vínculo: $a_{2P} = -a_{1P}$. Sumando las dos ecuaciones anteriores, se obtiene la aceleración A de la polea hacia arriba:

$$a_1 + a_2 = 2A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{F}{4}\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} - g$$

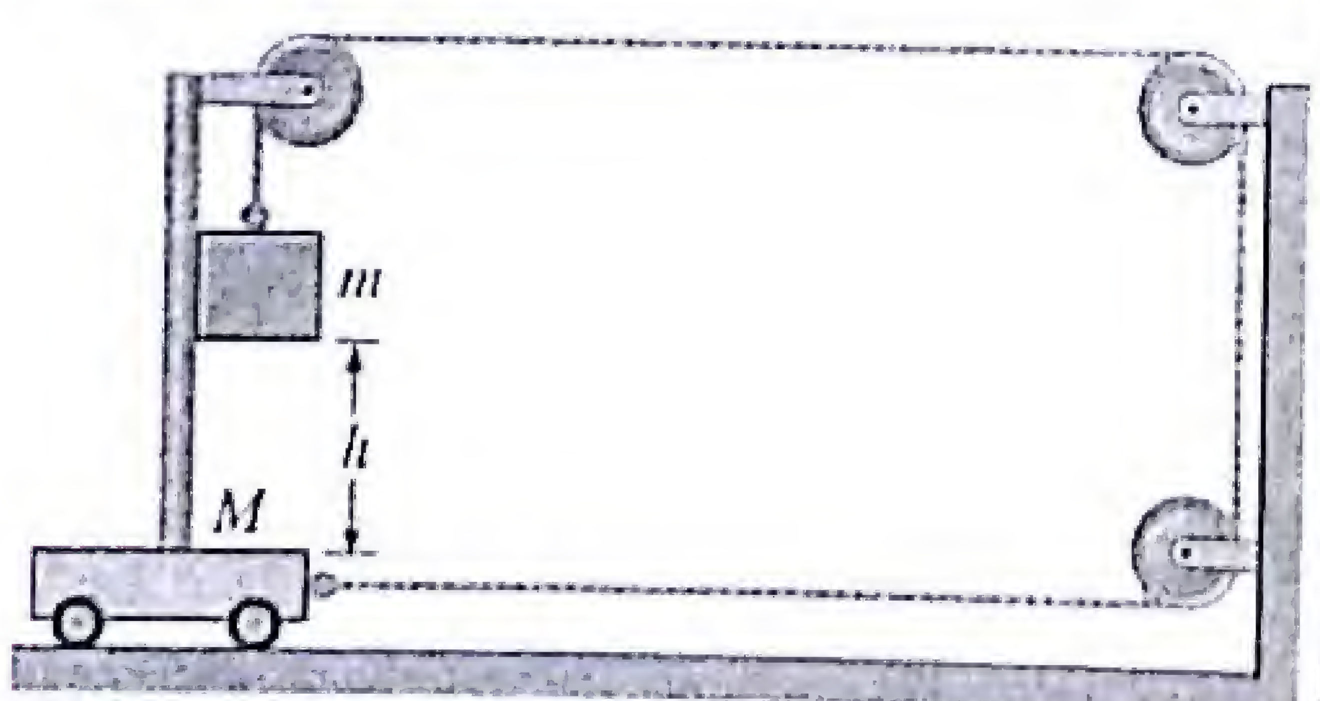


Respuesta:

a) $a_1 = a_2 = 0$ (ninguna de las pesas se mueve)
b) $a_1 = \dfrac{F}{2m_1} - g$, $a_2 = 0$.
c) $a_1 = \dfrac{F}{2m_1} - g$, $a_2 = \dfrac{F}{2m_2} - g$
d) $A = \dfrac{F}{4}\dfrac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} - g$

PR 1.35. *¿Qué sucede cuando se desprende el bloque?*

Un bloque de masa m = 1 kg está suspendido en un carrito de masa M = 11 kg, mediante el siguiente sistema de poleas.



Las poleas y los hilos son ideales y se desprecian todas las fuerzas de rozamiento. El bloque m se suelta desde una altura h = 4,9 m por encima de la base del carrito.

a) ¿Al cabo de cuánto tiempo golpeará el bloque a la base del carrito?

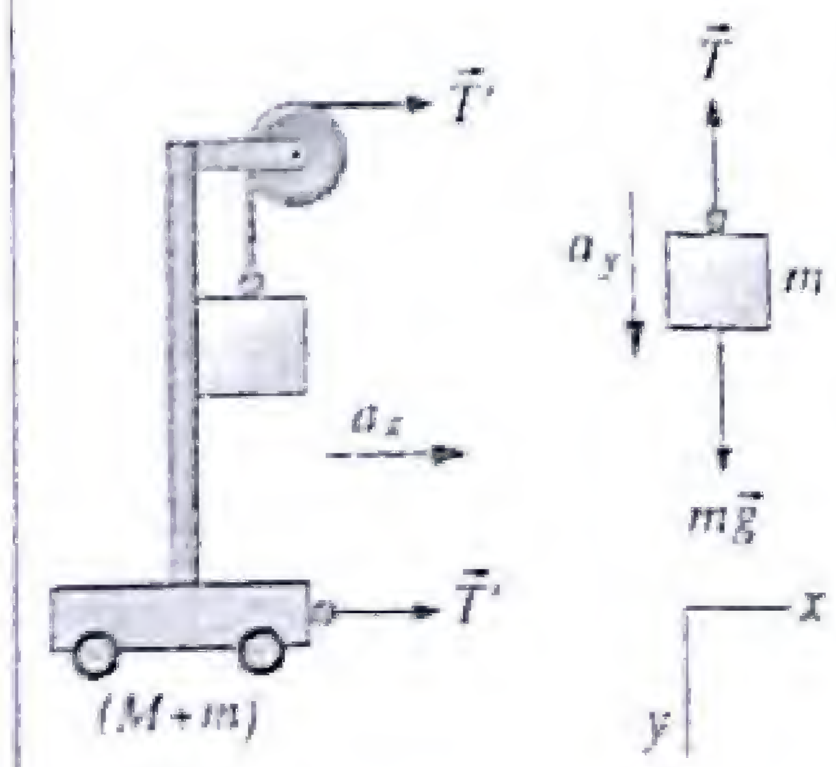
b) ¿En ese tiempo, cuál habrá sido el desplazamiento del carrito?

* III Olimpiada Iberoamericana de Física-Mérida, Venezuela 1998.

Solución: a) Aplicando por separado la segunda ley de Newton al bloque y al sistema (bloque + carrito):

$$\text{Bloque:} \qquad \sum F_y = mg - T = ma_y \qquad (1)$$

$$\text{Bloque + carrito:} \qquad \sum F_x = 2T = (M + m)a_x \qquad (2)$$



Como la longitud del hilo es constante, cuando el bloque desciende, el aumento Δy del tramo de hilo vertical corresponde a una disminución $\Delta x = \Delta y/2$ en cada tramo horizontal y por lo tanto: $a_y = 2a_x$.

Si eliminamos la tensión del par de ecuaciones anteriores, se obtiene:

$$mg - (\frac{M + m}{2})(\frac{a_y}{2}) = ma_y$$

$$a_y = \frac{4mg}{M + 5m} = \frac{4(1\text{kg})g}{11\text{kg} + 5(1\text{kg})} = \frac{g}{4}$$

El movimiento es con aceleración constante, de modo que el tiempo de caída del bloque es:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a_y}} = \sqrt{\frac{8h}{g}} = \sqrt{\frac{8(4{,}9\text{m})}{9{,}8\text{m/s}^2}} = 2\text{s}$$

b) La aceleración horizontal del carrito es $a_x = a_y/2 = g/8$ y el desplazamiento correspondiente:

$$d = \frac{1}{2}a_x t^2 = \frac{1}{2}(\frac{g}{8})(\frac{8h}{g}) = \frac{h}{2} = 2{,}45\text{m}$$

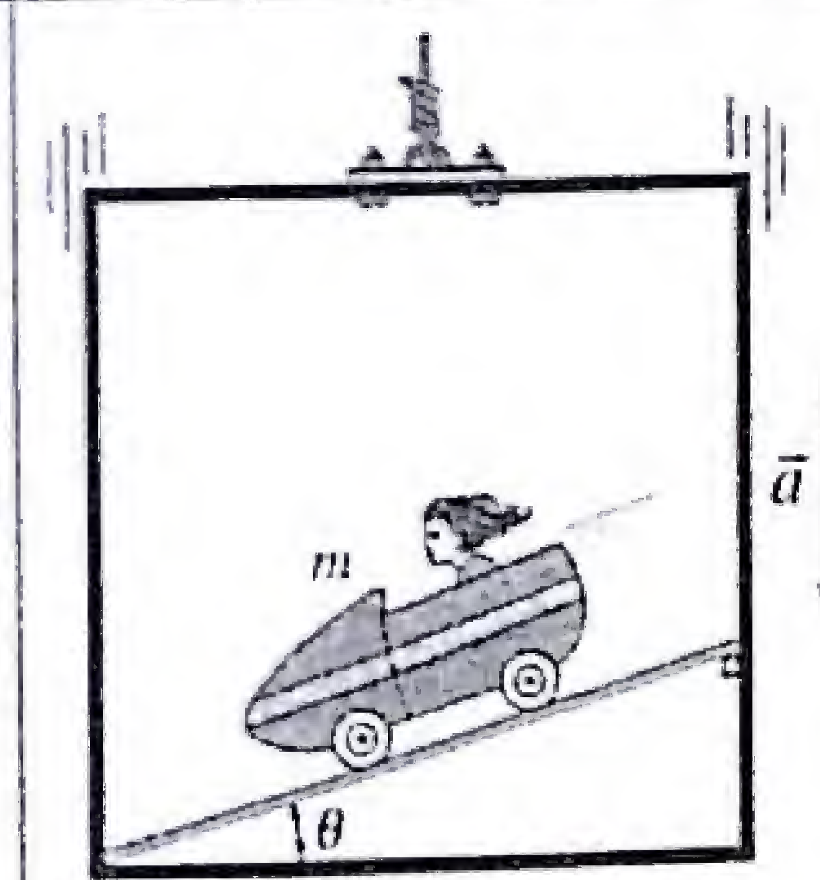
Respuesta:

a) $t = 2s$
b) $d = 2{,}45$m

PR 1.36. *Plano inclinado dentro de un ascensor*

Dentro de la cabina de un ascensor, un carrito de masa m y con ruedas de masa despreciable y sin rozamiento, desciende por un plano inclinado que forma un ángulo θ con el piso del ascensor. Determine la aceleración del carrito respecto al ascensor en los siguientes tres casos:

a) El ascensor desciende con velocidad constante.
b) El ascensor desciende con aceleración $\vec{a}$.
c) El ascensor desciende con desaceleración - $\vec{a}$.



Solución: Si el ascensor está acelerado no es un marco de referencia inercial, por lo tanto, para aplicar las leyes de Newton es necesario escoger en marco de referencia fijo en Tierra. La aceleración $\vec{a}_{c/T}$ del carrito respecto al marco inercial en Tierra será igual a su aceleración respecto al ascensor, $\vec{a}_{c/A}$, mas la del ascensor respecto a Tierra, $\vec{a}$:

$$\vec{a}_{c/T} = \vec{a}_{c/A} + \vec{a}$$

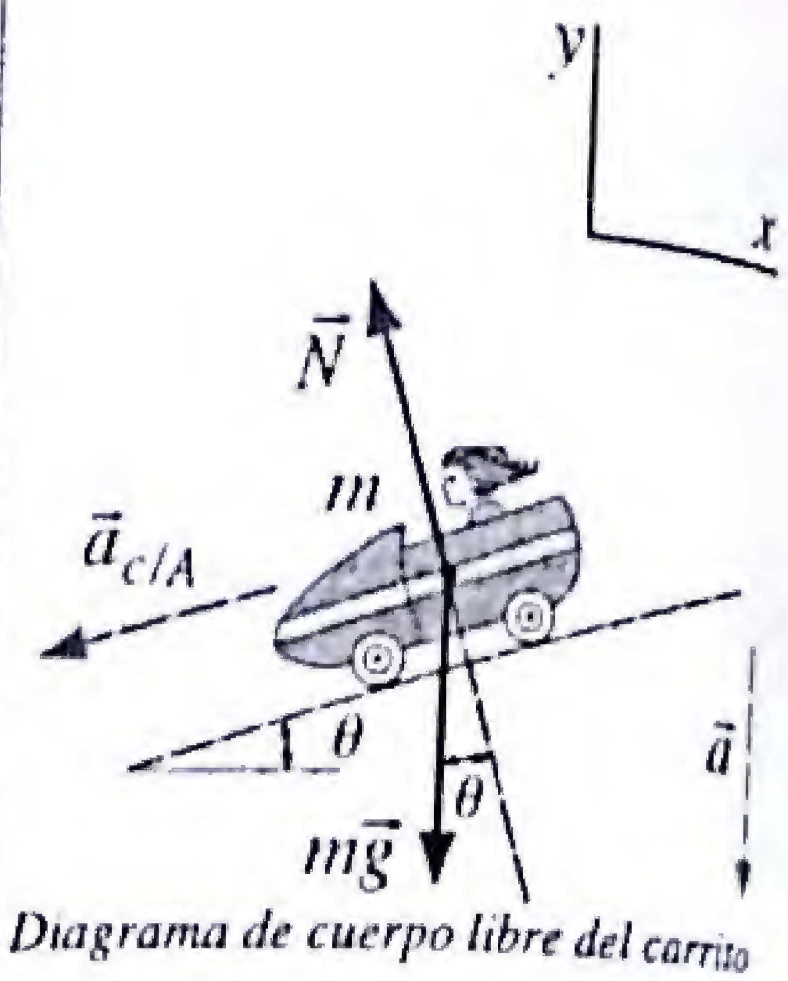


Diagrama de cuerpo libre del carrito

La aceleración $\vec{a}_{c/A}$ queda paralela al plano inclinado, y su expresión en componentes x-y es:

$$\vec{a}_{c/A} = -a_{c/A}\cos\theta\hat{x} - a_{c/A}sen\theta\hat{y}$$

Si la aceleración del ascensor es hacia abajo: $\vec{a} = -a\hat{y}$, entonces:

$$\vec{a}_{c/T} = -a_{c/A}\cos\theta\hat{x} - (a + a_{c/A}sen\theta)\hat{y}.$$

Aplicamos ahora la segunda ley de Newton según un observador inercial en Tierra:

$$\sum F_y = N\cos\theta - mg = -m(a + a_{c/A}sen\theta) \qquad (1)$$

$$\sum F_x = -Nsen\theta = -ma_{c/A}\cos\theta \qquad (2)$$

Eliminando la fuerza normal N de este par de ecuaciones, obtenemos la aceleración del carrito con respecto al ascensor:

$$a_{c/A} = (g - a)sen\theta$$

a) Si la velocidad del ascensor es constante $a = 0$, entonces:

$$a_{c/A} = gsen\theta.$$

b) Si el ascensor desciende con aceleración $\vec{a}$, entonces:

$$a_{c/A} = (g - a)sen\theta$$

c) Si el ascensor desciende con aceleración $-\vec{a}$, entonces:

$$a_{c/A} = (g + a)sen\theta$$

Respuesta:

a) $a_{c/A} = gsen\theta$
b) $a_{c/A} = (g - a)sen\theta$
c) $a_{c/A} = (g + a)sen\theta$

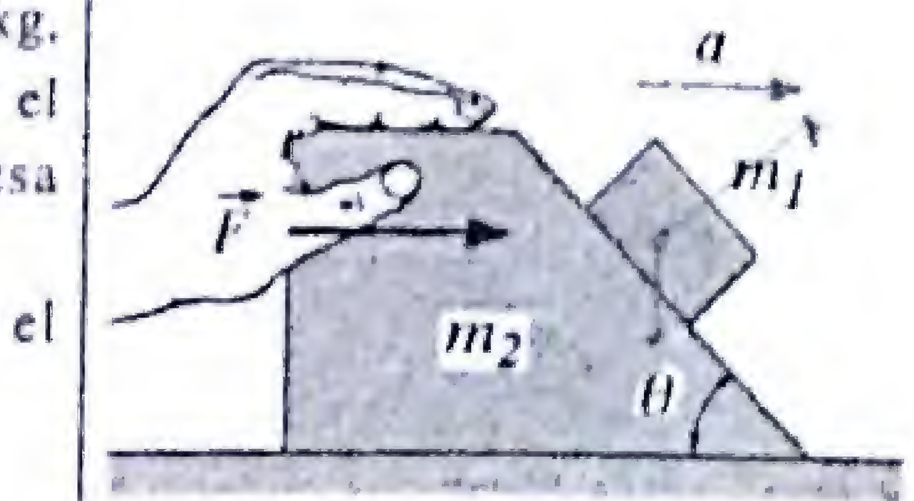
PR-1.37. *El bloque m_1 debe quedar inmóvil en la cuña*

Un bloque de masa m_1 = 1 kg está sobre la superficie inclinada a un ángulo θ = 36,9°, de otro bloque m_2 = 2 kg, que tiene forma de cuña. No existe rozamiento entre el bloques y la cuña ni tampoco entre la cuña y la mesa horizontal.

a) ¿Cuál debe ser la aceleración del sistema para que el bloque m_1 no resbale sobre la cuña m_2?

b) Halle la fuerza que ejerce la cuña sobre m_1.

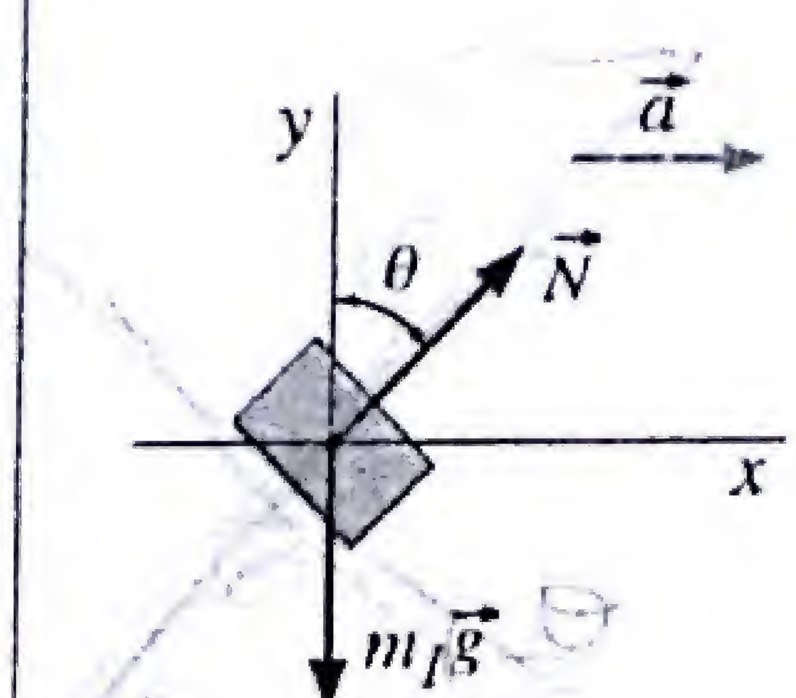
c) ¿Qué fuerza horizontal, F, deberá ser aplicada para lograr esta situación?



Solución: a) Si escogemos un sistema con ejes horizontal y vertical y aplicamos la segunda ley de Newton al bloque de masa m_1, se obtiene:

$$\sum F_x = Nsen\theta = m_1 a$$

$$\sum F_y = N\cos\theta - m_1 g = 0$$



Siendo $\vec{N}$ la fuerza (normal) aplicada por la cuña m_2. Combinando estas dos ecuaciones encontramos:

$$\frac{Nsen\theta}{N\cos\theta} = \frac{m_1 a}{m_1 g} \Rightarrow a = gtg\theta = (9{,}8\text{m/s}^2)\text{tg}36{,}9° = 7{,}36\text{m/s}^2$$

b) De la segunda ecuación se obtiene la fuerza normal aplicada por la cuña sobre el bloque.

$$N = \frac{m_1 g}{\cos\theta} = \frac{(1\text{kg})(9{,}8\text{m/s}^2)}{\cos 36{,}9°} = 12{,}3\text{N}$$

c) Aplicando la segunda ley de Newton al sistema cuña + bloque, se obtiene el valor de la fuerza horizontal, F, que se debe aplicar a la cuña:

$$\sum F_x = F = (m_1 + m_2)a$$

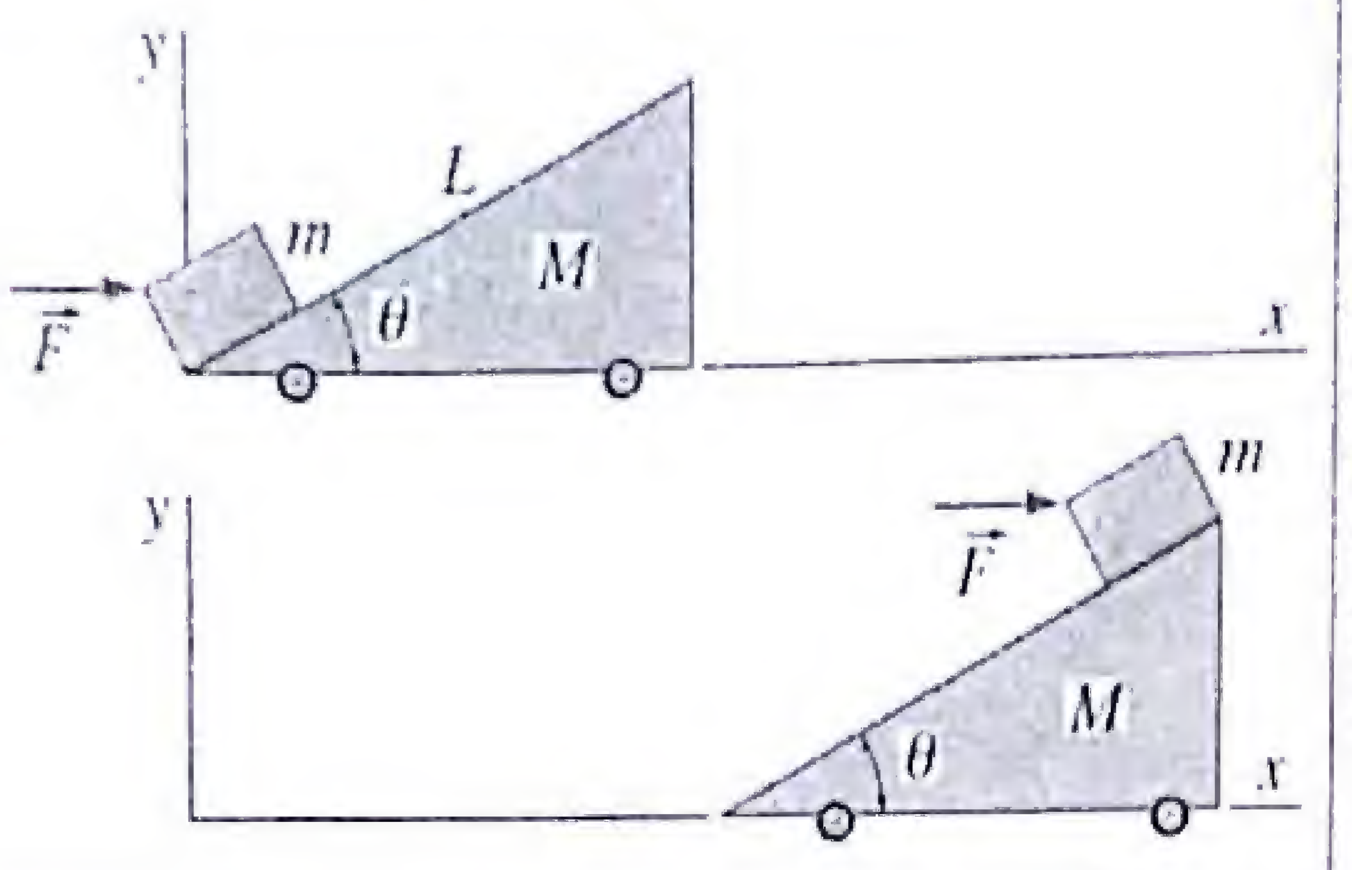
$$F = (m_1 + m_2)a = (1\text{kg} + 3\text{kg})7{,}36\text{m/s}^2 = 22{,}1\text{N}$$

Respuesta:

a) $a = 7{,}36\text{m/s}^2$
b) $N = 12{,}3\text{N}$
c) $F = 22{,}1\text{N}$

PR-1.38. *Empujando un bloque por una cuña resbalosa*

Un bloque de masa m se encuentra inicialmente al pie de una cuña de masa M y ángulo de inclinación θ.



A continuación, se le aplica al bloque una fuerza horizontal F y este desliza sin fricción cuesta arriba por el plano inclinado. A su vez la cuña desliza sin fricción sobre una superficie horizontal.

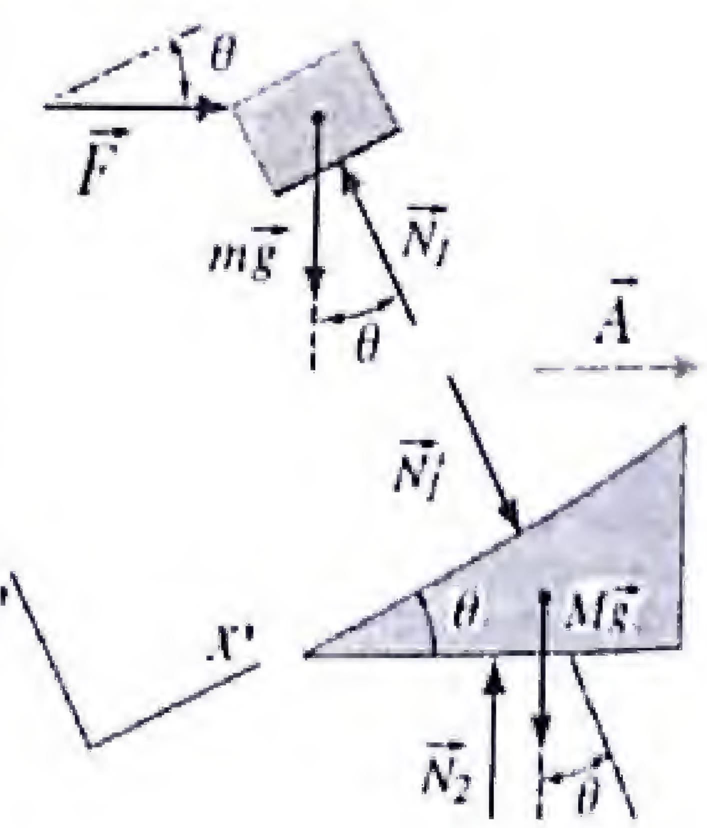
a) Determine la aceleración A de la cuña y la aceleración a del bloque con relación a la cuña.

b) ¿Al cabo de cuánto tiempo, el bloque alcanzará la parte superior de la cuña?

Solución: a) Llamemos $\vec{A}$ la aceleración (horizontal) de la cuña con respecto al suelo. Según un observador fijo en la cuña, el bloque sube con una aceleración $\vec{a}$ que es paralela al plano inclinado. Tomemos ejes respectivos x' paralelo e y' perpendicular al plano inclinado. La aceleración del bloque con respecto al suelo será igual a la aceleración del bloque con respecto a la cuña, mas la aceleración $\vec{A}$ de la cuña con respecto al suelo. En componentes cartesianas escribimos:

$$a_{x'} = a + A\cos\theta \qquad (1)$$

$$a_{y'} = -A\,sen\theta \qquad (2)$$



Aplicando la segunda ley de Newton en el marco de referencia (inercial) fijo en el suelo, se obtiene:

Cuña: $$\sum F_x = N_1 sen\theta = MA \qquad (3)$$

Bloque: $$\sum F_{x'} = F\cos\theta - mg\,sen\theta = m(a + A\cos\theta) \qquad (4)$$

$$\sum F_{y'} = -F sen\theta + N_1 - mg\cos\theta = -mA\,sen\theta \qquad (5)$$

Si despejamos N_1 de la ecuación (3) y lo sustituimos en la (5) se obtiene:

$$-F sen\theta + \frac{MA}{sen\theta} - mg\cos\theta = -mA\,sen\theta$$

Por lo tanto, la aceleración de la cuña respecto al suelo es:

$$A = \frac{(F sen\theta + mg\cos\theta)sen\theta}{m\,sen^2\theta + M} \qquad (6)$$

Sustituyendo la ecuación (6) en la (4), encontramos la aceleración a del bloque respecto a la cuña:

$$a = \frac{F}{m}\cos\theta - g\,sen\theta - \frac{(F sen\theta + mg\cos\theta)sen\theta}{m\,sen^2\theta + M}\cos\theta$$

$$a = \frac{(F/m)\cos\theta - g\,sen\theta(1 + m/M)}{(m/M)sen^2\theta + 1}$$

b) El movimiento del bloque con respecto a la cuña ocurre con aceleración constante y el tiempo que tarda en recorrer la distancia L en el plano inclinado es:

$$t = \sqrt{\frac{2L}{a}} = \sqrt{\frac{2L((m/M)sen^2\theta + 1)}{(F/m)\cos\theta - g\,sen\theta(1 + m/M)}}$$

Respuesta:

a) $A = \dfrac{(F sen\theta + mg\cos\theta)sen\theta}{m\,sen^2\theta + M}$

$a = \dfrac{(F/m)\cos\theta - g\,sen\theta(1 + m/M)}{(m/M)sen^2\theta + 1}$

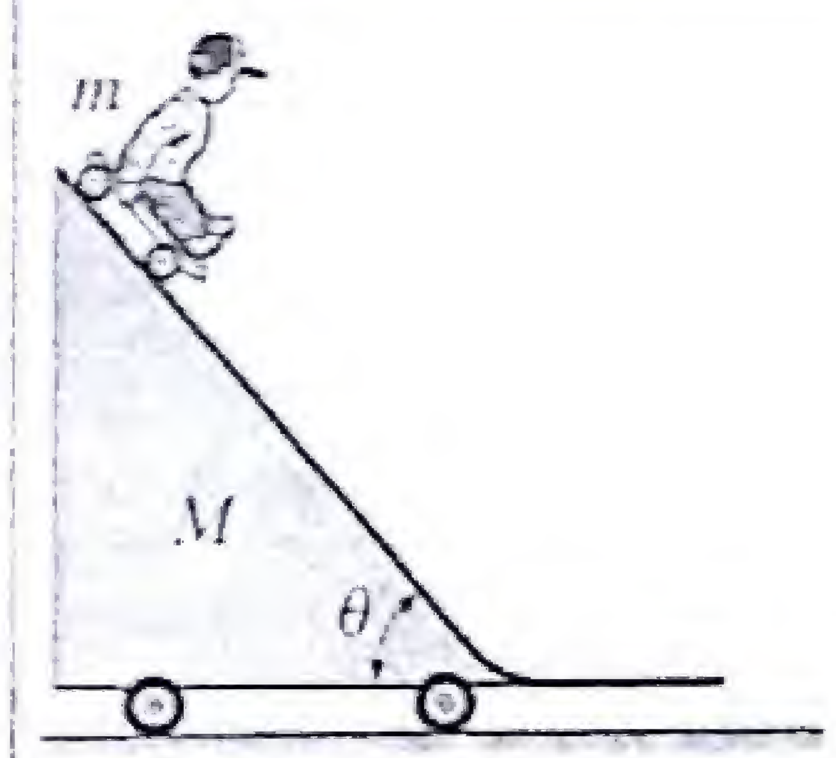
$t = \sqrt{\dfrac{2L((m/M)sen^2\theta + 1)}{(F/m)\cos\theta - g\,sen\theta(1 + m/M)}}$

PR 1.39. *Patinando sobre una cuña móvil*

Un muchacho se deja deslizar en una patineta desde lo alto de una bloque en forma de cuña de ángulo de inclinación θ. La cuña a su vez puede deslizar sobre una superficie horizontal sin fricción. La masa del muchacho incluida la patineta es m y la de la cuña es M.

a) ¿Cuáles son la aceleración del muchacho y de la cuña?

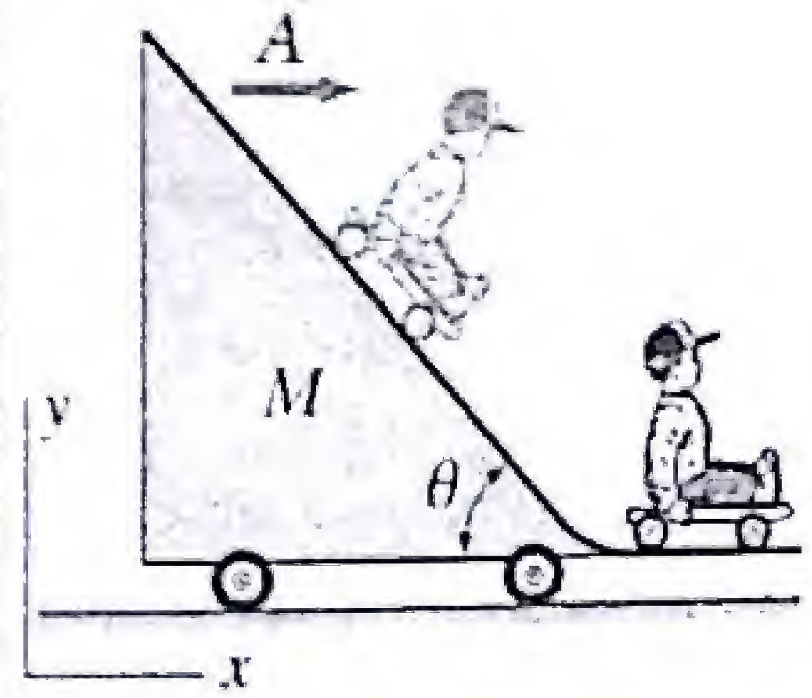
b) Verifique que las expresiones obtenidas predicen el caso límite cuando la cuña se encuentra fija al suelo.



Solución: Según un observador fijo en la cuña, el muchacho desciende a lo largo del plano inclinado con una aceleración $\vec{a}'$ paralela a dicho plano. Tomemos un marco de referencia inercial fijo en el suelo y supongamos que la aceleración $\vec{A}$ de la cuña es hacia la derecha. La aceleración del muchacho con respecto al suelo será igual a la aceleración del muchacho con respecto a la cuña, mas la aceleración de la cuña con respecto al suelo. En componentes

$$a_x = a'\cos\theta + A \qquad (1)$$

$$a_y = -a' sen\theta \qquad (2)$$



Aplicando la segunda ley de Newton en el marco de referencia (inercial) fijo en el suelo, obtenemos:

Cuña: $$\sum F_x = -N_1 sen\theta = MA \qquad (3)$$

Muchacho: $$\sum F_x = N_1 sen\theta = ma_x = m(a' cos\theta + A) \qquad (4)$$

$$\sum F_y = N_1 cos\theta - mg = ma_y = -ma' sen\theta \qquad (5)$$

Si despejamos $N_1 sen\theta$ de la ecuación (3) y lo sustituimos en la (4) se obtiene:

$$ma' cos\theta = -(m+M)A \qquad (6)$$

Multiplicando la Ec. (4) por cosθ y la Ec. (5) por $sen\theta$ para eliminar N_1 conseguimos otra relación entre a' y A.

$$mgsen\theta = mA\,cos\theta + ma' \qquad (7)$$

Eliminado a' de las ecuaciones (6) y (7) encontramos la aceleración de la cuña:

$$A = -\left(\frac{msen\theta cos\theta}{M + msen^2\theta}\right)g$$

El signo (-) indica que el sentido de $\vec{A}$ es hacia la izquierda (sentido contrario al que habíamos supuesto). Sustituyendo A en la ecuación 3, se obtiene N_1. Sustituyendo las expresiones para N_1 y A en las ecuaciones 4 y 5, se obtienen las componentes de la aceleración del muchacho:

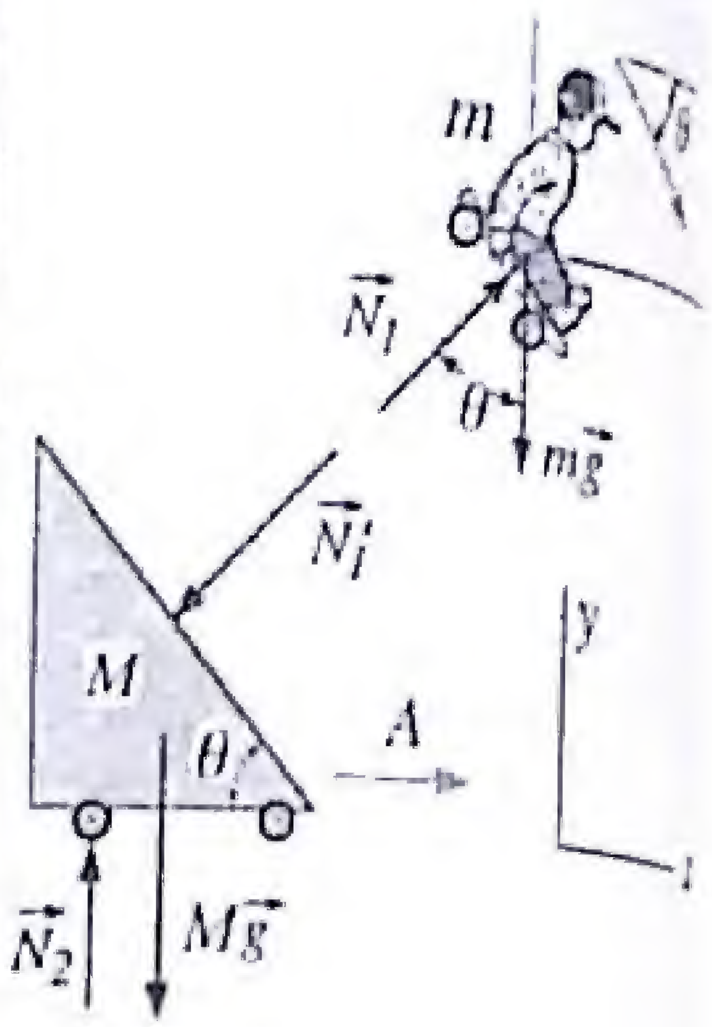
$$a_x = \frac{Msen\theta cos\theta}{M + msen^2\theta}g \qquad a_y = -\frac{(M+m)sen^2\theta}{M + msen^2\theta}g$$

b) Si tomamos el límite: $M >> m$, entonces $A \to 0$, y se obtiene para la aceleración del patinador:

$$a_x = gsen\theta cos\theta \qquad a_y = -gsen^2\theta$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = gsen\theta$$

Esta expresión corresponde al caso de una cuña inmóvil.



Respuesta:

$$\vec{A} = \frac{mgsen\theta cos\theta}{M + msen^2\theta}(-\hat{i})$$
$$a_x = \frac{Msen\theta cos\theta}{M + msen^2\theta}g$$
$$a_y = -\frac{(M+m)sen^2\theta}{M + msen^2\theta}g$$

PR 1.40. *Fuerza resistiva proporcional a la velocidad*

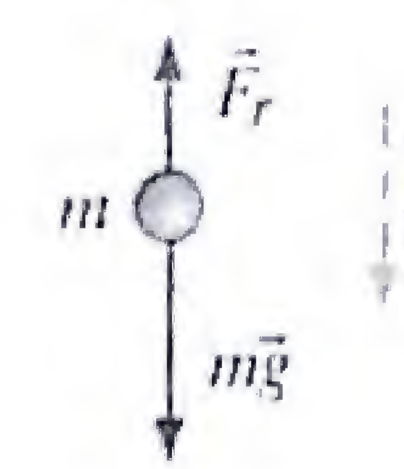
En el caso de objetos que se mueven en un medio viscoso, la fuerza de arrastre es proporcional a la velocidad, si esta no es muy grande: $F_r = -kv$

Donde k es una constante. Suponga una esferita de masa m, que se suelta desde reposo en un líquido.

a) ¿Cuál será la velocidad terminal de la esferita?

b) ¿Cuál es la expresión para la velocidad después de haber caído una distancia y? Verifique que, de esta expresión se obtiene la velocidad terminal cuando $t \to \infty$.

Solución: a) Por una parte actúa la fuerza hacia abajo con que la Tierra atrae a la esferita, el peso $m\vec{g}$, y por otra, la fuerza hacia arriba de resistencia que ejerce el líquido, $\vec{F}_r$. Tomando el sentido positivo del eje y hacia abajo, la segunda ley de Newton es:



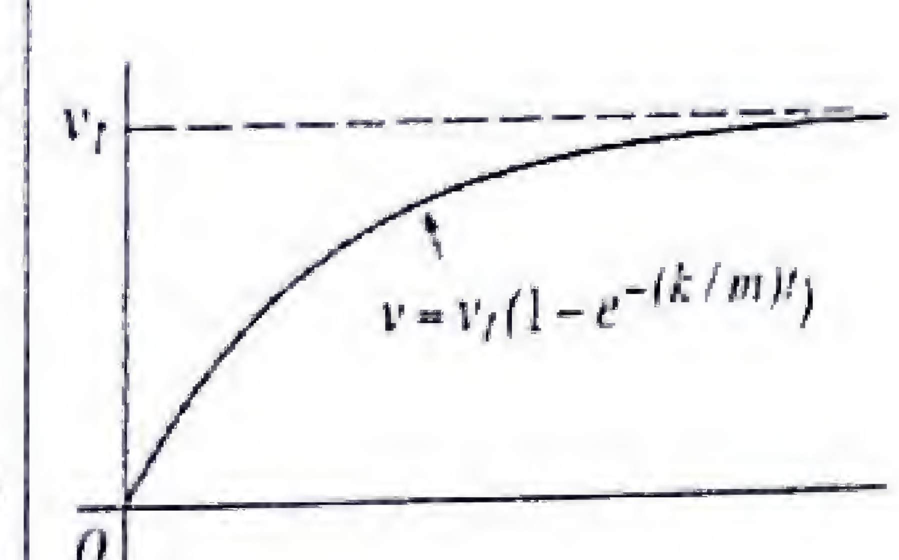
$$\sum F_y = mg - kv = ma$$

Cuanto mayor sea la velocidad, mayor será la fuerza con que el fluido frena la caída de la esferita y la fuerza neta se hace cada vez más pequeña. En el momento en que la resistencia iguala al peso, la fuerza neta es nula y a partir de aquí, la velocidad se mantiene constante. A esta velocidad se le denomina velocidad límite o terminal, v_t:

$$mg - kv_t = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v_t = \frac{mg}{k}$$

b) Escribiendo la segunda ley de Newton en términos de la velocidad terminal:

$$mg - kv = m\frac{dv}{dt} \qquad \frac{dv}{v - v_t} = -\frac{k}{m}dt$$



Integrando ambos miembros y considerando que $v = 0$ cuando $t = 0$, se obtiene:

$$\int_0^v \frac{dv}{v - v_t} = -\frac{k}{m}\int_0^t dt \qquad \Rightarrow \qquad ln\left(\frac{v_t - v}{v}\right) = -\frac{k}{m}t$$

$$1 - \frac{v}{v_t} = e^{-(k/m)t} \qquad \Rightarrow \qquad v = v_t(1 - e^{-(k/m)t})$$

Observe que v se hace igual a v_t en el límite $t \to \infty$

Respuesta:

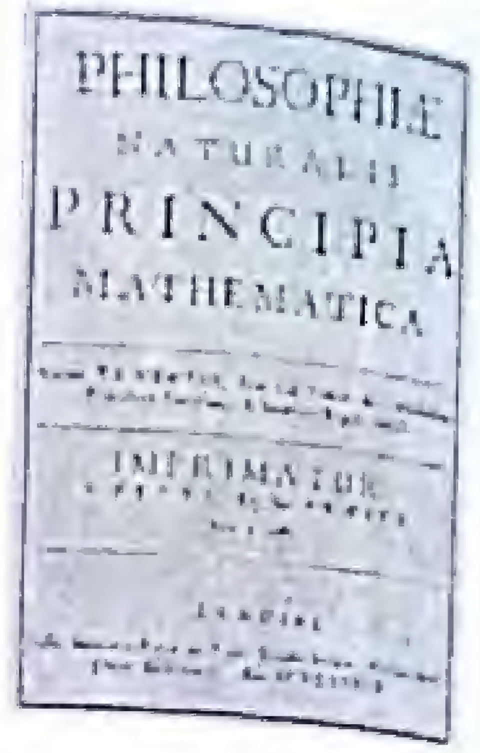
a) $v_t = \dfrac{mg}{k}$

b) $v = v_t(1 - e^{-(k/m)t})$

VERIFICA TU COMPRENSIÓN

PE-1.01. *De acuerdo a la primera ley de Newton...*

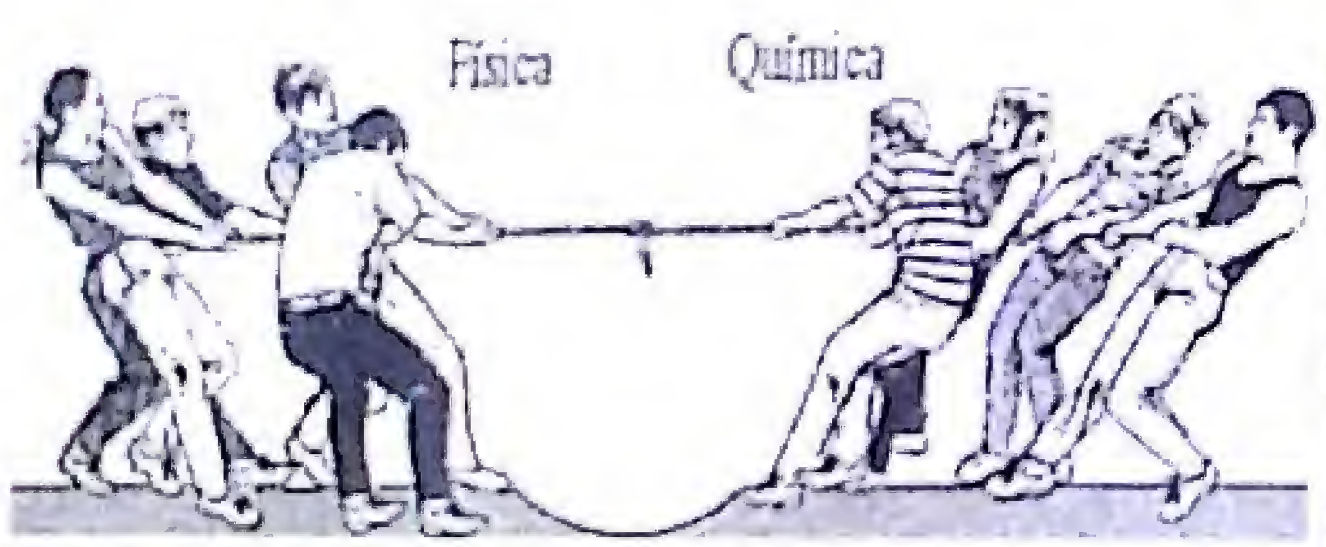
a) Un cuerpo sobre el que no actúa ninguna fuerza externa, se encuentra en reposo o se desplaza con una velocidad constante.
b) Un cuerpo no puede desplazarse sin que una fuerza esté actuando sobre él.
c) Un cuerpo se detiene, si la fuerza neta que actúa sobre él, desaparece.
d) Si un cuerpo está en reposo, se puede concluir que no hay ninguna fuerza aplicada sobre él.
e) Si un cuerpo se está moviendo con velocidad constante es porque no hay ninguna fuerza aplicada sobre él.



Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare

PE-1.02. *Competencia Intercarreras: ¿Quién jala más?*

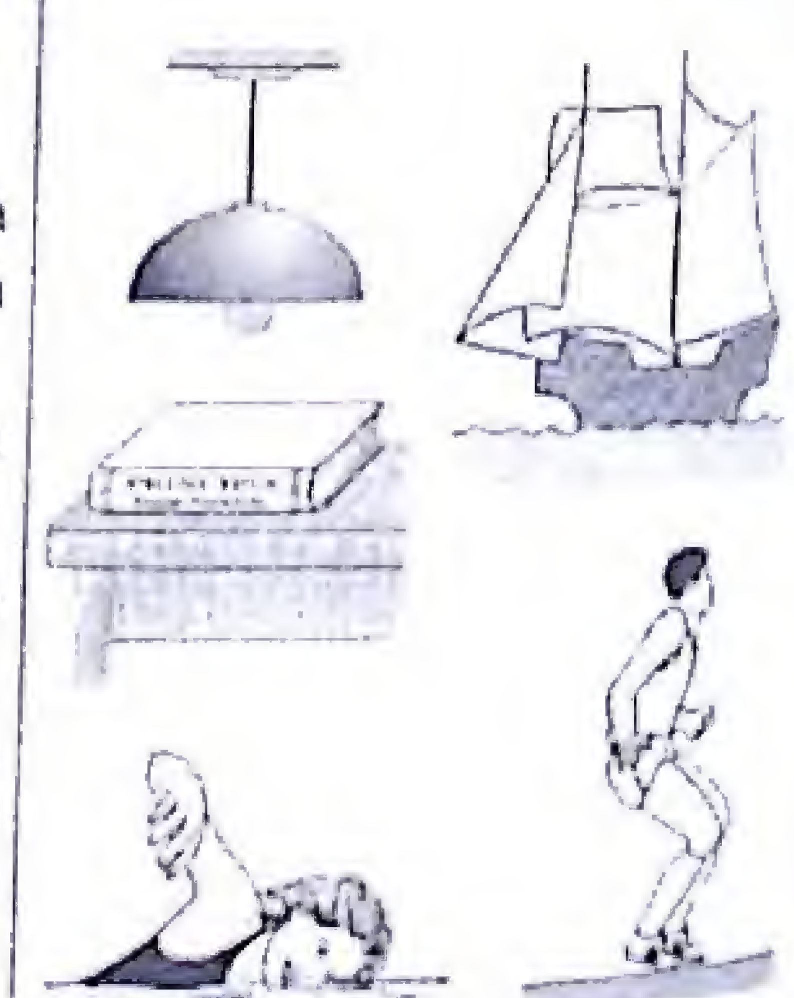
En una competencia, el equipo de Física y el de Química se jalan mediante un mecate de *masa despreciable.*



Si finalmente el equipo de Física vence al de Química, podemos decir que........
a) El de Física jaló el mecate con una fuerza de magnitud mayor.
b) Ambos equipos jalan el mecate con una fuerza de igual magnitud.
c) No se puede saber cuál de los dos jaló con la mayor fuerza.

PE-1.03. *¿Cuáles de éstos son pares acción-reacción?*

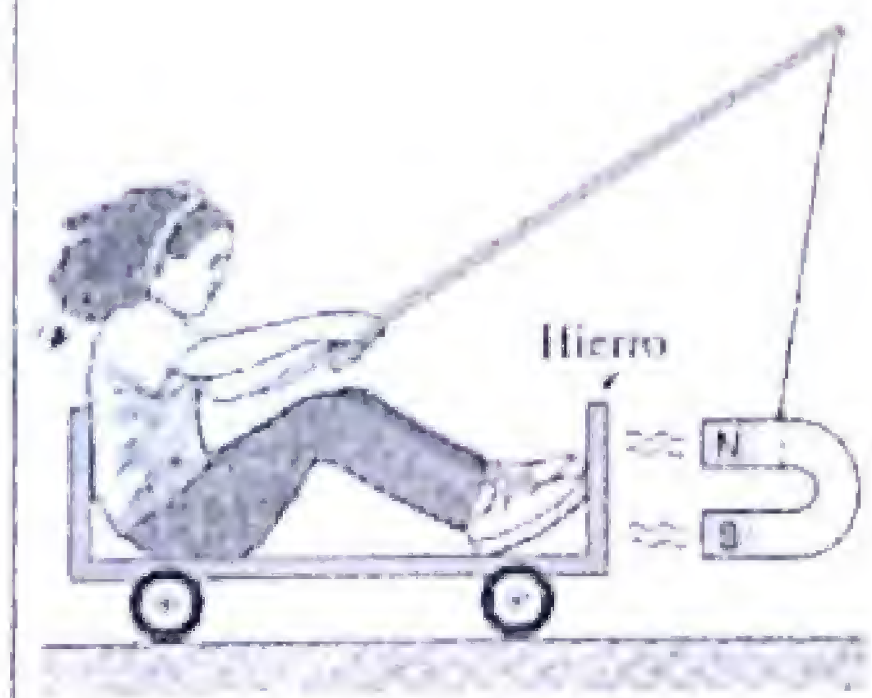
a) Una lámpara cuelga del techo mediante un cable: La fuerza sobre el cable ejercida por el techo y la fuerza sobre el cable ejercida por la lámpara.
b) Juan se impulsa del suelo para saltar: La fuerza sobre Juan ejercida por el suelo y el peso de Juan.
c) Ana nada en la piscina: La fuerza sobre Ana ejercida por el agua y la fuerza sobre el agua ejercida por Ana.
d) El libro está sobre la mesa: El peso del libro y la fuerza normal de la mesa sobre el libro.
e) El barco flota en el agua: La fuerza de empuje sobre el barco ejercida por el agua y el peso del barco.



PE-1.04. *Un posible sistema de transporte*

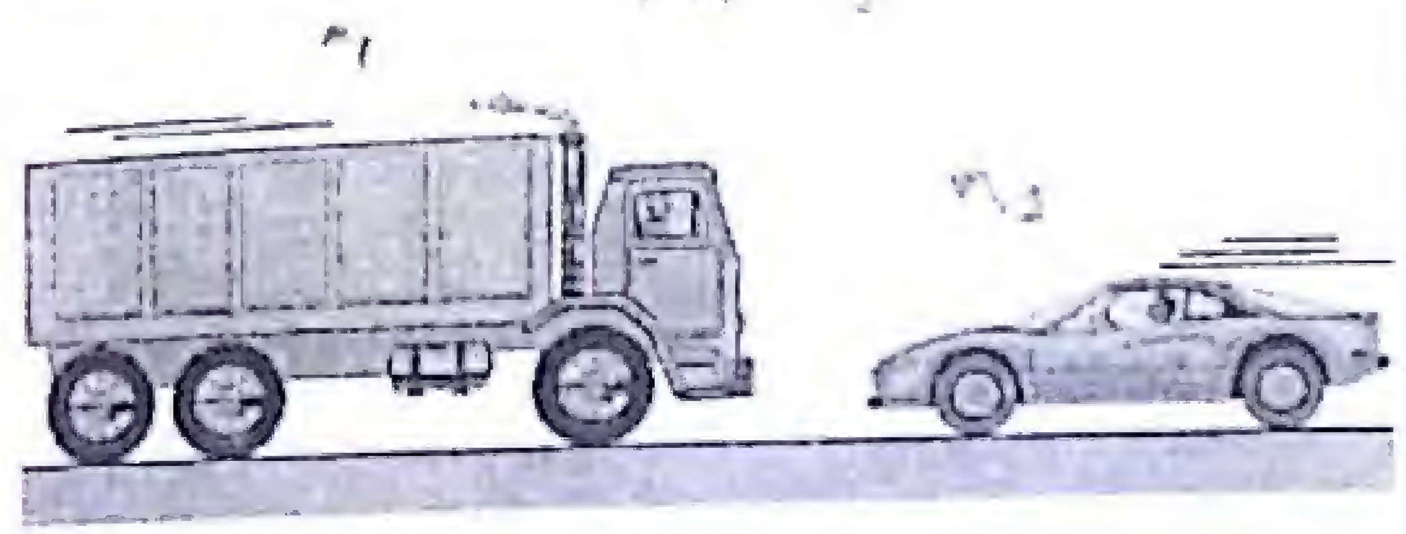
Un inventor propone un sistema para impulsar un carro mediante la atracción que ejerce un imán suspendido enfrente de su parte delantera sobre el chasis de hierro. Podemos decir que este sistema...

a) Debe moverse hacia atrás por la 3a ley de Newton.
b) Se moverá hacia adelante por 2a ley de Newton.
c) No se moverá de acuerdo la primera ley de Newton.
d) Se moverá hacia adelante siempre que no exista fricción con el suelo.
e) Se moverá hacia atrás siempre que no exista fricción con el suelo.



PE-1.05. *¿Sobre cuál vehículo será la fuerza mayor?*

Un carro liviano y un camión masivo tienen una colisión frontal. ¿Cuál de los dos vehículos recibe la mayor fuerza durante el impacto?



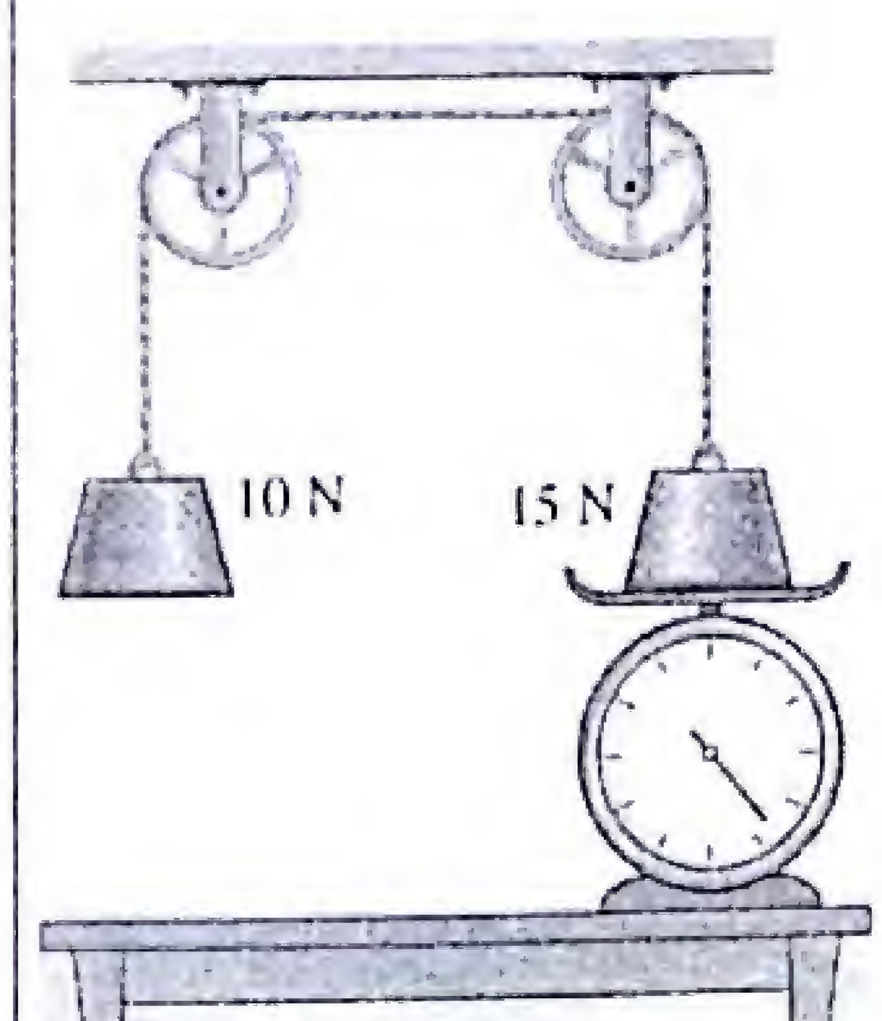
a) El carro.
b) El camión.
c) El que iba a mayor velocidad.
d) El que iba a menor velocidad.
e) Ambos vehículos experimentan igual fuerza.

PE-1.06. *¿Cuánto indica la báscula?*

Dos pesas de 10 N y 15 N respectivamente están unidas por una cuerda ideal que pasa por dos poleas ideales. La pesa de 15 N descansa sobre una báscula y el sistema está en equilibrio.

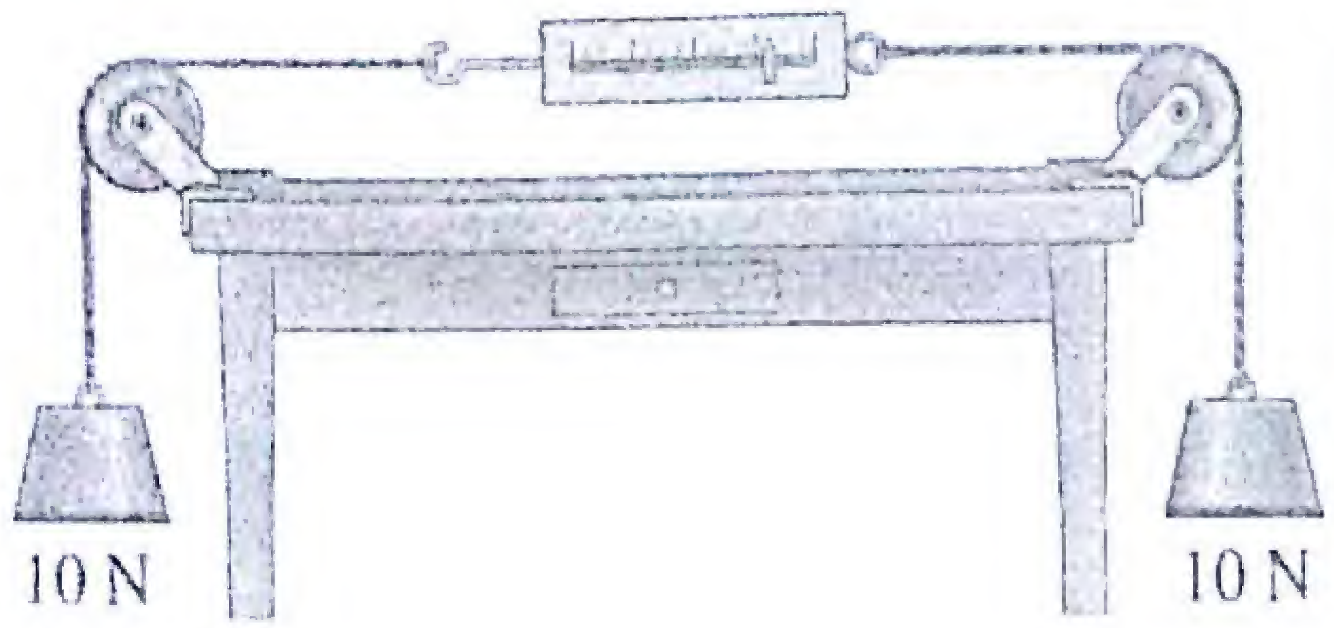
¿Qué lectura indica la báscula?

a) 5 N, b) 10 N, c) 15 N, d) 20 N, e) 25 N



PE-1.07. *¿Cuál será la lectura del dinamómetro?*

Dos pesas de 10 N se encuentran suspendidas a cada lado de una cuerda que pasa por dos poleas ideales:



Si en el medio de la cuerda se inserta un dinamómetro, ¿cuánto indicará?

a) cero

b) 10 N

c) 20 N

d) 15 N

PE-1.08. *¡Al mono no le agrada mirarse en el espejo!*

Un mono está suspendido de una cuerda ligera que pasa por una polea sin fricción y en el otro extremo hay un espejo que tiene igual masa que el mono, y está ubicado enfrente de éste. Asustado por su imagen, el mono trata de alejarse del espejo. Podemos predecir que.......

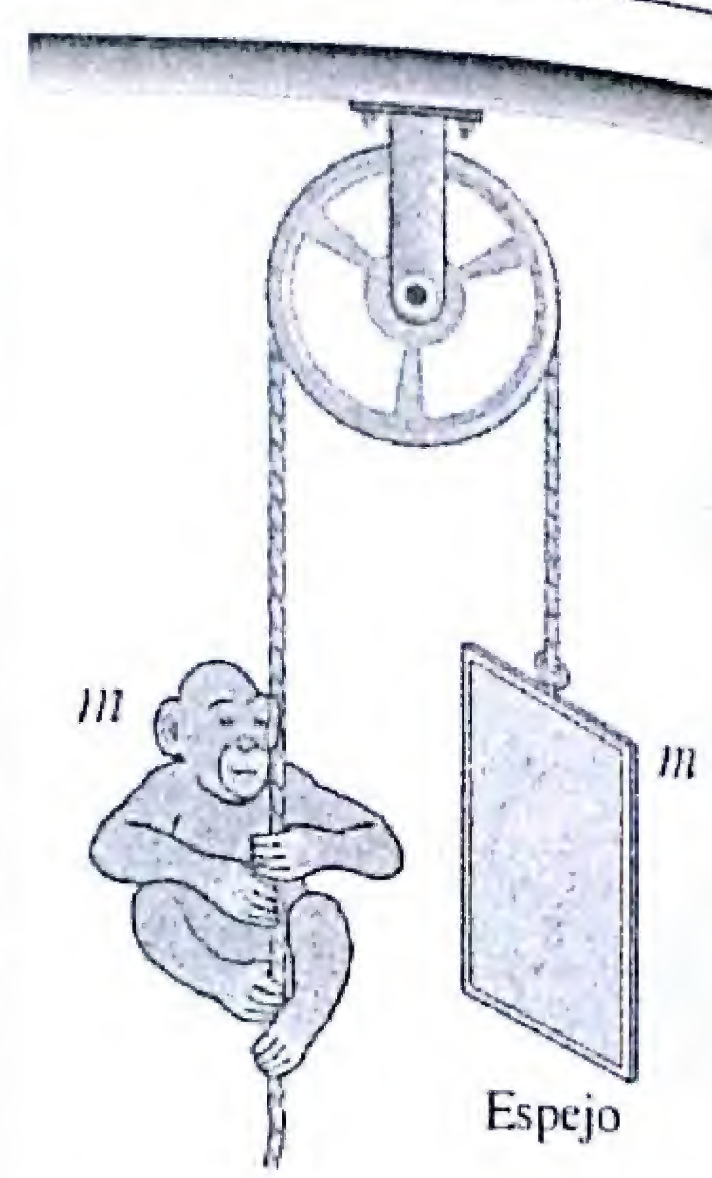
a) Si el mono sube, el espejo baja.

b) Si el mono baja, el espejo sube.

c) Si el mono sube, el espejo sube una distancia menor y se va alejando del mono.

d) Si el mono baja, el espejo baja una distancia menor y se va alejando del mono.

e) No importa si el mono sube o baja, el espejo quedará siempre enfrente del mono.



PE-1.09. *No compres pescado dentro de un ascensor*

Un objeto se suspende de una báscula desde el techo de un ascensor. La báscula registra la mayor lectura cuando el ascensor......

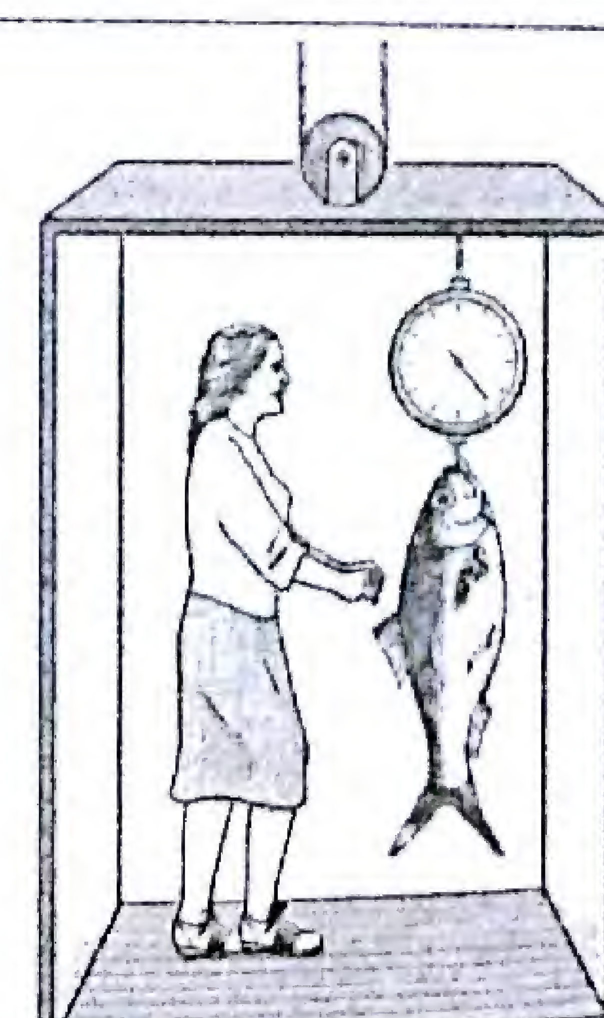
a) baja con velocidad creciente

b) baja con velocidad decreciente

c) está inmóvil

d) sube con velocidad decreciente

e) sube con velocidad constante



PE-1.10. *¿Cuál es la aceleración del ascensor?*

Una persona está en un ascensor montada sobre una báscula. El ascensor arranca con una determinada aceleración a y antes de llegar a su destino frena con una deceleración de igual magnitud a. Si la persona observa que la máxima lectura de la báscula fue 60 kg y la mínima fue 45 kg, la aceleración del ascensor es......

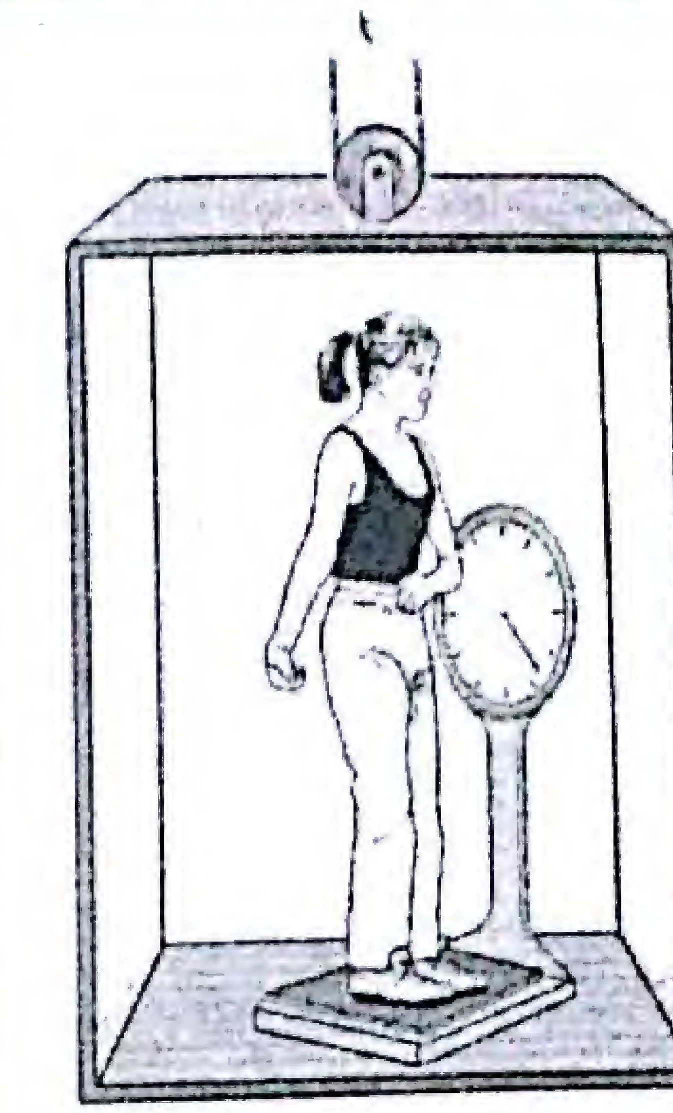
a) $a = 0{,}70\ m/s^2$.

b) $a = 1{,}40\ m/s^2$.

c) $a = 2{,}80\ m/s^2$.

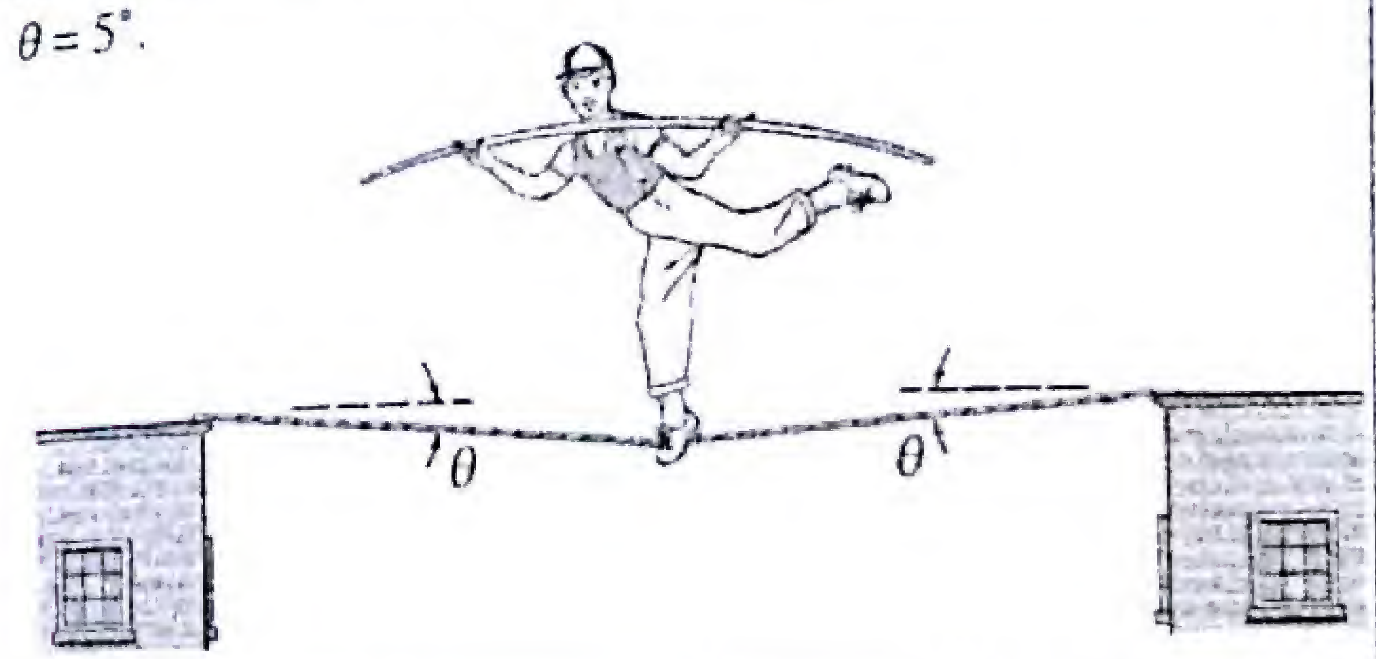
d) $a = 4{,}90\ m/s^2$.

e) Depende de si está subiendo o si está bajando



PE-1.11. *Equilibrio en el centro de una cuerda tensa*

Un malabarista de peso P está en equilibrio apoyado sobre el centro de una cuerda tensa, de manera que a cada lado la cuerda forma un ángulo pequeño con la horizontal $\theta = 5°$.



La magnitud de la tensión de la cuerda es......

a) aproximadamente $P/2$

b) menor que $P/5$

c) igual a P

d) mayor que $5P$

e) aproximadamente $2P$

PE-1.12. *Fuerza de contacto entre los libros*

Tres libros están en reposo sobre una mesa horizontal colocados uno encima de otro, en el orden indicado en la figura. Los pesos de los libros son:

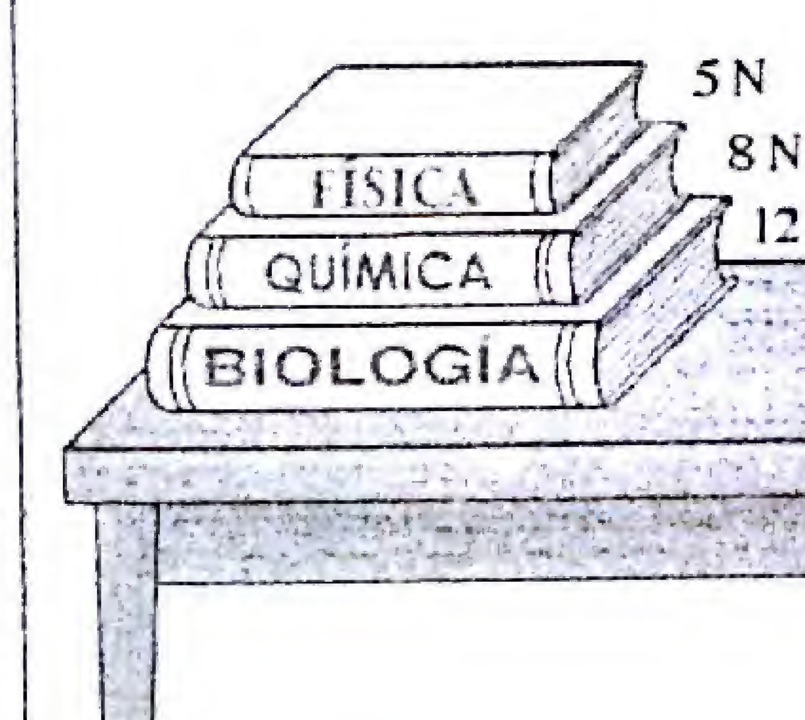
5 N el de Física

8 N el del Química

12 N el de Biología

La fuerza que ejerce el libro de Biología sobre el libro de Química es:

a) 5 N b) 8 N c) 12 N d) 13 N e) 25 N

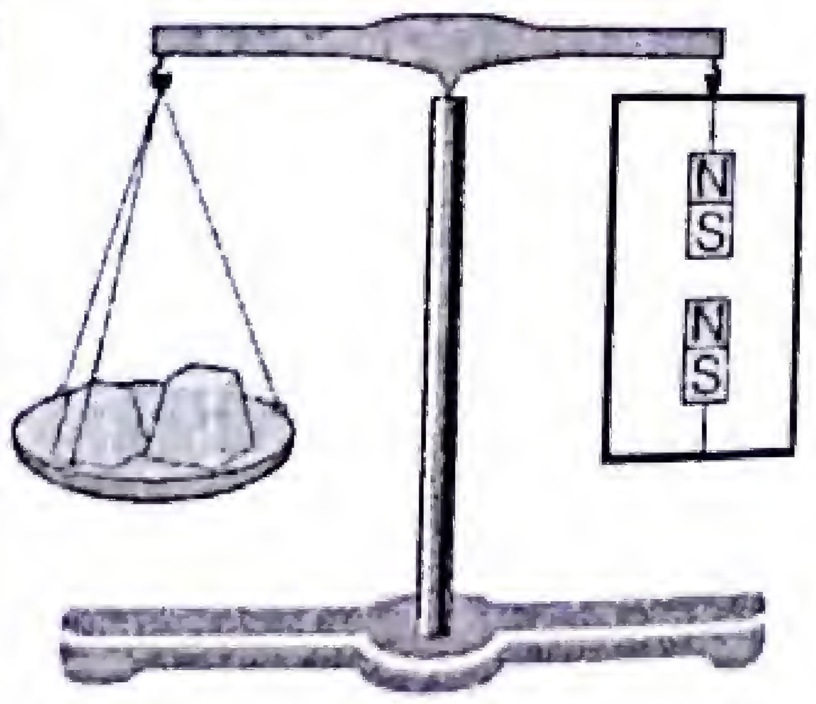


PE-1.13. *Una interpretación errónea de la tercera ley*

A la derecha se muestra un caballo que no quiere tirar de una carreta basándose en la tercera ley de Newton.
El error en su razonamiento es que
a) Ambas fuerzas del par acción-reacción deben estar aplicadas al mismo objeto, o al caballo o a la carreta.
b) La reacción a la fuerza aplicada por el caballo sobre la carreta, es la fuerza horizontal del suelo sobre la carreta.
c) La reacción a la fuerza aplicada por el caballo sobre la carreta, es la fuerza horizontal del suelo sobre el caballo.
d) Según la tercera ley la fuerza aplicada por el caballo sobre la carreta, debe ser igual y opuesta a la fuerza horizontal que el suelo aplica a la carreta.
e) Las dos fuerzas del par acción-reacción no pueden cancelarse porque actúan sobre cuerpos diferentes.

PE-1.14. *Equilibrio con dos imanes en una balanza*

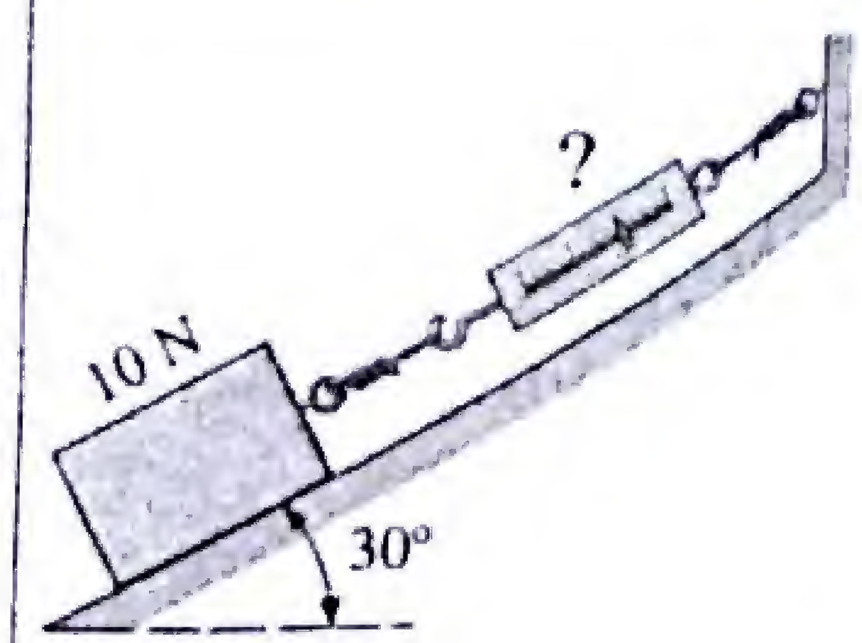
Dos imanes de igual masa están atraídos mientras se sostienen verticalmente por hilos ligeros en un marco rectangular de aluminio, el cual se suspende del lado derecho de una balanza de aluminio mientras que en el platillo izquierdo se colocan pesas que la equilibra. ¿Qué sucederá si cortamos el hilo que sostiene el imán inferior?
a) Queda inclinada hacia la derecha.
b) Queda inclinada hacia la izquierda.
c) Se inclina momentáneamente hacia la izquierda y luego recupera el equilibrio.
d) Se inclina momentáneamente hacia la derecha y luego recupera el equilibrio.



PE-1.15. *Dinamómetro en un plano inclinado*

Un bloque que pesa 10 N está sobre un plano inclinado liso que forma un ángulo de 30° con la horizontal. El bloque está en equilibrio sostenido a la pared por una cuerda que tiene intercalado un dinamómetro, como muestra la figura. ¿Cuál será la lectura del dinamómetro?

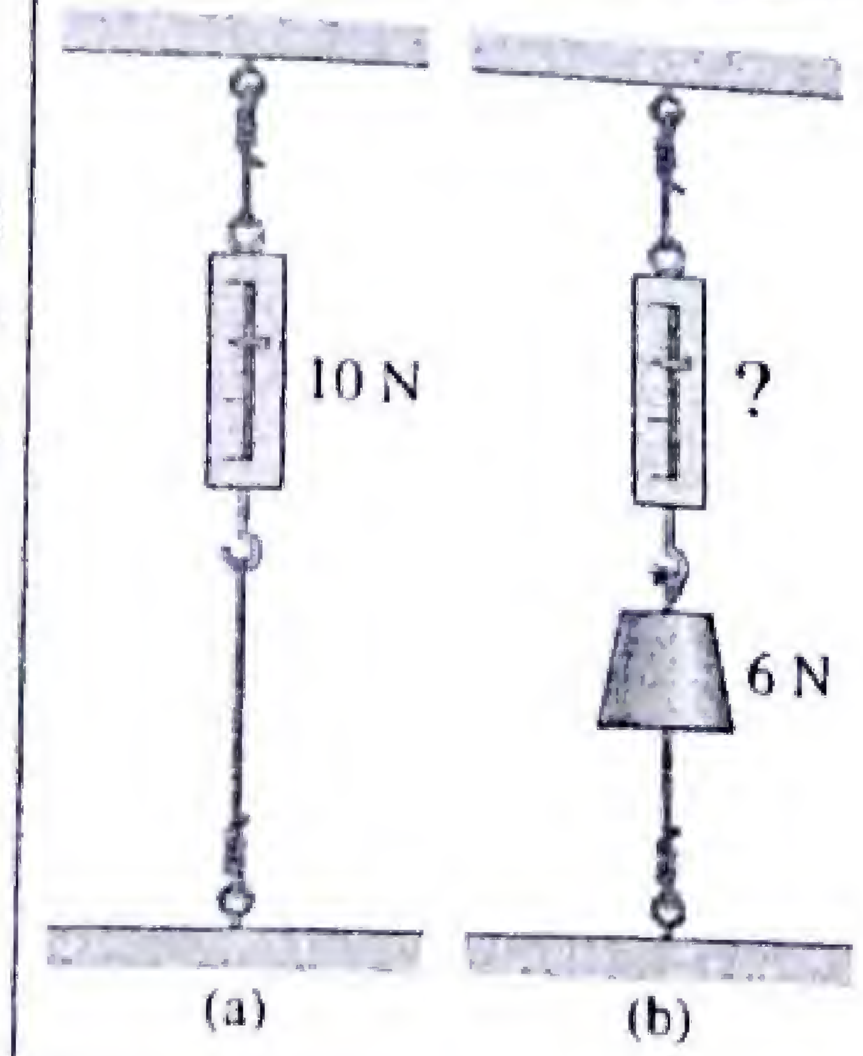
a) 5 N b) 5,77 N c) 8,66 N d) 10 N



PE-1.16. *Una situación tensa*

Un dinamómetro se cuelga mediante una cuerda sujeta al techo y luego se tensa mediante otra cuerda sujeta al piso, de manera que la lectura del dinamómetro es 10 N (Fig. a). A continuación se suspende del gancho inferior del dinamómetro una pesa de 6 N (Fig. b).
¿Cuál será la nueva lectura del dinamómetro?

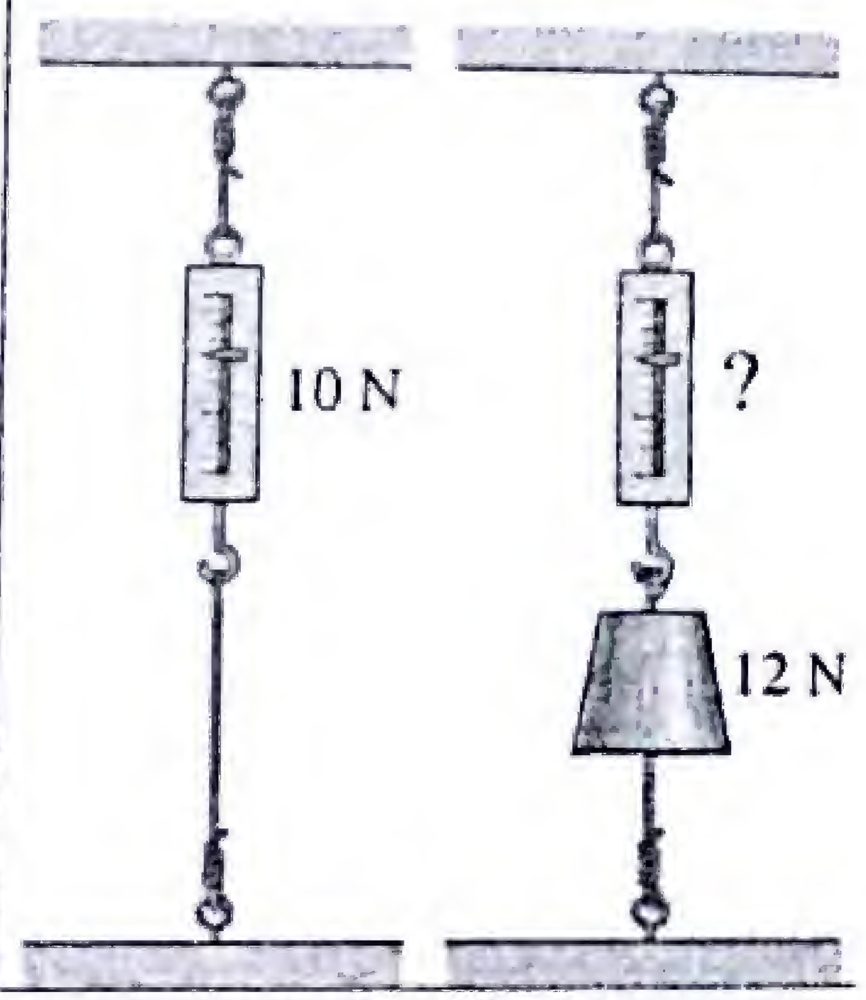
a) 4 N b) 6 N c) 10 N d) 16 N



PE-1.17. *Una situación mas tensa*

Un dinamómetro se cuelga mediante una cuerda sujeta al techo y luego se tensa mediante otra cuerda sujeta al piso, de manera que la lectura del dinamómetro es 10 N (Fig. a). A continuación se suspende del gancho inferior del dinamómetro una pesa de 12 N (Fig. b).
¿Cuál será la nueva lectura del dinamómetro?

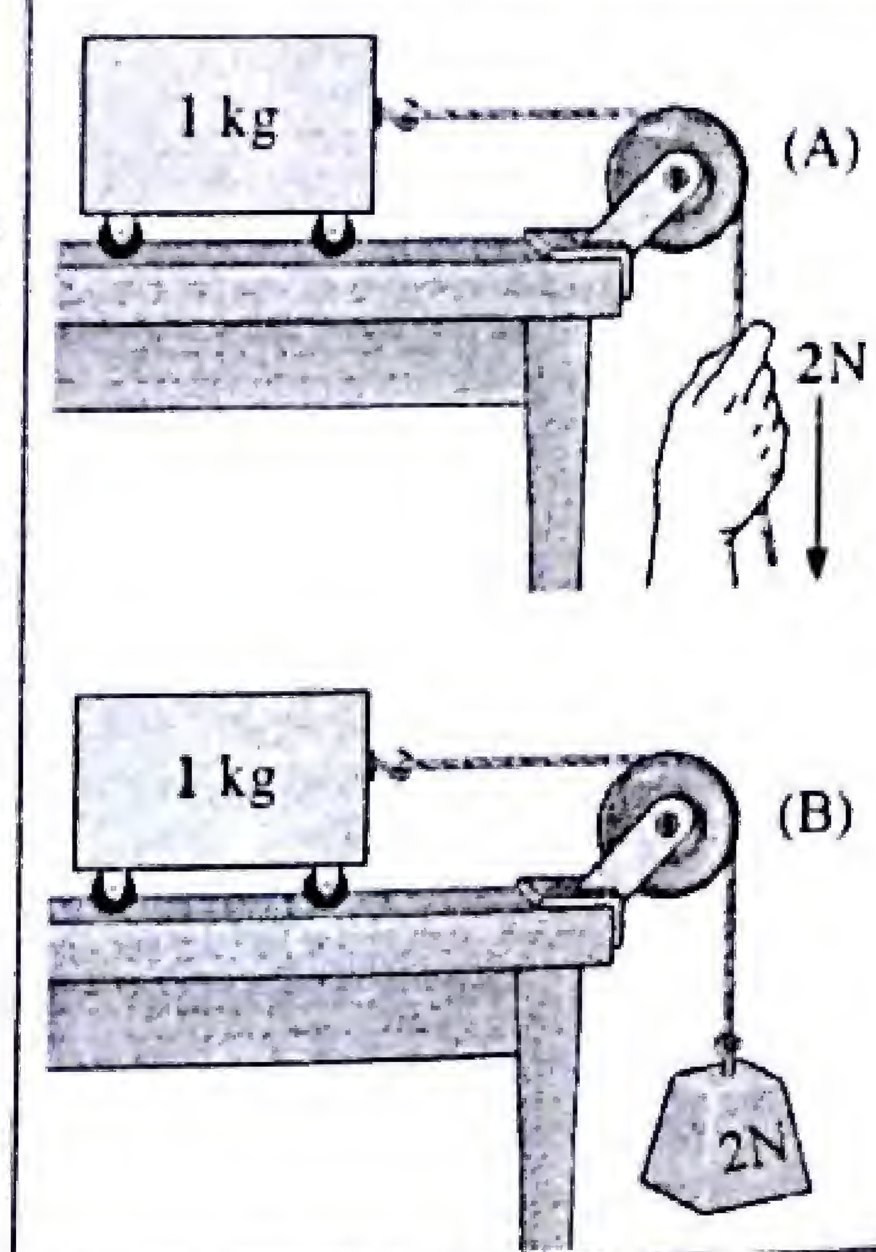
a) 22 N b) 12 N c) 10 N d) 2 N



PE-1.18. *Fuerza iguales: ¿Dan aceleraciones iguales?*

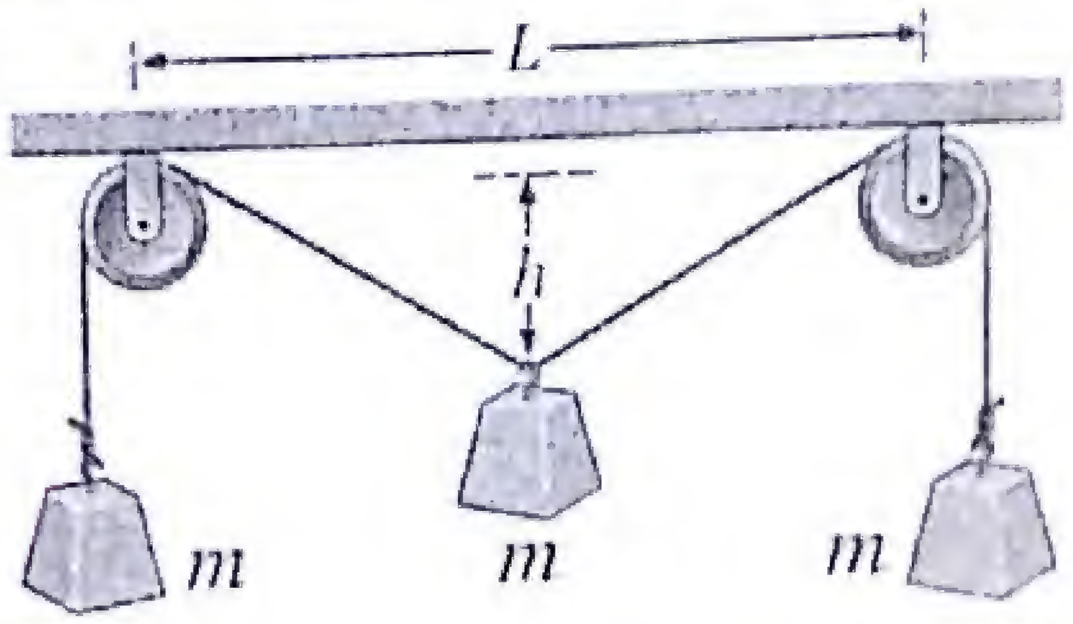
Sea un carrito de masa m = 1 kg que puede deslizar sin fricción sobre una mesa horizontal, y está atado a una cuerda ligera que pasa por una polea ideal. Se aplica al sistema una fuerza de igual valor pero de dos maneras diferentes:
En el caso (A) se jala hacia abajo el otro extremo de la cuerda con una fuerza de 2 N.
En el caso (B) se suspende una pesa de 2 N del extremo de la cuerda.

¿En cual caso será mayor la aceleración del carrito?
a) En el caso (A)
b) En el caso (B)
c) La aceleración será igual en los dos casos.



PE-1.19. *¿Cuál será el descenso de la cuerda?*

Una cuerda se mantiene tensa en posición horizontal mediante pesas idénticas suspendidas de sus extremos. La cuerda pasa por dos poleas que están separadas por una distancia L.



Si colocamos justo en el medio de la cuerda una tercera pesa idéntica a las anteriores, ¿cuál será el descenso h de la cuerda?

a) $h = \frac{1}{4}L$

b) $h = \frac{\sqrt{2}}{4}L$

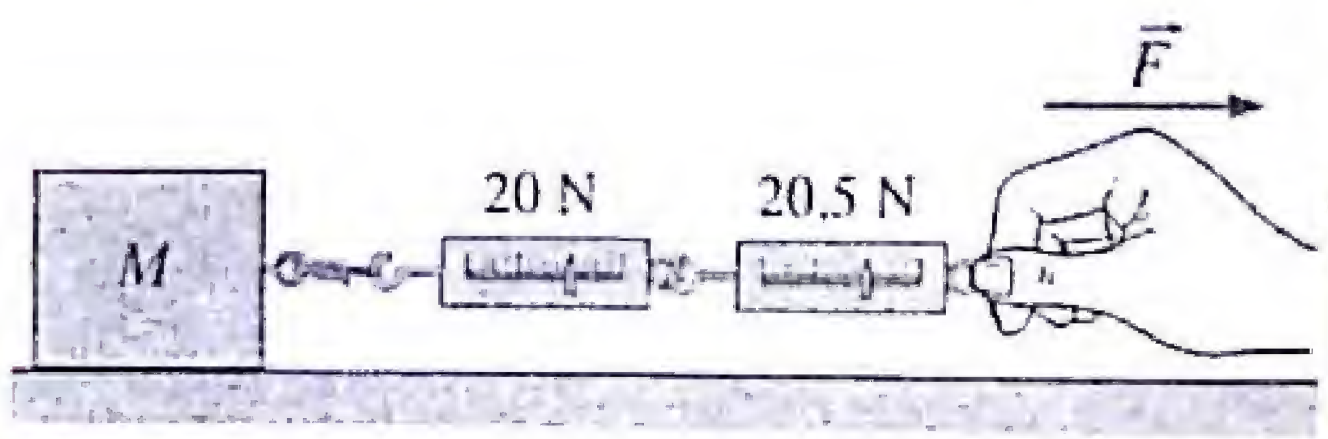
c) $h = \frac{\sqrt{3}}{4}L$

d) $h = \frac{\sqrt{3}}{6}L$

e) $h = \frac{\sqrt{2}}{3}L$

PE-1.20. *Dinamómetros en serie con lecturas distintas*

Un bloque de masa M = 8 kg está sobre una mesa horizontal lisa y es jalado mediante dos dinamómetros idénticos, conectados uno a continuación del otro. Los dinamómetros tienen masas no despreciables y se observa que cuando se aplica una determinada fuerza F, las lecturas de los dinamómetros son las indicadas.



¿Cuál es el valor de esta fuerza aplicada?

a) F = 21 N

b) F = 0,5 N

c) F = 20 N

d) F = 40,5 N

e) F = 20.5 N

PE-1.21. *¿Esa maleta está subiendo o está bajando?*

Una maleta de masa m = 20 kg está sobre una rampa inclinada a un ángulo θ = 36,9° con la horizontal y se le está aplicando una fuerza $\vec{F}$ de 100 N hacia arriba formando un ángulo ϕ = 30° con el plano de la rampa. Si despreciamos el rozamiento con el piso, podemos afirmar que la aceleración de la maleta es...

a) cero

b) 0,9 m/s^2 hacia arriba de la rampa

c) 1,55 m/s^2 hacia abajo de la rampa

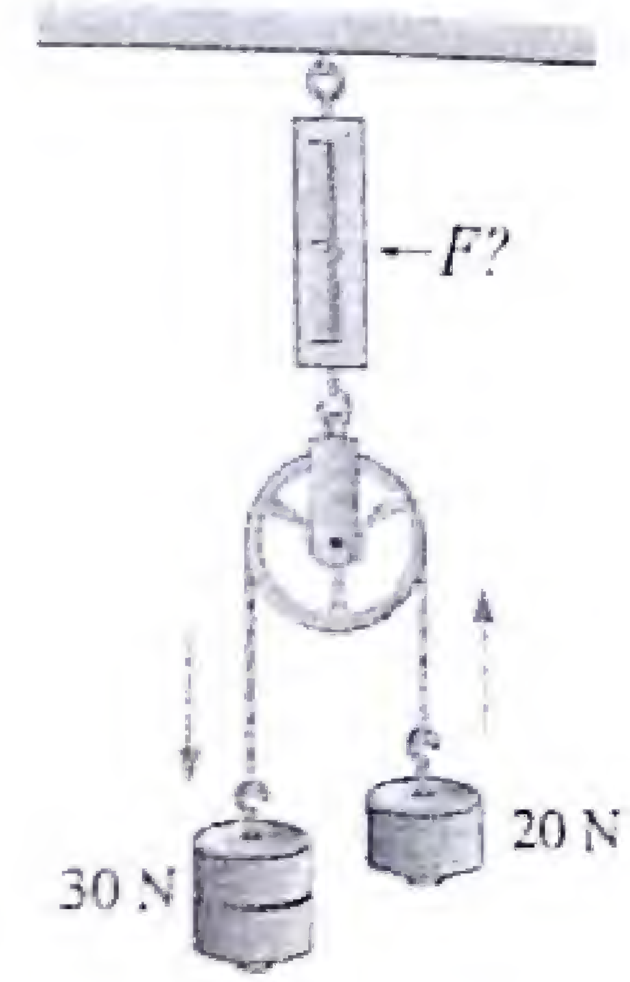
d) 5, 0 m/s^2 hacia arriba de la rampa

e) 3,1 m/s^2 hacia abajo de la rampa

PE-1.22. *¿Cuánto pesa esta máquina de Atwood?*

Una máquina de Atwood está constituida por dos masas cuyos pesos respectivos son w_1 = 30 N y w_2 = 20 N, conectados por una cuerda ligera que pasa sobre una polea ideal. Si se le suspende por el eje de la polea mediante un dinamómetro y se sueltan las pesas, ¿cuál será la lectura del dinamómetro?

a) 10 N, b) 24 N c) 25 N, d) 48 N, e) 50 N



PE-1.23. *Un rompecabezas con dos básculas*

Dos básculas idénticas se colocan una encima de la otra y luego se coloca una pesa de masa desconocida en el platillo de la báscula superior. Se observa que las lecturas respectivas de las básculas son: 3 kg, la de la báscula inferior y 2 kg, la de la báscula superior (Fig. a).

Si ahora procedemos a voltear la báscula superior de modo que su platillo descanse sobre el platillo de la báscula inferior y luego se coloca la pesa en su parte de arriba, (Fig. b) ¿cuál será la nueva lectura de la báscula volteada?

a) 3 kg, b) 1kg, c) 2 kg, d) 4 kg, e) 5 kg

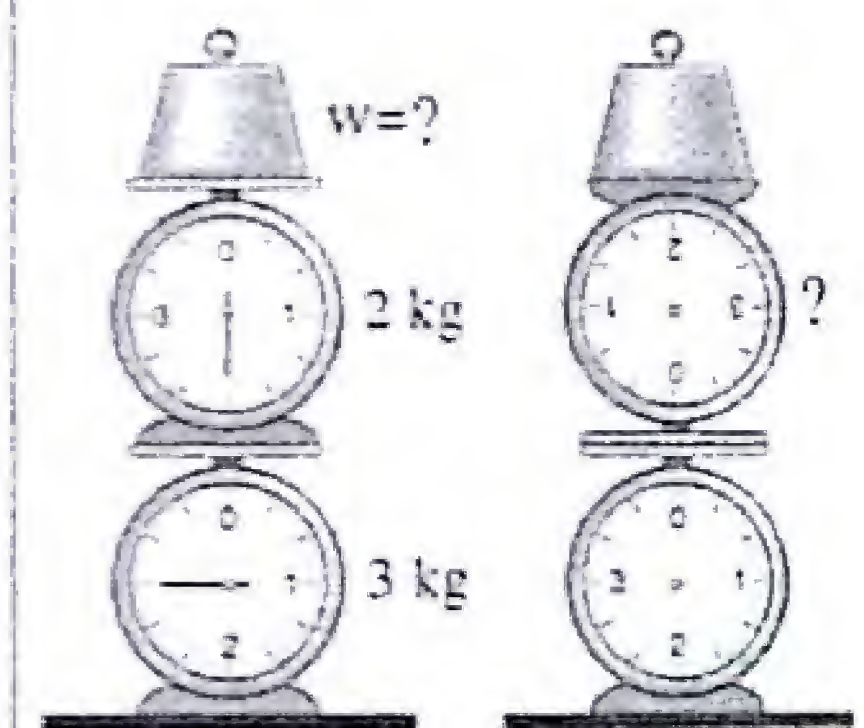


Fig. a Fig. b

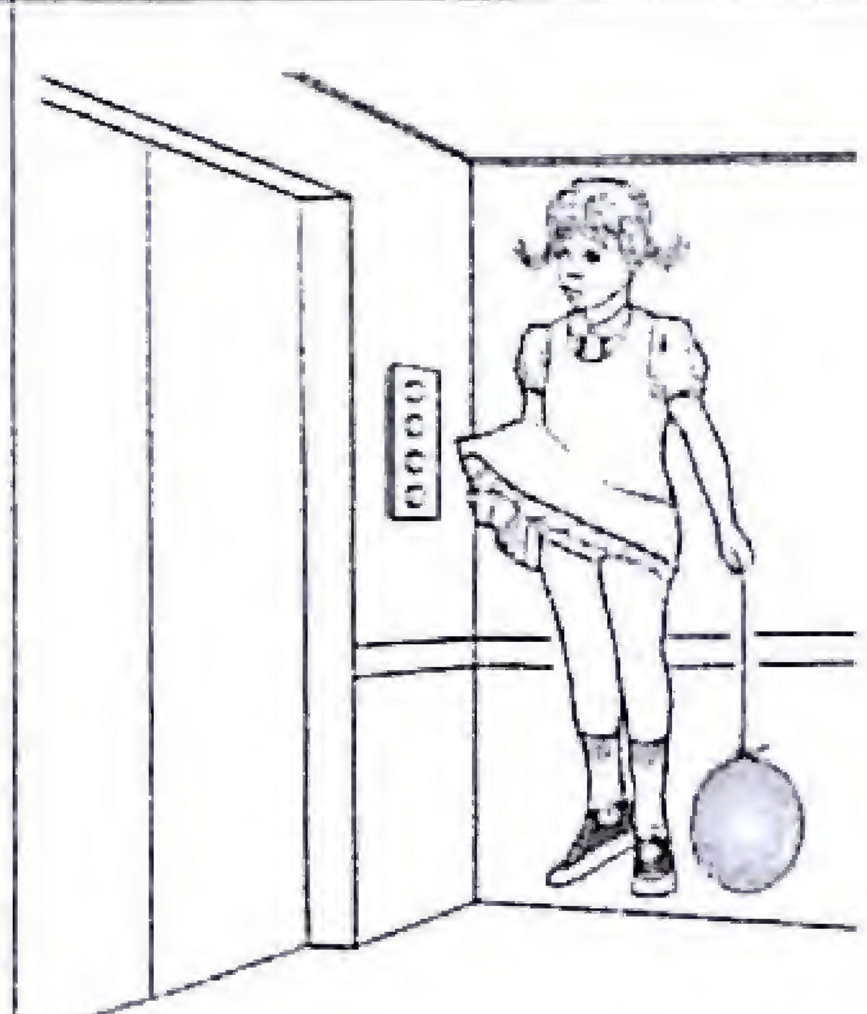
PE-1.24. *Pánico dentro de un ascensor*

La situación hipotética ilustrada muestra una niña sosteniendo un globo dentro de la cabina de un ascensor. Se podría interpretar que...

a) Se rompieron las guayas del ascensor y éste está cayendo libremente con la aceleración g, de la gravedad.

b) El ascensor está acelerando hacia arriba con una aceleración mayor que g.

c) El ascensor está acelerando hacia abajo con una aceleración mayor que g.



PE-1.25. *Elevando un balde con una cadena pesada*

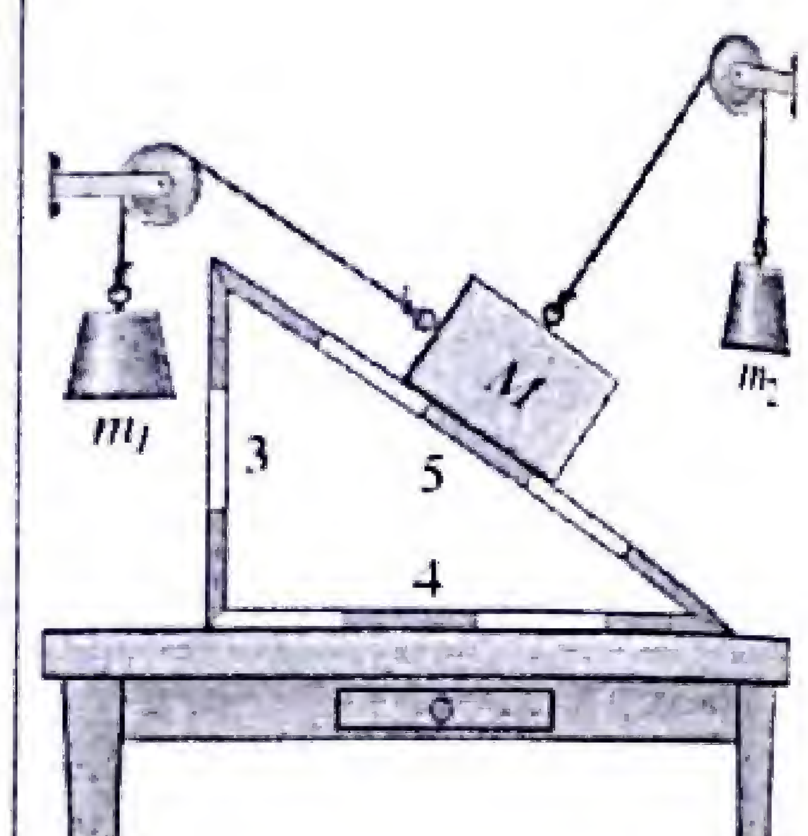
Un balde de pintura de masa 9 kg está suspendido por una cadena de 6 kg que se jala hacia arriba con una fuerza F_O = 200 N. ¿Cuál es la tensión justo en el extremo inferior de la cadena?

a) 60 N, b) 112 N, c) 80 N, d) 180 N e) 120 N

PE-1.26. *Si retiramos el plano inclinado, no pasa nada*

En una demostración de física de la USB, colocamos un bloque de masa M = 10 kg "apoyado" sobre un marco triangular de lados 3 : 4 : 5. El bloque está suspendido por dos cuerdas que pasan por poleas fijas y sostienen pesas m_1 y m_2 en sus extremos. Luego preguntamos a los alumnos: ¿Qué sucederá si retiramos el plano inclinado? Ellos quedan asombrados porque, cuando lo retiramos, no ocurre ningún movimiento ni del bloque M ni de las pesas, quedando todos en la misma posición anterior. Esto es posible porque las masas de las pesas son...

a) m_1 = 5 kg y m_2 = 3 kg, b) m_1 = 3 kg y m_2 = 5 kg
c) m_1 = 8 kg y m_2 = 6 kg, d) m_1 = 6 kg y m_2 = 8 kg
e) m_1 = 6 kg y m_2 = 4 kg,



CAP. 1: *RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS*

	a	b	c	d	e
1.01	✓				
1.03			✓		
1.05					✓
1.07		✓			
1.09		✓			
1.11				✓	
1.13					✓
1.15	✓				
1.17		✓			
1.19				✓	
1.21			✓		
1.23	✓				
1.25					✓

	a	b	c	d	e
1.02		✓			
1.04			✓		
1.06	✓				
1.08					✓
1.10		✓			
1.12				✓	
1.14				✓	
1.16			✓		
1.18	✓				
1.20	✓				
1.22				✓	
1.24			✓		
1.26				✓	

2

APLICACIONES DE LAS LEYES DE NEWTON

En el capítulo anterior vimos cómo se pueden utilizar las leyes de Newton para determinar los efectos de las fuerzas sobre el movimiento de los cuerpos en diferentes circunstancias, sin importarnos cuáles son las características de estas fuerzas. La naturaleza se comporta de manera tal que todas las fuerzas se pueden atribuir a manifestaciones de cuatro tipos de interacciones fundamentales: la gravitacional, la electromagnética, la débil, y la fuerte. Aparte de la fuerza de gravedad que es la responsable del peso de los cuerpos, todas las fuerzas que están presentes en los fenómenos cotidianos, son de origen puramente electromagnético, incluyendo las fuerzas de contacto normales y de fricción, y las fuerzas elásticas de cuerdas y resortes. Los otros dos tipos de interacciones fundamentales (la débil y la fuerte) son menos tangibles en la vida diaria ya que operan en el micro mundo de partículas elementales. Este capítulo tiene por objeto una breve descripción de las diversas fuerzas que comúnmente encontramos en la vida diaria y la aplicación de las leyes de Newton en situaciones mas realistas en que se toma en cuenta los efectos de la fricción. Además, aplicaremos las leyes de Newton al movimiento circular y también analizaremos el movimiento de un objeto desde marcos de referencia no inerciales o acelerados.

En este capítulo Ud. encontrará aspectos relacionados con:

- Las interacciones fundamentales.
- La fuerza de gravedad.
- Fuerzas de contacto.
- Fricción estática y fricción cinética.
- Fuerza elástica de un resorte.
- Fuerzas y movimiento circular.
- Fuerzas en sistemas acelerados.

LAS INTERACCIONES FUNDAMENTALES

En la naturaleza encontramos diversos tipos de fuerzas, aunque en último instancia todas ellas parecen ser manifestaciones de una de estas cuatro interacciones fundamentales:

(1) *Interacción gravitacional:* Está relacionada con una propiedad de la materia llamada "masa" y se manifiesta en la atracción mutua entre todos los cuerpos.

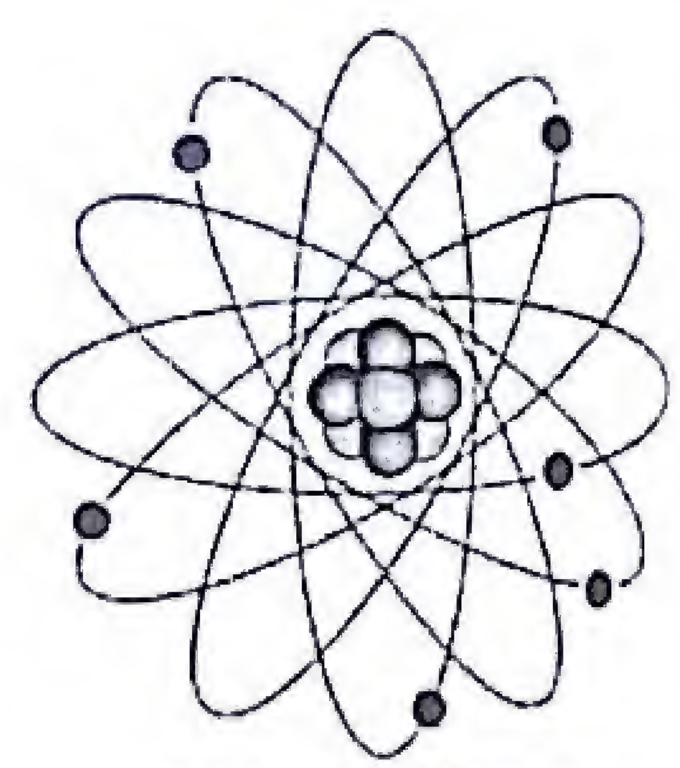
(2) *Interacción electromagnética:* Se manifiesta como una atracción o repulsión entre partículas con "carga eléctrica". Es la responsable de que en la materia se mantengan unidos los átomos y las moléculas.

(3) *Interacción débil:* Se manifiesta en ciertos procesos de desintegración radiactiva y en las reacciones entre partículas elementales.

(4) *Interacción fuerte:* Es la especie de pega que mantiene unidos a los constituyentes de los núcleos atómicos, protones y neutrones, así como a los quarks dentro de estas partículas.

Se ha determinado que la fuerza electromagnética y la débil son parte de un sólo tipo (fuerza electro-débil). Esto reduciría a tres el número de interacciones fundamentales. La búsqueda por la total unificación continúa.....

Interacción gravitacional



El átomo eléctrico

LA FUERZA DE GRAVEDAD

La fuerza de atracción gravitacional, que ejerce la Tierra sobre la Luna y los satélites artificiales, es la responsable de que estos se mantengan en órbita a su alrededor. Si se considera la Tierra como una esfera uniforme de masa M y radio R, la fuerza de atracción que ejerce sobre un objeto de masa m a altura $h << R$, sobre su superficie es:

$$\vec{F}_g = G\frac{mM}{R^2}(-\hat{r})$$

Siendo $G = 6{,}67\mathrm{x}10^{-11}$ N.m²/kg², la constante de gravitación universal. En términos de la aceleración de gravedad, $\vec{g}$:

$$\vec{F}_g = m\vec{g} \qquad \text{con} \qquad \vec{g} = \frac{GM}{R^2}(-\hat{r})$$

La gravedad es la responsable del peso de los cuerpos. Al aplicar la segunda ley de Newton ($\vec{F} = m\vec{a}$) al cuerpo de masa m que cae libremente, debido a que también $\vec{F} = m\vec{g}$, se concluye que: $\vec{a} = \vec{g}$. O sea, en un mismo lugar de la Tierra todos los cuerpos caen con la misma aceleración sin importar su masa.

Peso es la fuerza que ejerce la Tierra sobre un cuerpo

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{g}}$$

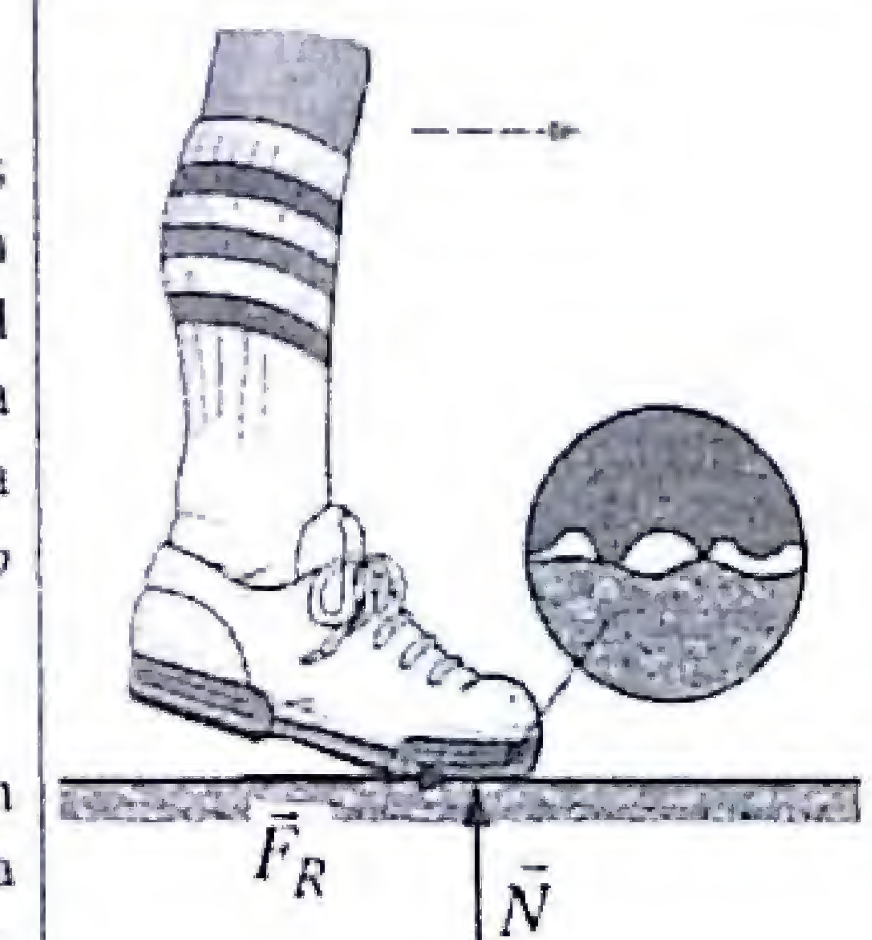
Con excepción de la gravedad terrestre, todas las fuerzas en nuestro entorno macroscópico son esencialmente de origen electromagnético. Estas fuerzas se generan a nivel microscópico entre los átomos de la materia.
Son de tipo eléctrico las fuerzas elásticas de resortes, la tensión de una cuerda y las fuerzas de contacto entre objetos, como la fricción y las fuerzas de adhesión.

FUERZA DE CONTACTO: NORMAL Y FRICCIÓN

Cuando las objetos están en contacto, se ejercen fuerzas entre sí debido a la interacción de las moléculas de un cuerpo con las del otro. La fuerza de contacto en general tiene dos componentes. Una componente perpendicular a la superficie, llamada *fuerza normal*, $\vec{N}$, y una componente tangencial, $\vec{F}_R$, llamada *fuerza de rozamiento o de fricción*.

La fuerza *normal* aparece siempre que se presione un objeto contra una superficie. Esta fuerza equilibra la fuerza que pudiera acelerar el cuerpo por la superficie, evitando que los dos materiales se penetren.

La fuerza tangencial de *fricción* se debe a interacciones moleculares que tienden a mantener unidas porciones cercanas de superficies (adhesión) y también al enganche de rugosidades.

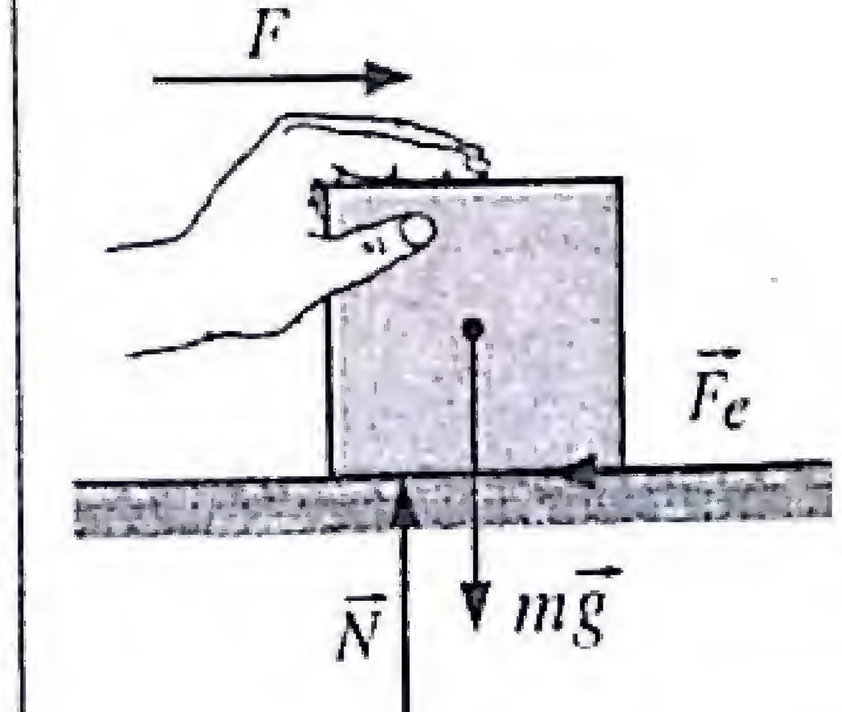


Componentes de la fuerza que ejerce el suelo sobre el zapato.

La fuerza de fricción evita que el zapato resbale hacia atrás

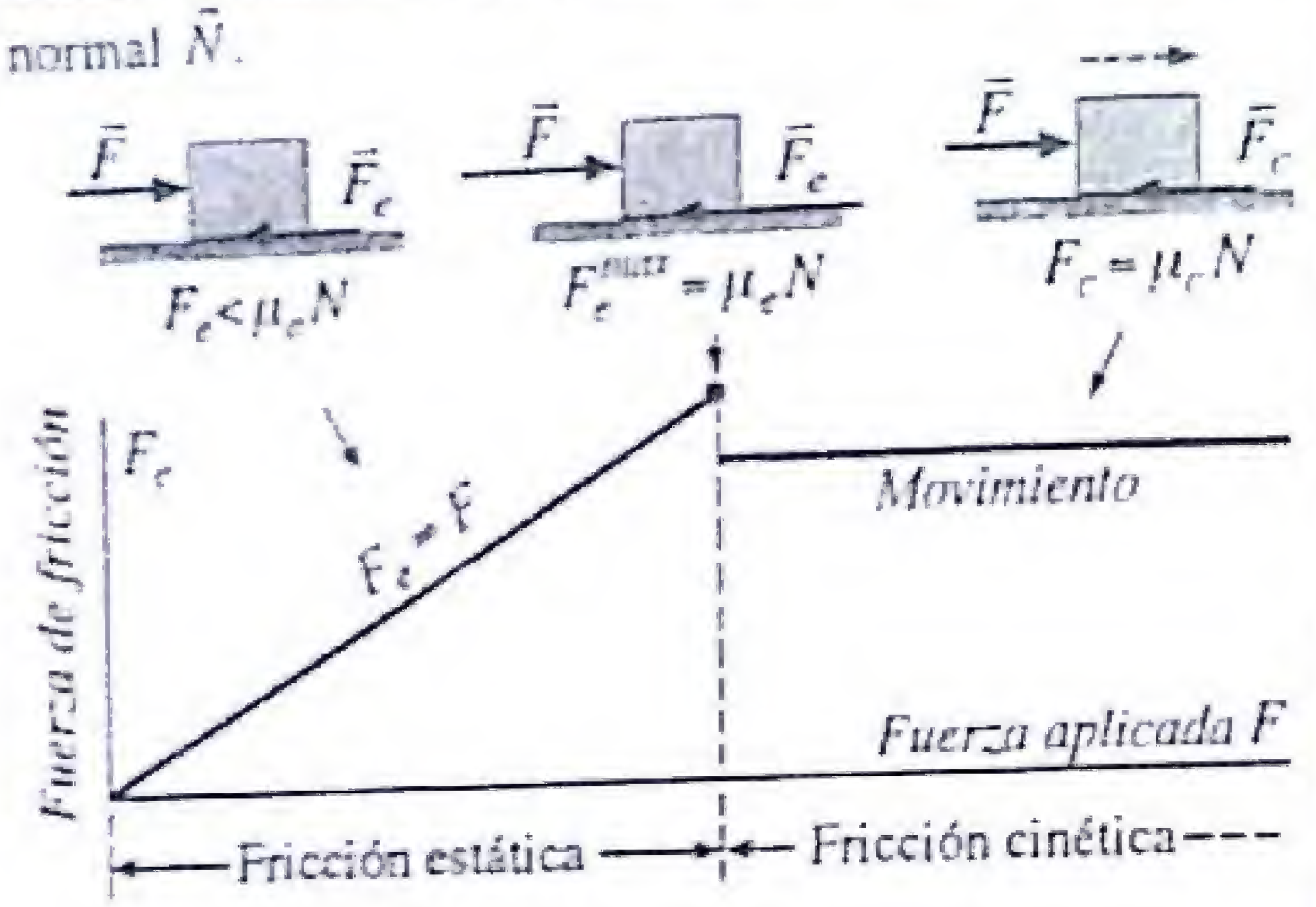
FRICCIÓN ESTÁTICA

Supongamos que tratamos de deslizar un objeto sobre una superficie horizontal aplicando una fuerza $\vec{F}$ pequeña, la fuerza de fricción $\vec{F}_e$ impide el movimiento relativo y tenemos el *caso estático*. A medida que incrementamos la fuerza aplicada, también va aumentando la fuerza de fricción estática y, si no logramos mover el objeto, es porque esta fuerza se ajusta al valor apropiado para mantener el equilibrio.



Finalmente, la fuerza de fricción estática alcanza un valor máximo, y cuando esto sucede el objeto está a punto de deslizar. El valor máximo que alcanza la fuerza de fricción estática es proporcional al valor de la fuerza normal $\vec{N}$.

$$\boxed{0 \le F_e \le \mu_e N}$$



Fuerza máxima de fricción estática

$$\boxed{F_e^{max} = \mu_e N}$$

FRICCIÓN CINÉTICA

Si la fuerza aplicada es lo suficiente grande para vencer la fricción estática, entonces ocurre deslizamiento. Una vez que el objeto está deslizándose, existe una fuerza de fricción cinética, $\vec{F}_c$, que se opone al movimiento relativo entre las dos superficies. Su valor resulta proporcional a la fuerza normal, N.

Los coeficientes de fricción dependen de la naturaleza de las superficies en contacto, siendo $\mu_c < \mu_e$. Se encuentra que estos son casi independientes del área de contacto entre las superficies.

Fuerza de fricción cinética

$$\boxed{F_c = \mu_c N}$$

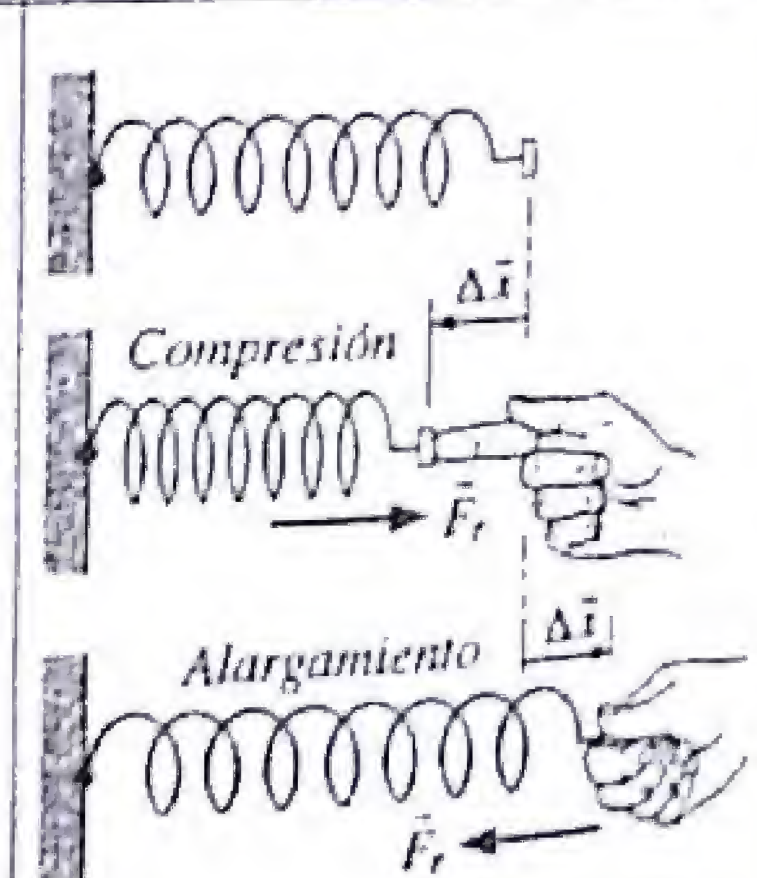
Coeficientes de fricción
$\mu_c < \mu_e$.

FUERZAS ELÁSTICAS: RESORTES

Cuando un resorte es comprimido o alargado, este ejerce una fuerza que depende de la deformación correspondiente. Si el resorte es luego dejado en libertad, retornará a su longitud original, siempre que la deformación no exceda cierto valor límite. Más allá de ese límite, el resorte queda deformado permanentemente. Para deformaciones debajo de ese límite, el resorte obedece la llamada *ley de Hooke*:

$$\vec{F}_r = -k\Delta\vec{x}$$

donde k es la constante elástica del resorte y $\Delta\vec{x}$ es el desplazamiento del extremo libre del resorte respecto a su posición de equilibrio. El signo (-) indica que la fuerza, $\vec{F}_r$, que ejerce el resorte es en sentido opuesto al desplazamiento $\Delta\vec{x}$.



Ley de Hooke

$$\vec{F}_r = -k\Delta\vec{x}$$

FUERZAS DE TENSIÓN Y DE COMPRESIÓN

Las cuerdas y las barras se emplean para transmitir fuerzas de un cuerpo a otro. Si fijamos un extremo de una cuerda flexible y tiramos de ella por el otro extremo, la cuerda queda bajo *tensión*. La tensión es la fuerza que ejerce un segmento de la cuerda sobre el segmento adyacente y es también la fuerza ejercida por un extremo de la cuerda sobre cualquier objeto unido a ella.

Sobre una cuerda no se puede ejercer fuerzas de compresión ya que tiende a doblarse o encorvarse. Es decir, con una cuerda podemos jalar objetos pero resulta imposible empujarlos. Por otra parte, una barra rígida no solamente puede transmitir una tracción o fuerza de tensión sino también una fuerza de empuje o de compresión. Usualmente vamos a considerar barras o varillas perfectamente rígidas y de longitud invariable.

Una cuerda jala pero no empuja

Una barra puede jalar y empujar

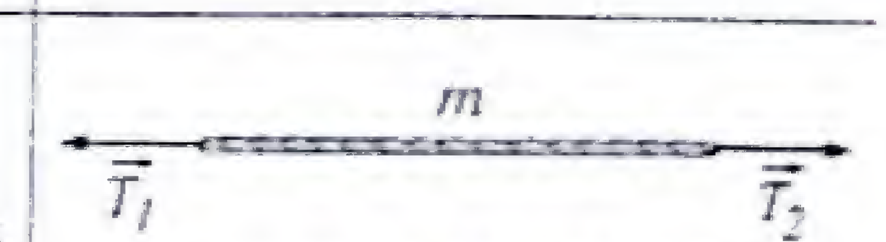
TENSIÓN EN UNA CUERDA IDEAL

Imaginemos un segmento de cuerda de masa m, cuyas tensiones en sus extremos son T_1 y T_2. Si aplicamos la 2ª ley de Newton, tenemos:

$$T_2 - T_1 = ma$$

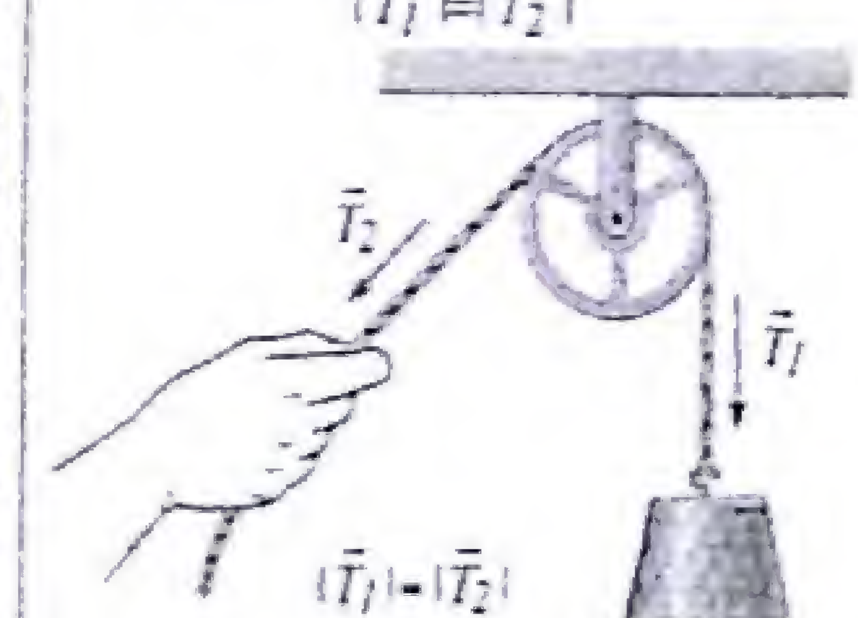
Si la cuerda es ideal ($m = 0$), para cualquier valor de la aceleración, se cumple $T_2 = T_1 = T$. Es decir, en una cuerda de masa despreciable la tensión se transmite a lo largo de toda su longitud con un valor constante.

Si una cuerda ideal pasa por una polea sin rozamiento, la fuerza de tensión $\vec{T}$ cambia de dirección a lo largo de la cuerda, pero su magnitud permanece constante.



$m = 0 \;\Rightarrow\; T_2 = T_1 = T$

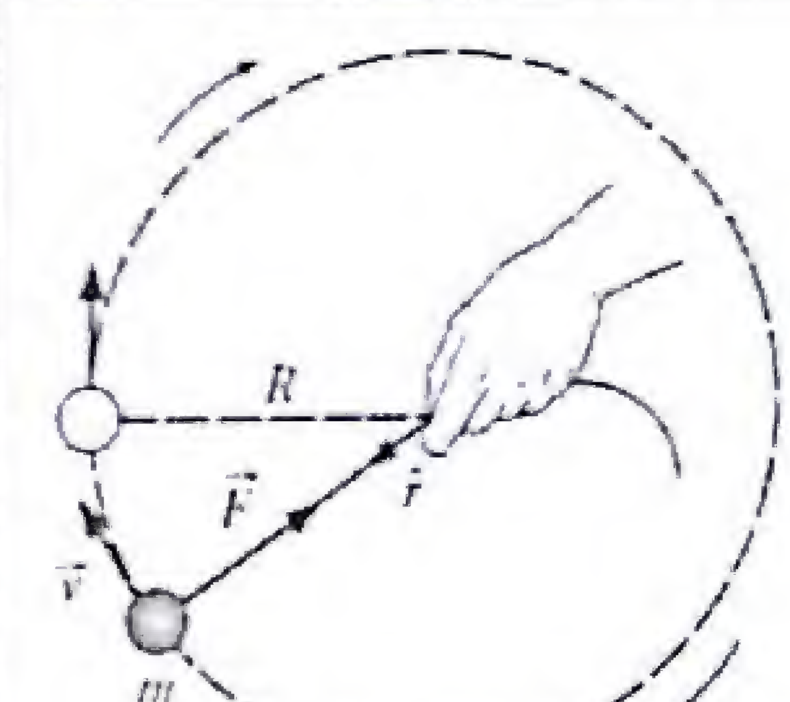
Cuerda ideal: *tensión constante*
$|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2|$



DINÁMICA DEL MOVIMIENTO CIRCULAR

Consideremos un objeto que se mueve en una circunferencia de radio R a rapidez constante, v (movimiento circular uniforme). Como el vector $\vec{v}$ cambia de dirección, decimos que el objeto experimenta una aceleración de módulo v^2/R y está dirigida hacia el centro de rotación (*aceleración centrípeta*). Según la segunda ley de Newton:

$$\vec{F} = m\frac{v^2}{R}(-\hat{r})$$



Movimiento circular uniforme:
$|\vec{v}|$ = constante

MOVIMIENTO CIRCULAR NO UNIFORME

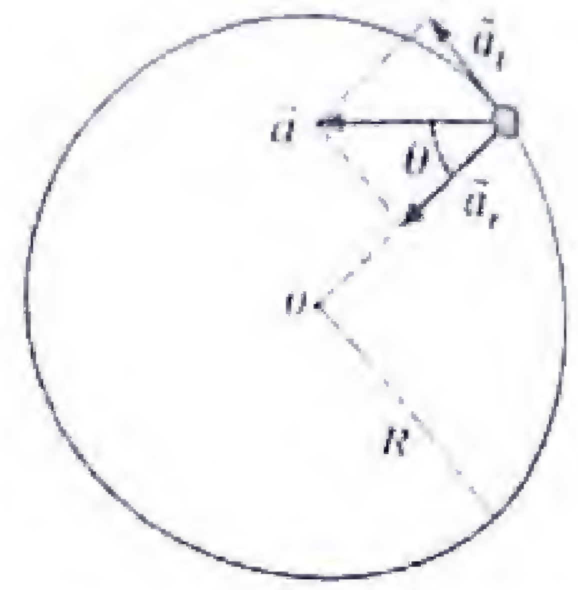
Si la fuerza aplicada a un objeto en rotación no se dirige hacia el centro de la circunferencia sino que forma un cierto ángulo con la línea radial, entonces la aceleración de la partícula tiene dos componentes, una radial y otra tangencial.

La componente *tangencial* de la fuerza actúa para aumentar o disminuir el módulo de la velocidad y origina una aceleración tangencial:

$$a_t = dv / dt$$

La componente *radial* provoca el cambio en la dirección del vector velocidad:

$$a_r = v^2 / R$$

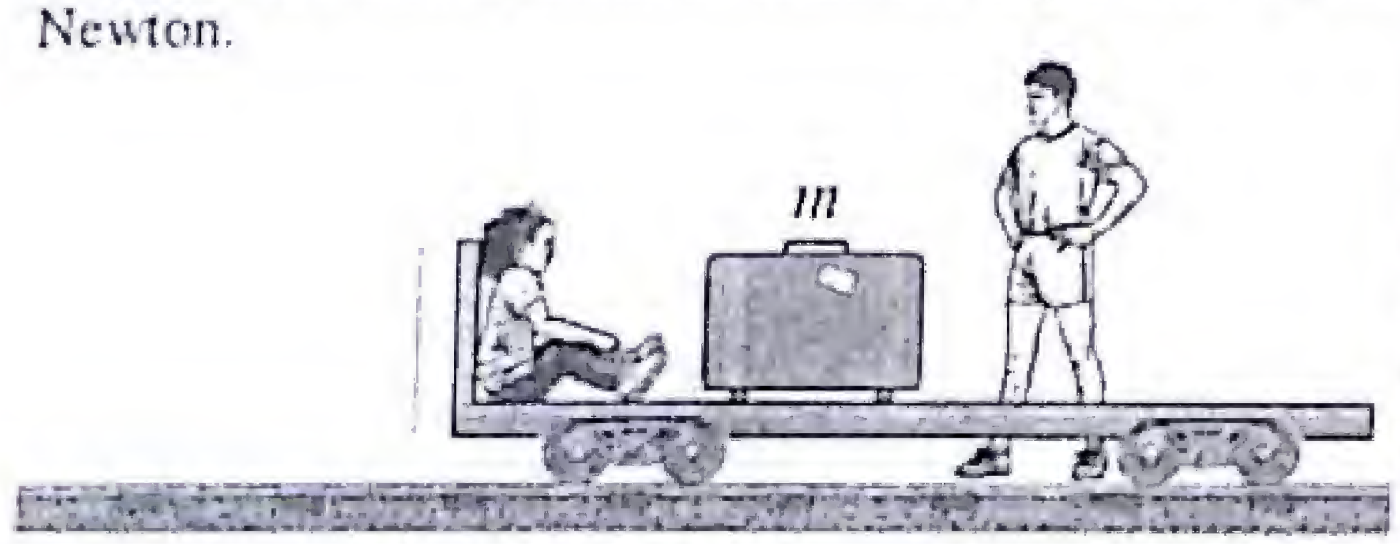


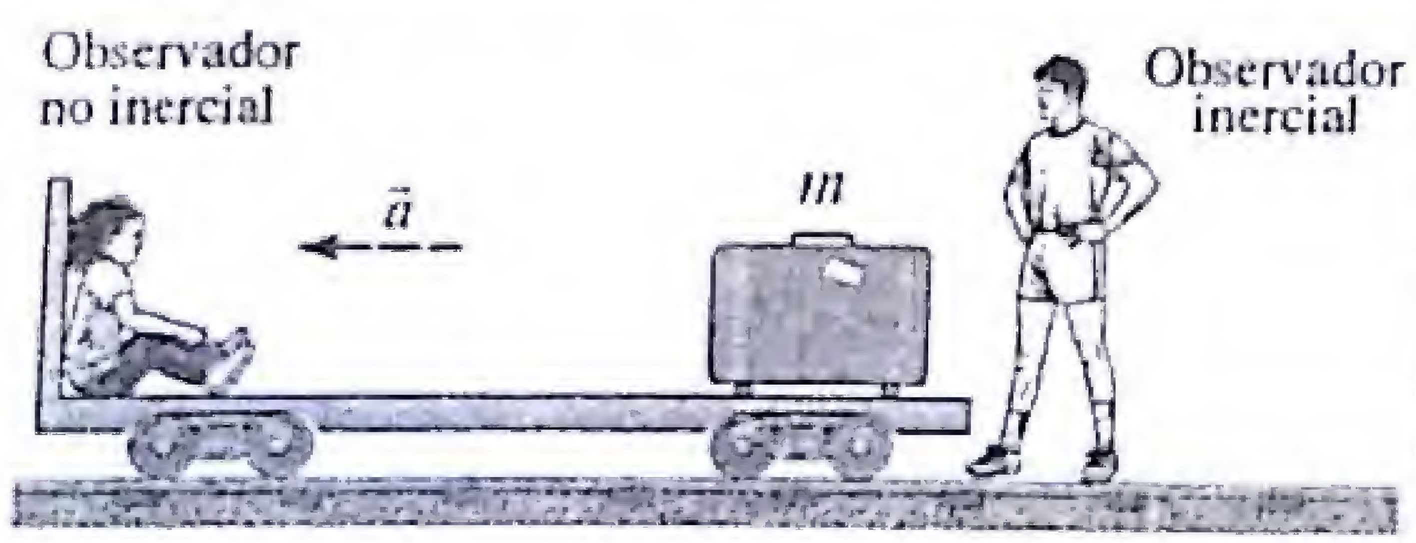
Aceleración en el movimiento circular no-uniforme

$$\boxed{\vec a = \vec a_r + \vec a_t}$$

FUERZAS EN SISTEMAS ACELERADOS

Las leyes de Newton sólo son válidas para observadores *inerciales*. Supongamos una estudiante que sube al tren llevando consigo una maleta con ruedas. Cuando el tren arranca con una aceleración $\vec a$, el observador inercial en tierra, *OI*, nota que la maleta que está sobre la plataforma "no se mueve" y concluye que sobre ésta no actúa ninguna fuerza neta, como lo establece la primera ley de Newton.

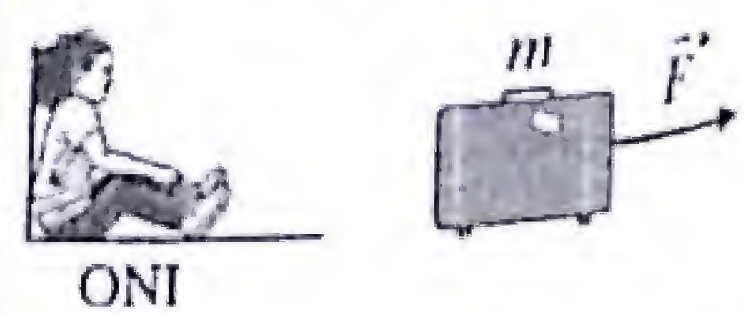




Pero la observadora no inercial (*ONI*) que va en el tren no comparte esta opinión, ya que ella ve con asombro que su maleta "se va alejando". A pesar de ello si la *ONI* está empeñada en aplicar la segunda ley de Newton, debe suponer "por decreto" que sobre la maleta actúa una fuerza misteriosa dirigida hacia atrás: $\vec F^* = -m\vec a$.

Según la observadora no inercial existe una pseudo-fuerza

$$\boxed{\vec F^* = -m\vec a}$$



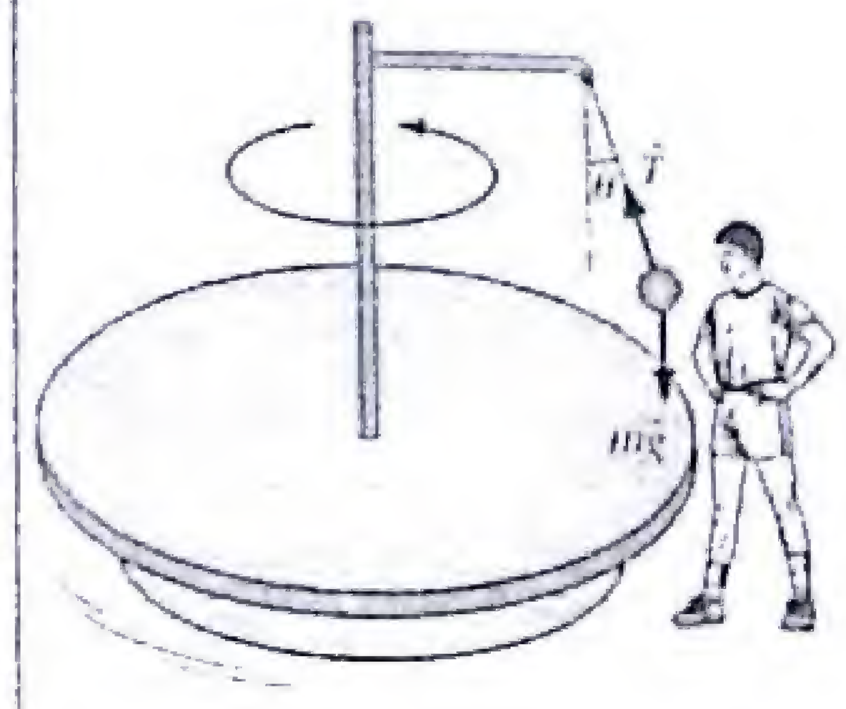
Esta fuerza se llama fuerza *inercial* o *pseudo-fuerza* ya que su existencia depende únicamente del movimiento del observador y no está asociada a ningún mecanismo de interacción. Es decir, la fuerza no es ejercida por ningún agente externo y por lo tanto no cumple la tercera ley de Newton.

Las pseudo-fuerzas no obedecen la 3ª ley de Newton

Estas fuerzas en marcos acelerados también son llamadas fuerzas *ficticias*, sin embargo, son tan reales por sus efectos como lo es la fuerza de gravedad.

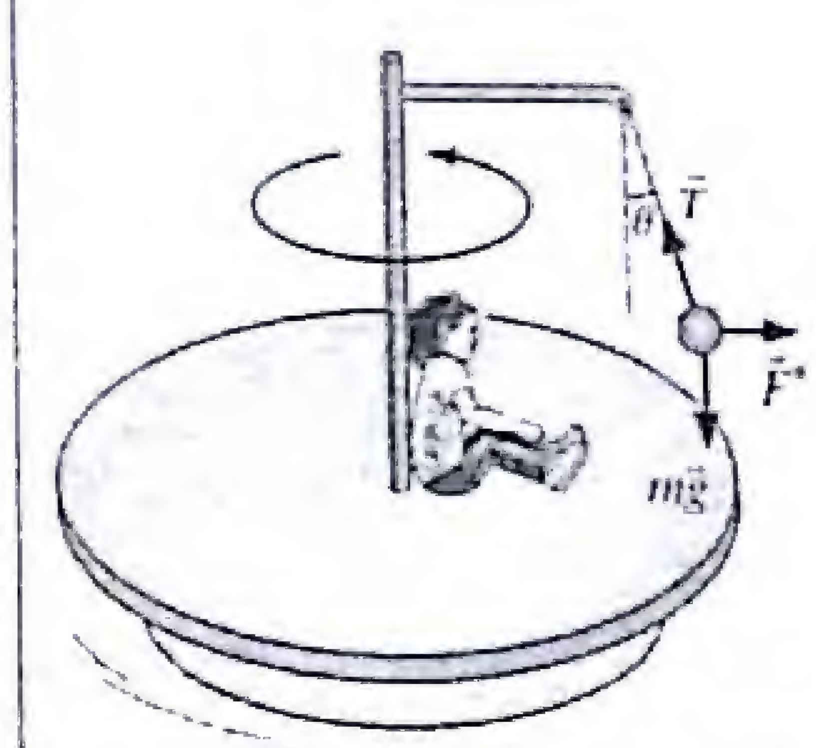
PSEUDO-FUERZAS EN MARCOS GIRATORIOS

La figura muestra una esferita de masa m suspendida de un hilo atado a una plataforma que gira a velocidad angular ω. Un observador inercial (*OI*) ubicado afuera, ve la esferita describir una circunferencia de radio R a velocidad angular ω. Él explica su observación diciendo que la esferita está acelerada hacia el centro de la circunferencia y su aceleración centrípeta $\omega^2 R$ es debida a una *fuerza centrípeta* (hacia adentro) no equilibrada, que en este caso es la componente horizontal de la tensión de la cuerda.



Para el observador inercial hay una fuerza centrípeta:
$F = T sen\theta$

La observadora no inercial (*ONI*) girando con la plataforma, interpreta el fenómeno de otra manera. Según ella la *esferita está en reposo* y no acelera. Ella insiste en aplicar la 2ª ley de Newton y como no hay ningún agente identificable que empuje la esferita hacia afuera, se ve en la necesidad de inventar una pseudo-fuerza de magnitud $m\omega^2 R$ que actúa radialmente "hacia afuera" Esta fuerza de inercia equilibra la componente horizontal de la tensión de la cuerda y así la fuerza neta sobre la esferita es cero.



Para la observadora no inercial hay una fuerza centrífuga:

$$\boxed{F^* = m\omega^2 R}$$

La pseudo fuerza que es percibida por un observador girando recibe el nombre de *fuerza centrífuga* (hacia afuera). Este tipo de fuerza es bastante familiar a todos por el efecto que sentimos cuando damos la curva en un automóvil, como una especie de mano invisible que nos empuja hacia el exterior de la curva.

Es importante aclarar que *la fuerza centrífuga nunca está presente para observadores inerciales*. Visto desde el exterior del automóvil, lo que sucede es que la fricción entre los cauchos y la carretera suministra la fuerza centrípeta que acelera al automóvil mismo. La fuerza normal centrípeta de la puerta del automóvil, empuja al pasajero y lo obliga a moverse en la trayectoria curva.

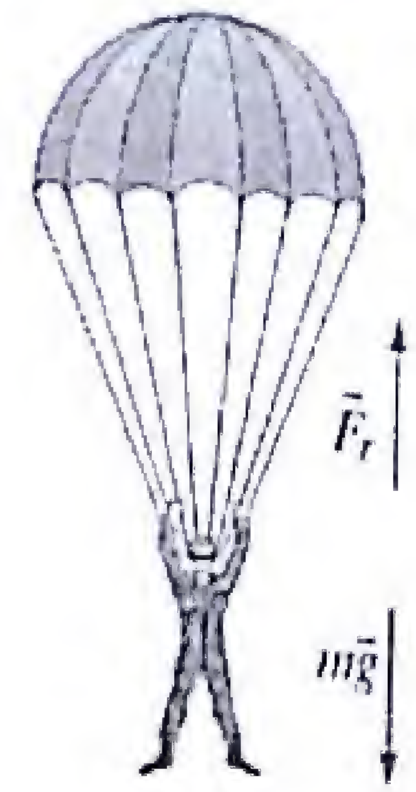
FUERZAS DE CORIOLIS

Por último, debemos mencionar que si un objeto está en movimiento respecto de un marco de referencia giratorio, además de la fuerza centrífuga, aparece una segunda pseudofuerza, llamada *fuerza de Coriolis*, que actúa en dirección normal al vector velocidad.

FUERZAS RESISTIVAS EN UN FLUIDO

Pueden existir fuerzas de resistencia viscosa entre un fluido (líquido o gas) y un sólido con movimiento relativo al fluido y también fricción entre partes del mismo fluido. Un cuerpo que se mueve a través de un fluido experimenta una fuerza resistiva que es dependiente de la forma del cuerpo y de las propiedades del medio en que se mueve. Por lo general, esta fuerza aumenta con la velocidad.

En el caso de un cuerpo que cae en un fluido, la fuerza de resistencia actúa en sentido contrario al movimiento y cuando se hace igual al peso del cuerpo que cae, éste alcanza su velocidad máxima o terminal.

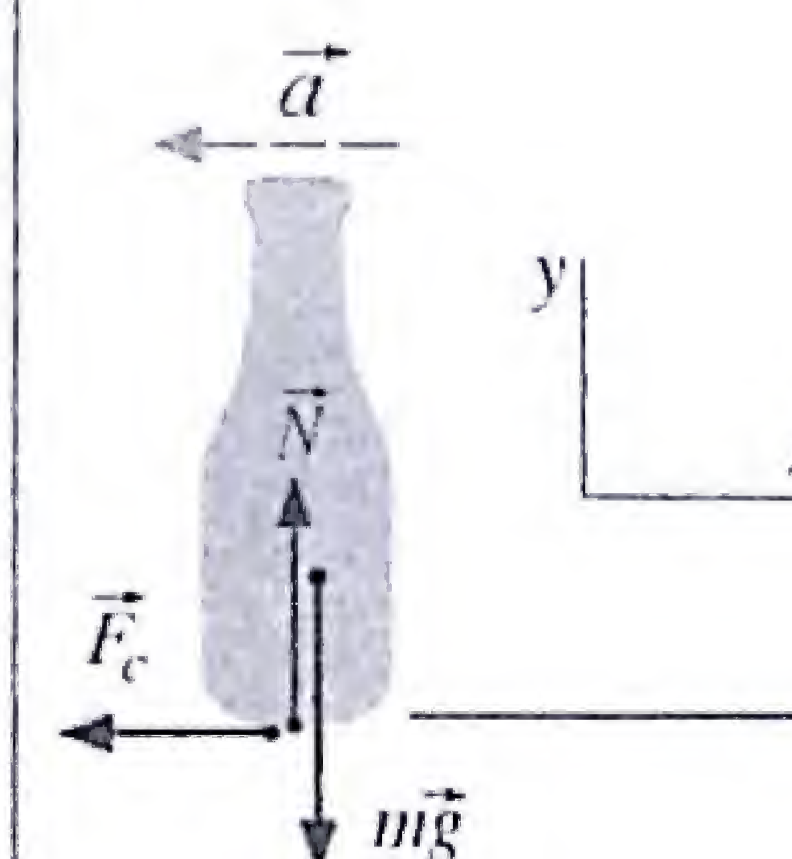


PROBLEMAS RESUELTOS

PR-2.01. *¡ Pásame la salsa !*

Una botella de masa $m = 0{,}5$ kg es lanzada por la superficie de una mesa horizontal con una velocidad inicial $v_o = 1{,}5$ m/s, hacia la derecha. La botella se desliza en línea recta y recorre una distancia $x = 0{,}25$ m antes de detenerse. Suponiendo que la fuerza de fricción permanece constante, ¿cuál es el coeficiente de fricción cinética entre la botella y la mesa?

Solución: Una vez lanzada la botella, las fuerzas que actúan sobre ella son: su peso $m\vec{g}$, la fuerza normal ejercida por la mesa, $\vec{N}$, y la fuerza de fricción cinética, $\vec{F}_c$, la cual le produce una deceleración horizontal.



Aplicando la segunda ley de Newton en forma de componentes:

$$\sum F_y = N - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg$$

$$\sum F_x = -F_c = ma \quad \Rightarrow \quad -\mu_c N = -\mu_c mg = ma$$

Por lo tanto, la aceleración es:

$$a = -\mu_c g$$

Como la aceleración es constante, podemos utilizar la ecuación de cinemática, con la velocidad final nula:

$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$

$$v_0^2 + 2ax = v_0^2 - 2\mu_c gx = 0$$

Por lo tanto, el coeficiente de fricción cinética entre la botella y la mesa es:

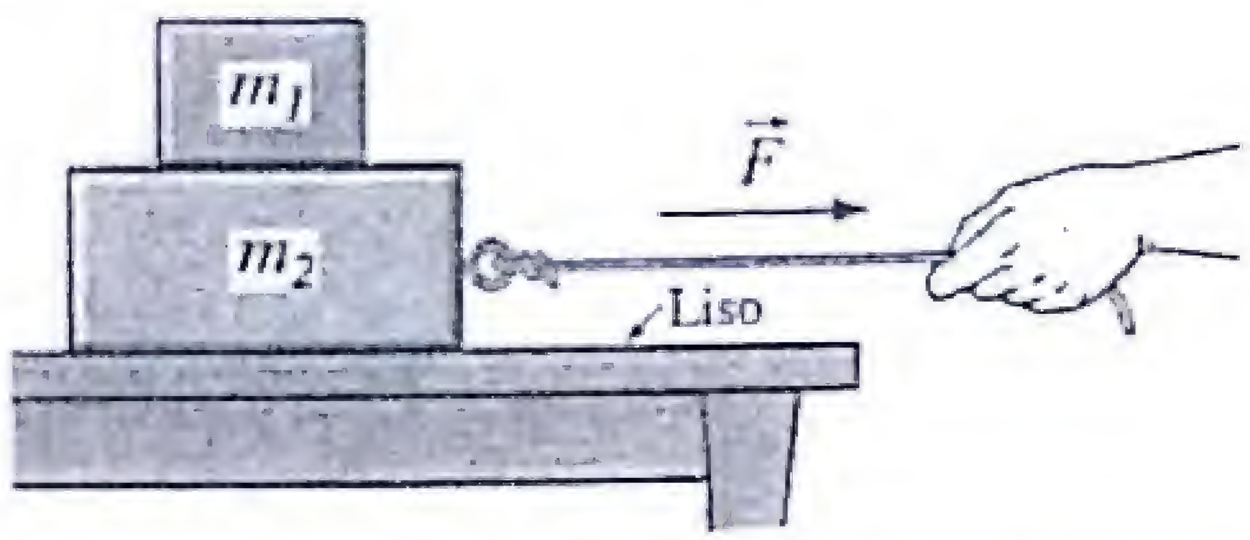
$$\mu_c = \frac{v_0^2}{2gx} = \frac{(1{,}5\text{m/s})^2}{2(9{,}8\text{m/s}^2)(0{,}25\text{m})} = 0{,}46$$

Respuesta:

$$\boxed{\mu_c = 0{,}46}$$

PR-2.02. *Solo la fricción mueve al bloque m_1*

Un bloque de masa m_1 se coloca sobre otro bloque de masa m_2, el cual a su vez descansa sobre una superficie horizontal pulida. Se aplica una fuerza horizontal $\vec{F}$ al bloque m_2.



Halle la aceleración de cada bloque en los siguientes casos:

a) Cuando no hay fricción entre los bloques.

b) Cuando las superficies entre los bloques es suficiente áspera para asegurar que m_1 no resbale sobre m_2.

c) Cuando el bloque superior resbala sobre el inferior debido a la influencia de la fricción cinética con coeficiente μ_c.

Solución: a) Cuando no hay fricción, sobre el bloque m_1 no se ejerce ninguna fuerza horizontal y su aceleración será cero ($a_1 = 0$). Sobre el bloque m_2 se aplica una fuerza neta F y su aceleración es:

$$a_2 = F / m_2$$

b) Cuando existe suficiente fricción entre los bloques, se trasladan juntos. Aplicando la 2ª ley de Newton a la masa combinada:

$$\sum F_x = F = (m_1 + m_2)a \quad \Rightarrow \quad a_1 = a_2 = a = \frac{F}{m_1 + m_2}$$

c) Al aplicar la 2ª. ley de Newton a cada bloque, tenemos:

Bloque 1: $$\sum F_y = N_1 - m_1 g = 0 \qquad (1)$$

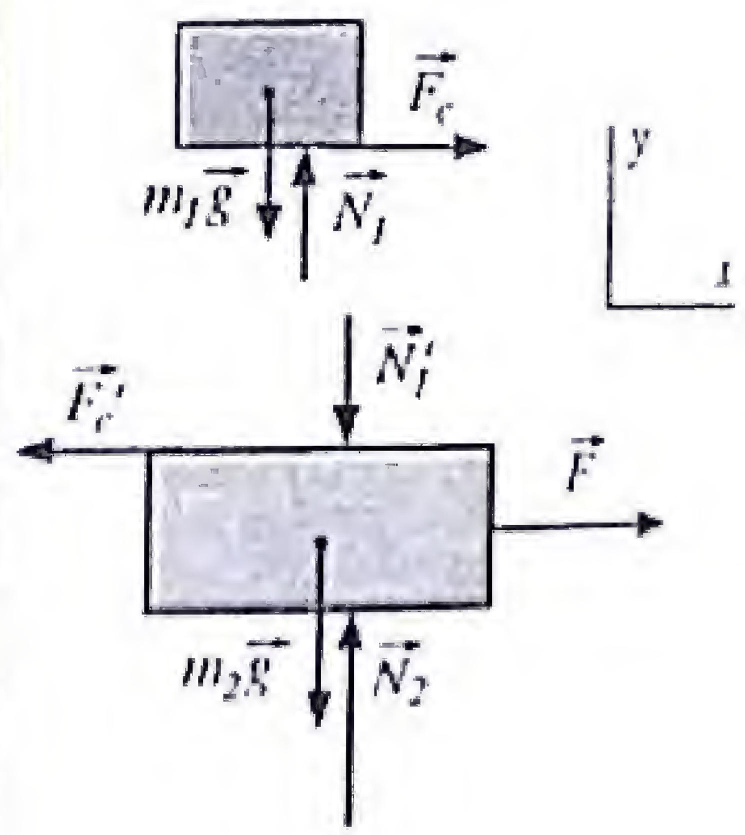
$$\sum F_x = F_c = \mu_c N_1 = m_1 a_1 \qquad (2)$$

Combinando las ecuaciones (1) y (2) hallamos: $a_1 = \mu_c g$

Bloque 2: $$\sum F_x = F - F_c = m_2 a_2 \qquad (3)$$

Tomando en cuenta que la fuerza de fricción cinética que empuja al bloque m_1 es $F_c = \mu_c m_1 g$, tenemos:

$$a_2 = \frac{F - \mu_c m_1 g}{m_2}$$



Respuesta

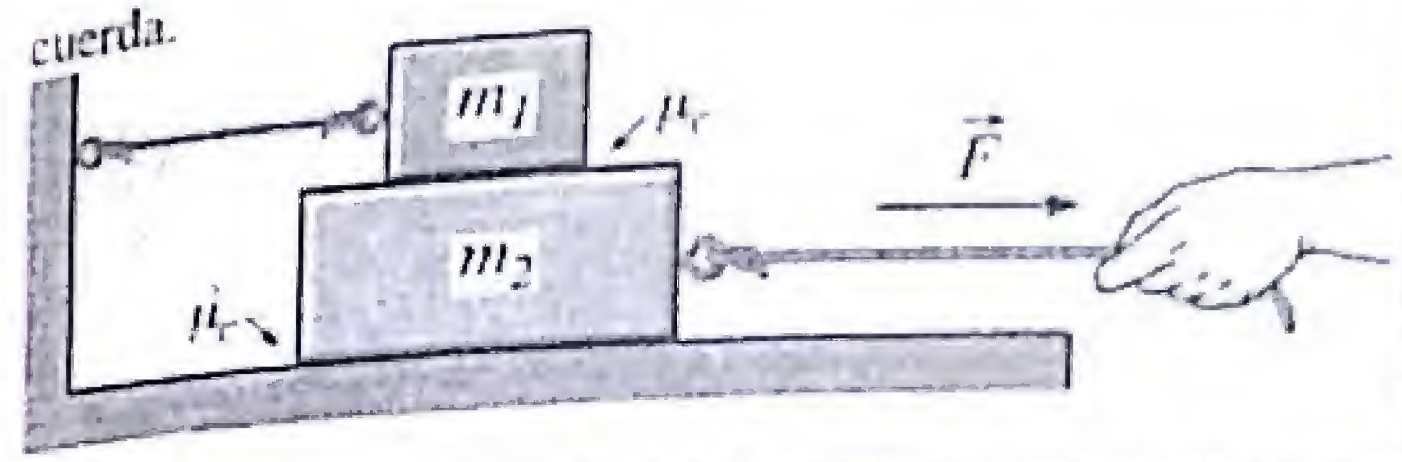
a) $a_1 = 0,\ a_2 = \dfrac{F}{m_2}$

b) $a_1 = a_2 = \dfrac{F}{m_1 + m_2}$

c) $a_1 = \mu_c g,\ a_2 = \dfrac{F - \mu_c m_1 g}{m_2}$

PR-2.03. *Deslizando un bloque debajo de otro*

Un bloque de masa m_1 se coloca sobre un bloque de masa m_2. Se aplica al bloque m_2 una fuerza horizontal $\vec{F}$, en tanto que el bloque m_1 se sujeta a la pared mediante una cuerda.



Si el coeficiente de fricción cinética entre todas las superficies es μ_c. Determine:

a) La tensión de la cuerda que sostiene m_1.

b) La aceleración del bloque m_2.

Solución: Consideremos los diagramas de cuerpo libre para cada bloque por separado. El bloque m_1 no se mueve y al aplicar la segunda ley de Newton, tenemos:

Bloque 1: $$\sum F_x = F_{c1} - T = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu_c N_1 = T \qquad (1)$$

$$\sum F_y = N_1 - m_1 g = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = m_1 g \qquad (2)$$

Combinando las ecuaciones (1) y (2) se obtiene la tensión de la cuerda:

$$T = \mu_c m_1 g$$

Por otra parte, el bloque m_2 acelera hacia la derecha:

Bloque 2: $$\sum F_x = F - F_{c1} - F_{c2} = m_2 a \qquad (3)$$

$$\sum F_y = N_2 - N_1 - m_2 g = 0 \qquad (4)$$

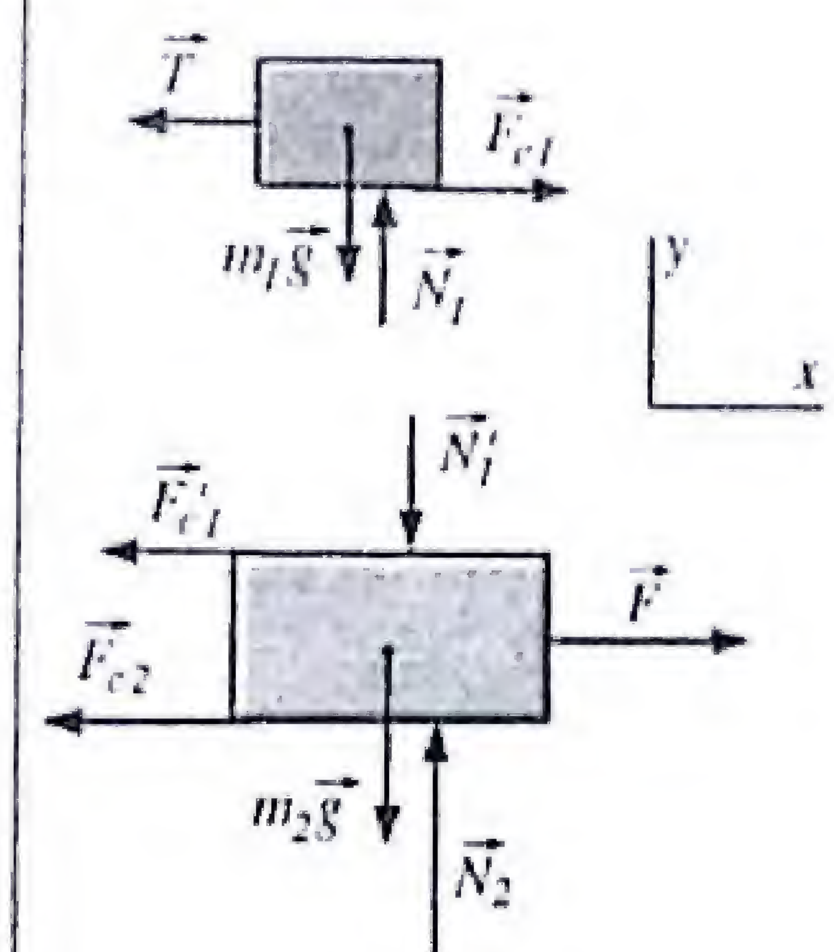
Sustituyendo las expresiones de N_1, F_{c1} y F_{c2}:

$$F - \mu_c m_1 g - \mu_c N_2 = m_2 a \qquad (5)$$

$$N_2 - m_1 g - m_2 g = 0 \qquad (6)$$

Multiplicando la Ec. 6 por μ_c y sumándole la Ec. 5, obtenemos la aceleración a de m_2:

$$a = \frac{F - (2m_1 + m_2)\mu_c g}{m_2}$$



Respuesta

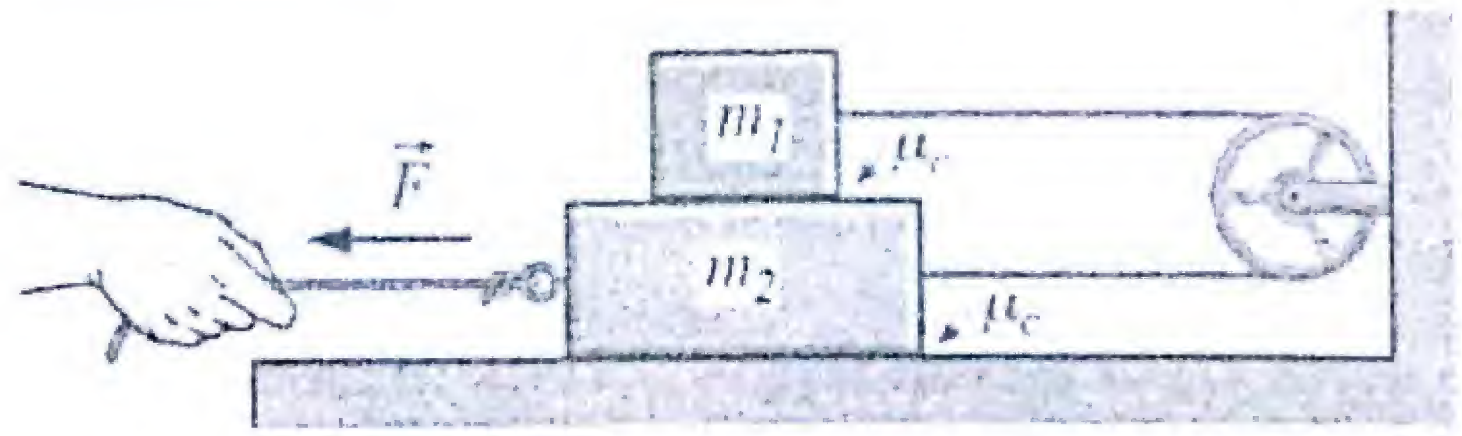
a) $T = \mu_c m_1 g$

b) $a = \dfrac{F - (2m_1 + m_2)\mu_c g}{m_2}$

PR-2.04. *Hay que arrastrarlos con rapidez constante*

En una superficie horizontal se encuentra un bloque de masa $m_2 = 2$ kg y sobre éste se coloca otro bloque de masa $m_1 = 1$ kg.

Los bloques están acoplados mediante un hilo que pasa por una polea sin fricción y el coeficiente de fricción cinética entre todas las superficies es $\mu_c = 0,20$. Determine la magnitud de la fuerza $\vec{F}$ con que hay que jalar el bloque m_2 para arrastrarlo con rapidez constante.



Solución: En el bloque m_1:

$$\sum F_y = N_1 - m_1 g = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = m_1 g$$

Para que la aceleración horizontal sea nula, la tensión de la cuerda equilibra la fuerza de fricción cinética:

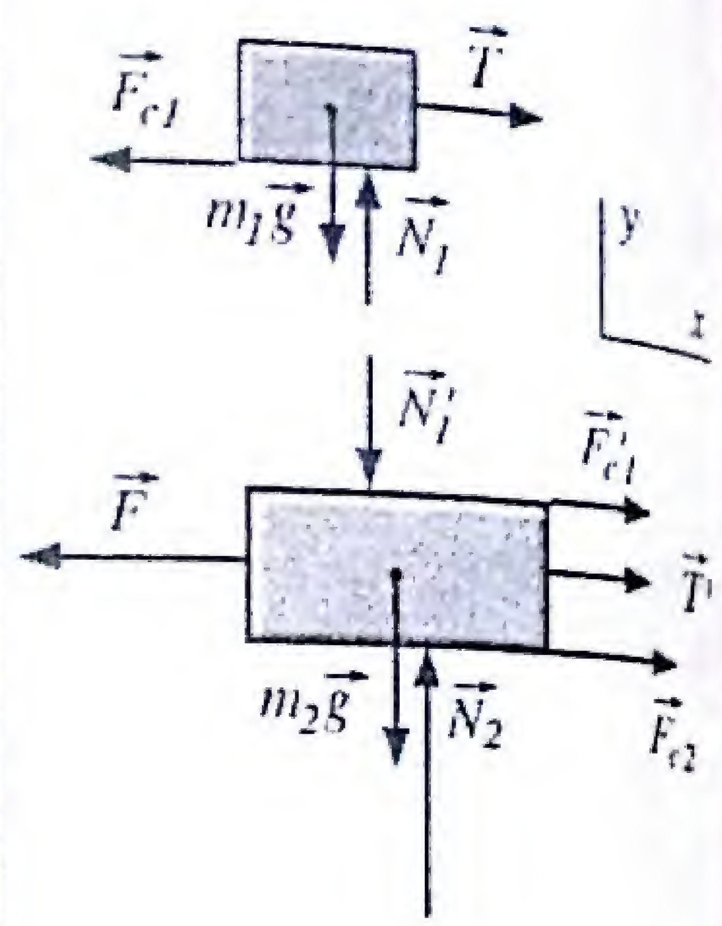
$$\sum F_x = T - F_{c1} = 0 \quad \Rightarrow \quad T = F_{c1} = \mu_c N_1 = \mu_c m_1 g$$

En el bloque m_2:

$$\sum F_y = N_2 - N_1 - m_2 g = 0$$

$$\Rightarrow \quad N_2 = N_1 + m_2 g = (m_1 + m_2)g$$

En la dirección horizontal la fuerza $\vec{F}$ debe equilibrar la tensión de la cuerda y las dos fuerzas de fricción cinética:



$$\sum F_x = T + F_{c1} + F_{c2} - F = 0$$

$$F = T + \mu_c N_1 + \mu_c N_2 = \mu_c m_1 g + \mu_c m_1 g + \mu_c (m_1 + m_2) g$$

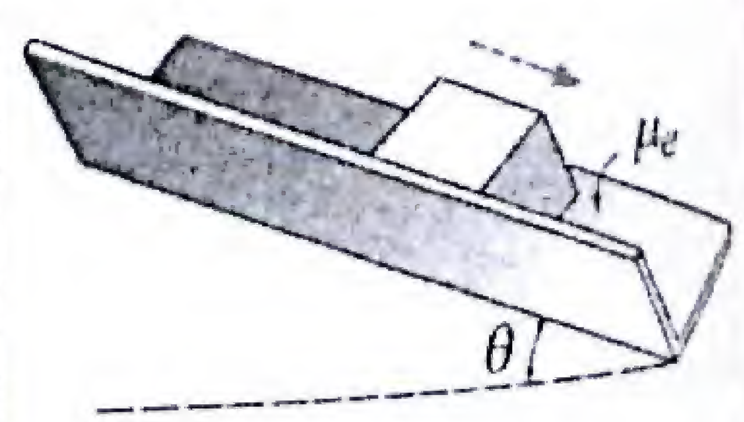
$$F = \mu_c (3m_1 + m_2) g = (0,2)[3(1\text{kg}) + (2\text{kg})9,8\text{m/s}^2] = 9,8\text{N}$$

Respuesta:

$$\boxed{F = 9,8\text{N}}$$

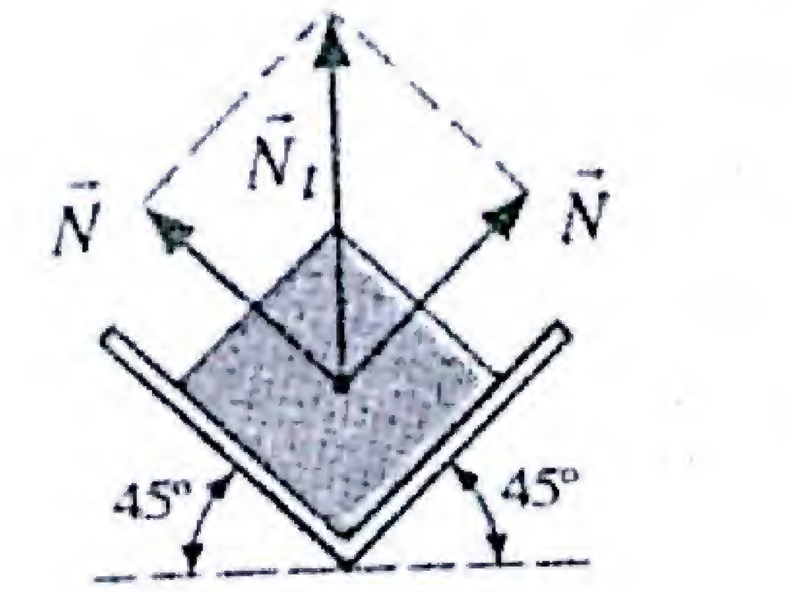
PR-2.05. *Cubo deslizando por un canal rectangular*

Un cubo se desliza hacia abajo por un canal de paredes a ángulo recto que está inclinado a un ángulo θ. Si el coeficiente de fricción cinética entre el cubo y la superficie del canal es μ_c, determine la aceleración del cubo.



Solución: Cada cara del cubo que asienta en el perfil ejerce una fuerza normal N inclinada de modo que la fuerza normal resultante $\vec{N}_t$ apunta en dirección normal al filo inferior del cubo y su magnitud es:

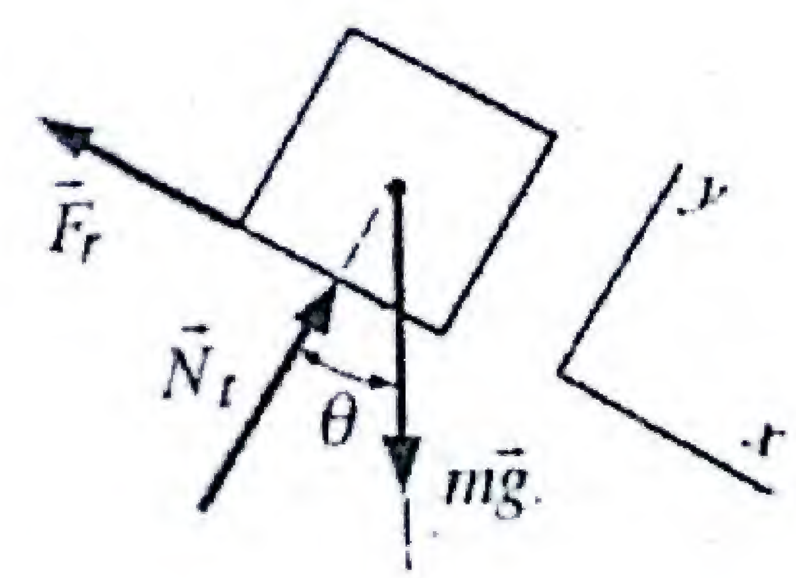
$$N_t = 2N\cos 45° = 2N\sqrt{2}/2 = \sqrt{2}N$$



La segunda ley de Newton en componentes es:

$$\sum F_x = mgsen\theta - F_r = ma \qquad (1)$$

$$\sum F_y = N_t - mgcos\theta = 0 \qquad (2)$$



La fuerza de fricción cinética se ejerce en ambas caras y la resultante tiene magnitud:

$$F_r = 2\mu_c N = 2\mu_c\left(\frac{N_t}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\mu_c N_t$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (1) se obtiene:

$$mgsen\theta - \sqrt{2}\mu_c N_t = ma$$

Reemplazando N_t de la ecuación (2), encontramos la aceleración:

$$mgsen\theta - \sqrt{2}\mu_c mg\cos\theta = ma$$

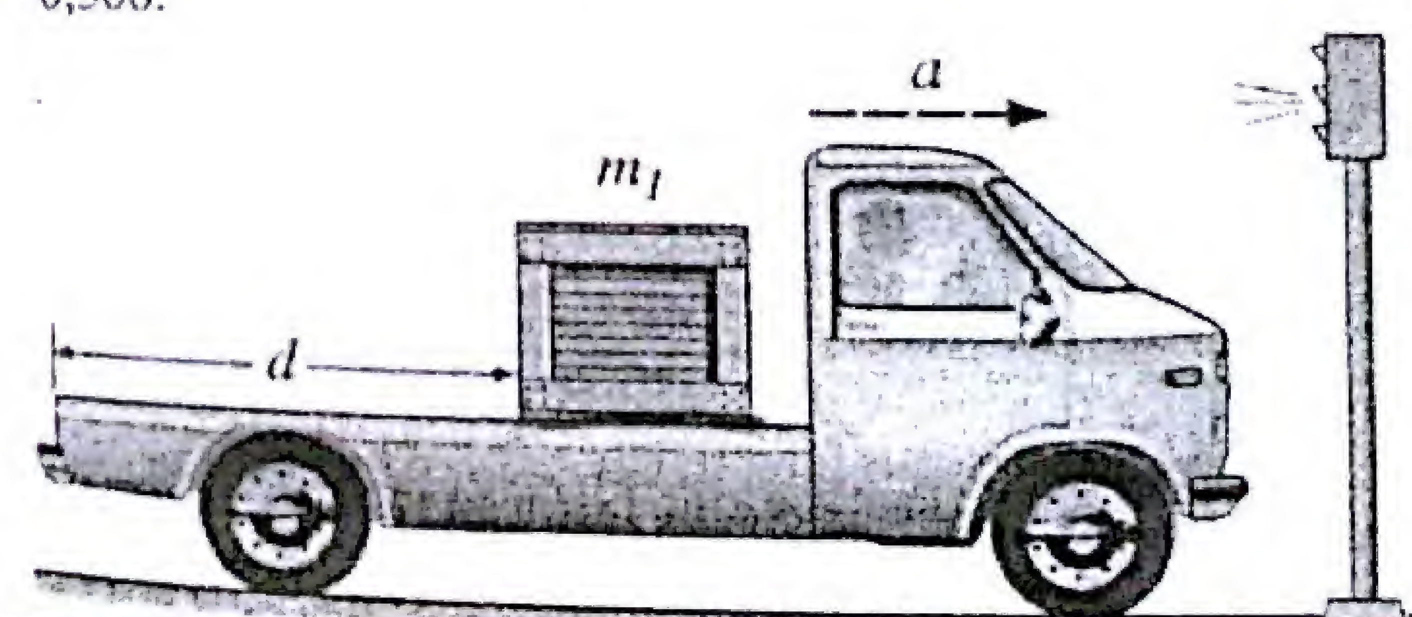
$$a = g(sen\theta - \sqrt{2}\mu_c\cos\theta)$$

Respuesta:

$$\boxed{a = g(sen\theta - \sqrt{2}\mu_c\cos\theta)}$$

PR-2.06. *Si arranca muy rápido, la caja deslizará.*

Una caja de masa $m_1 = 50$ kg está sobre la plataforma de un camión a una distancia $d = 4,5$ m del borde. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre la caja y la plataforma son respectivamente, $\mu_e = 0,40$ y $\mu_c = 0,306$.



Cuando prende la luz verde del semáforo, el conductor arranca con una aceleración $a = 4$ m/s^2.

a) Demuestre que la caja deslizará en la plataforma.

b) ¿Al cabo de cuánto tiempo caerá la caja afuera del camión?

c) ¿Qué distancia habrá viajado el camión durante ese tiempo?

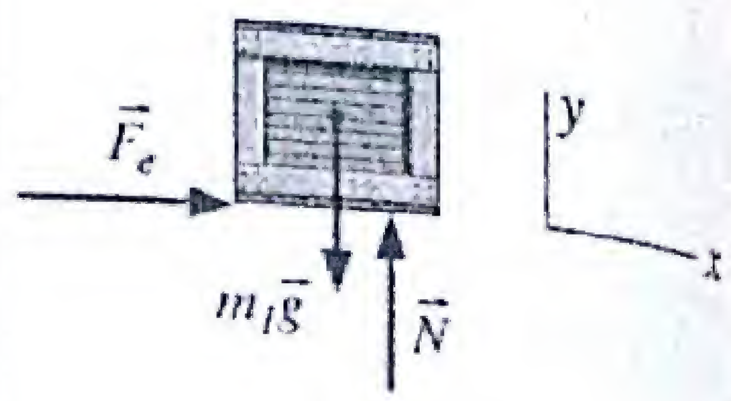
Solución: a) Calculemos cuál sería la aceleración máxima de la caja como resultado de alcanzar el valor máximo de la fuerza de fricción estática:

$$\sum F_y = N - m_1 g = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N = m_1 g$$

$$\sum F_x = F_e = m_1 a \qquad \Rightarrow$$

$$F_e^{max} = \mu_e N = \mu_e m_1 g = m_1 a_{max}$$

$$a_{max} = \mu_e g = (0{,}40)(9{,}8\text{m/s}^2) = 3{,}92\text{m/s}^2$$



Como la aceleración del camión (a = 4 m/s²) excede el valor máximo, la caja deslizará en la plataforma.

b) La aceleración de la caja debida a la fuerza de fricción cinética es:

$$\sum F_x = F_c = \mu_c N = \mu_c m_1 g = m_1 a_1$$

$$a_1 = \mu_c g = (0{,}306)(9{,}8\text{m/s}^2) = 3\text{m/s}^2$$

En el tiempo t la distancias que viajan el camión y la caja son, respectivamente:

$$x = \frac{1}{2} a t^2 \qquad\qquad x_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2$$

En el momento en que la caja cae fuera del camión la diferencia entre estas distancias es:

$$x - x_1 = d = \frac{1}{2} a t^2 - \frac{1}{2} a_1 t^2$$

Despejando el tiempo, resulta:

$$t = \sqrt{\frac{2d}{a - a_1}} = \sqrt{\frac{2(4{,}5\text{m})}{4\text{m/s}^2 - 3\text{m/s}^2}} = 3\text{s}$$

c) La distancia que habrá viajado el camión durante ese tiempo es:

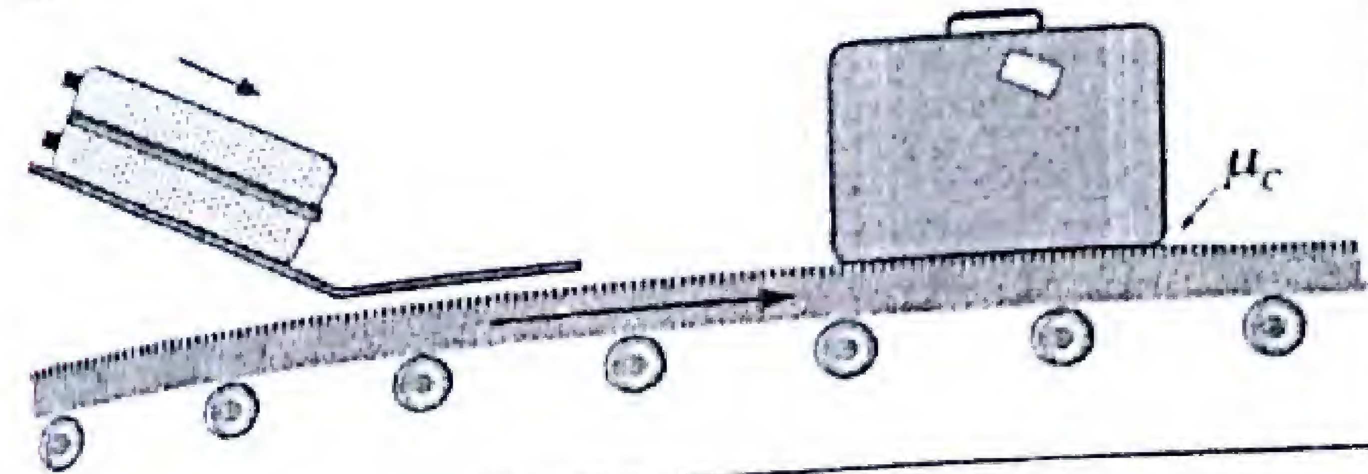
$$x = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} 4\text{m/s}^2 (3\text{s})^2 = 18\text{m}$$

Respuesta

a) La caja desliza
b) $t = 3$s
c) $x = 18$m

PR-2.07. *¿Por cuánto tiempo patinará la maleta?*

Una banda transportadora de equipajes se mueve a rapidez constante 0,5 m/s. Sobre la banda cae suavemente una maleta con una velocidad inicial cero con respecto al suelo.



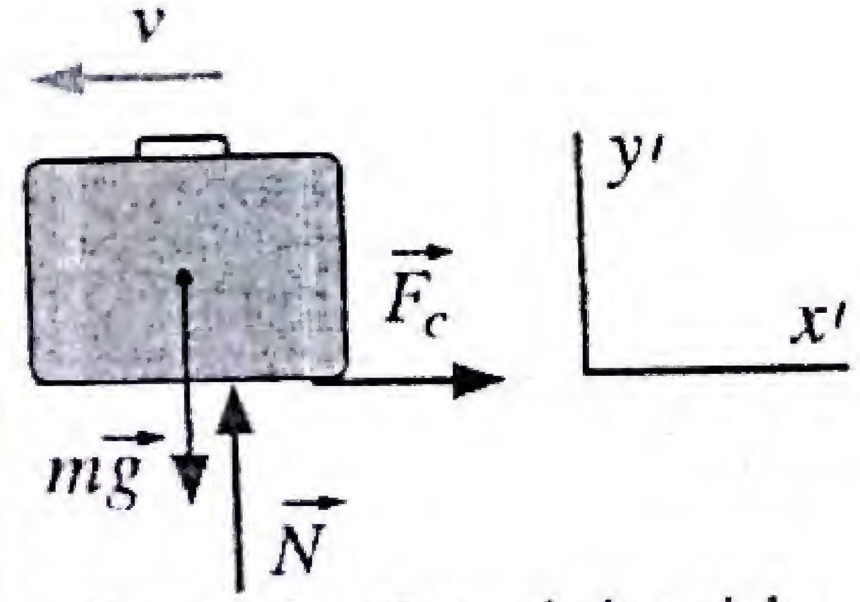
El coeficiente cinético de fricción entre la maleta y la banda es μ_c = 0,30.
La maleta desliza sobre la banda antes de moverse con esta
a) ¿Por cuánto tiempo patinará la maleta sobre la banda?
b) ¿Qué distancia viajará la maleta durante este tiempo?

Solución: La banda transportadora se desplaza a velocidad constante y constituye un marco de referencia inercial. En este marco de referencia, la maleta cambia su velocidad desde - 0,5 m/s hasta cero en un tiempo t bajo la acción de la fuerza de fricción cinética:

$$\sum F_y = N - mg = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N = mg$$

$$\sum F_x = F_c = ma \qquad \Rightarrow \qquad \mu_c N = \mu_c mg = ma$$

$$a = \mu_c g$$



Marco de referencia inercial de la banda transportadora

Como la aceleración es constante y la velocidad final es cero, para el tiempo de deslizamiento obtenemos:

$$v = 0 = v_0 + at \qquad \Rightarrow$$

$$t = -\frac{v_0}{a} = -\frac{v_0}{\mu_c g} = -\frac{-0{,}5\text{m/s}}{0{,}3(9{,}8\text{m/s}^2)} = 0{,}17\text{s}$$

b) El desplazamiento de la maleta en ese tiempo es:

$$v^2 = 0 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

$$\Delta x = x - x_0 = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2\mu_c g} = \frac{(-0{,}5\text{m/s})^2}{2(0{,}3)(9{,}8\text{m/s}^2)} = -0{,}0425\text{m}$$

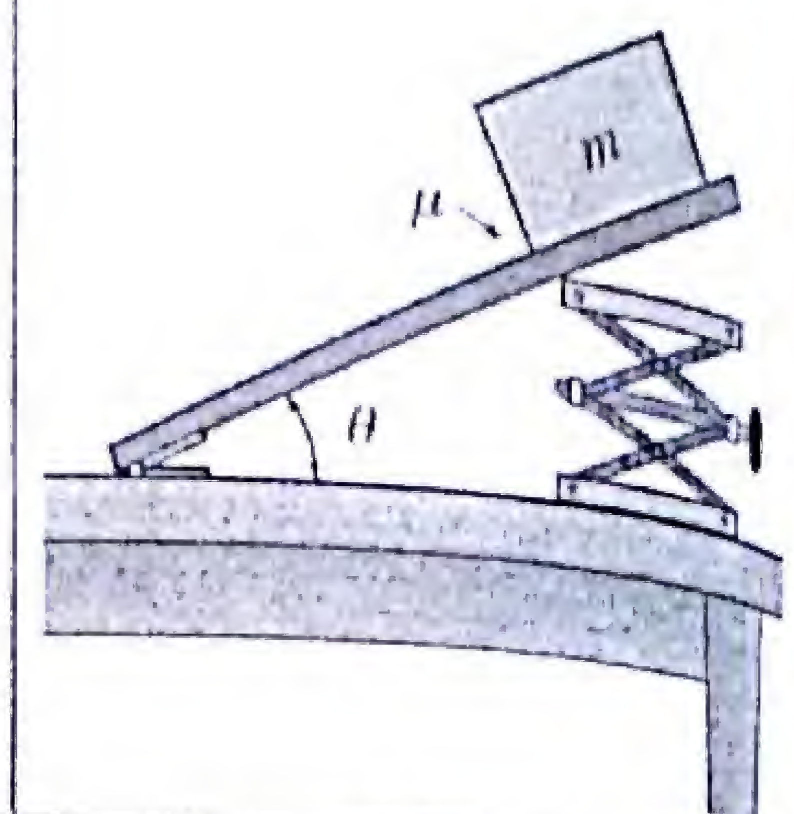
Es decir, la maleta se desplaza hacia atrás respecto a la banda transportadora, antes de empezar a moverse con ésta.

Respuesta

a) $t = 0{,}17$s
b) $\Delta x =$ 4,25 cm

PR-2.08. *¿Cómo medir los coeficientes de fricción?*

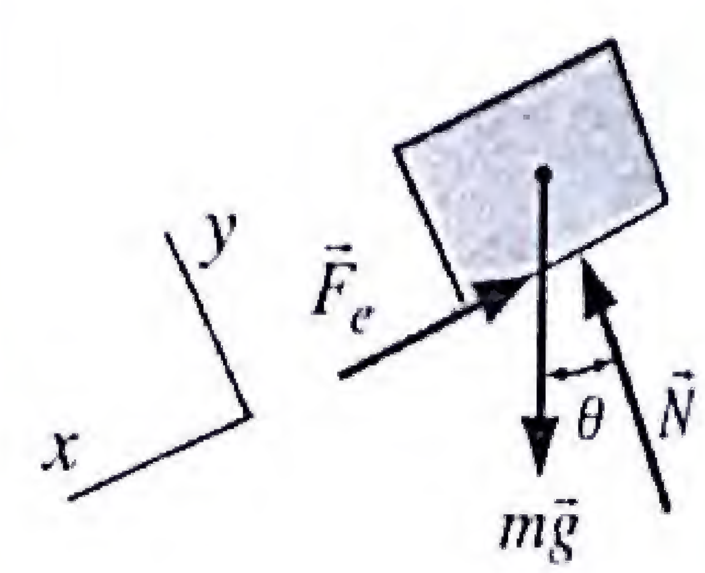
En una práctica de laboratorio, para determinar los coeficientes de fricción estático μ_e y cinético, μ_c entre dos superficies, se coloca un bloque sobre un plano de inclinación variable y, poco a poco se aumenta el ángulo de inclinación θ Cuando el ángulo alcanza un cierto valor crítico, θ_0, el bloque se despega y comienza a deslizarse hacia abajo. Suponga que $\theta_0 = 30°$, y que el bloque desciende una distancia $\Delta x = 4$ m en un tiempo $t = 4$ s, ¿cuánto valen los coeficientes de fricción?



Solución: a) Para ángulos inferiores a θ_0 el bloque está en equilibrio estático. Eligiendo el eje x paralelo al plano y el eje y perpendicular al mismo, de la 2ª ley de Newton resulta.

$$\sum F_x = mgsen\theta - F_e = 0 \quad \Rightarrow \quad F_e = mgsen\theta \qquad (1)$$

$$\sum F_y = N - mgcos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mgcos\theta \qquad (2)$$



Dividiendo la Ec. (1) entre la Ec. (2) y tomando en cuenta que para el ángulo crítico, θ_0, la fricción estática alcanza su valor límite:

$$F_e = F_e(max) = \mu_e N$$

encontramos:

$$\mu_e = tg\theta_0 \quad \Rightarrow \quad \mu_e = tg30° = 0{,}58$$

El coeficiente de fricción estática es igual a la tangente del ángulo para el cual el bloque comienza justamente a deslizar.

Una vez que el bloque se despega al movimiento del bloque se opone la fuerza de fricción cinética, $F_c = \mu_c N$. La ecuación de movimiento:

$$\sum F_x = mgsen\theta_0 - \mu_c N = ma$$

Sustituyendo $N = mgcos\theta$ se obtiene la aceleración:

$$a = g(sen\theta_0 - \mu_c cos\theta_0)$$

La distancia recorrida es: $\Delta x = at^2/2$. Reemplazando a en la ecuación anterior obtenemos:

$$\mu_c = tg\theta_0 - \frac{2\Delta x}{gt^2 cos\theta_0}$$

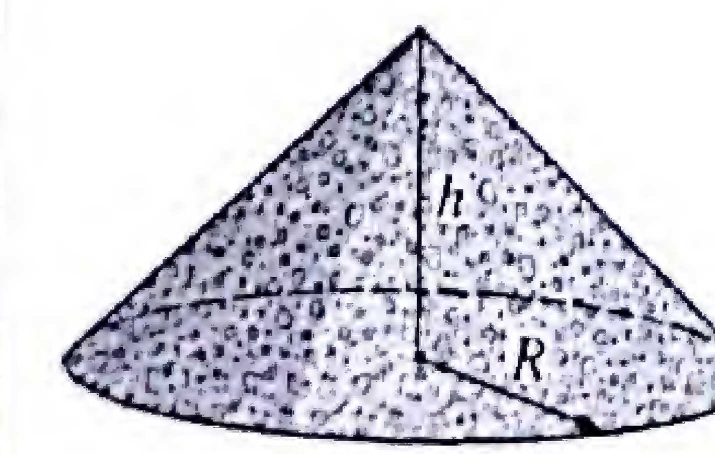
$$\mu_c = tg30° - \frac{2(4m)}{(9{,}8m/s^2)(4s)^2 cos30°} = 0{,}52$$

Respuesta:

$\mu_e = tg30° = 0{,}58$
$\mu_c = 0{,}52$

PR-2.09. *Apilando el máximo volumen de arena*

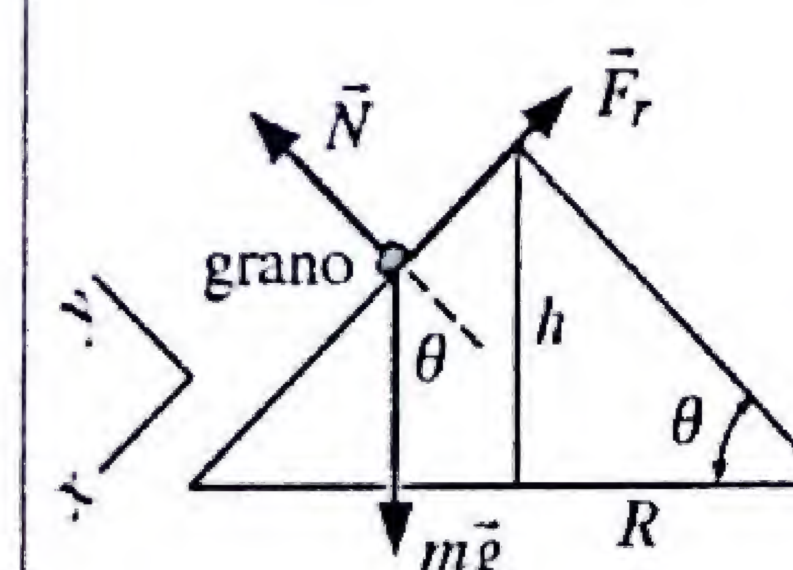
Se desea apilar un cono de arena sobre un suelo plano de área circular de radio R. Si μ_e es el coeficiente de fricción estática entre cada capa de granos y la adyacente sobre la cual puede deslizar, determine el mayor volumen posible de arena que podría ser apilada de esta manera.



Solución: Consideremos el diagrama de cuerpo libre para un grano de arena adicional para lograr un volumen del cono lo mayor posible:

$$\sum F_x = mgsen\theta - F_r = 0 \quad \Rightarrow \quad F_r = mgsen\theta \qquad (1)$$

$$\sum F_y = N - mgcos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mgcos\theta \qquad (2)$$



Si el grano no desliza se debe cumplir la condición:

$$F_r < \mu_e N,$$

es decir:

$$mgsen\theta < \mu_e mg cos\theta \quad \Rightarrow \quad tg\theta < \mu_e$$

La superficie cónica alcanzará la mayor pendiente si se cumple:

$$tg\theta_{max} = \frac{h}{R} = \mu_e$$

Por lo tanto, el mayor volumen de arena que se obtendría es:

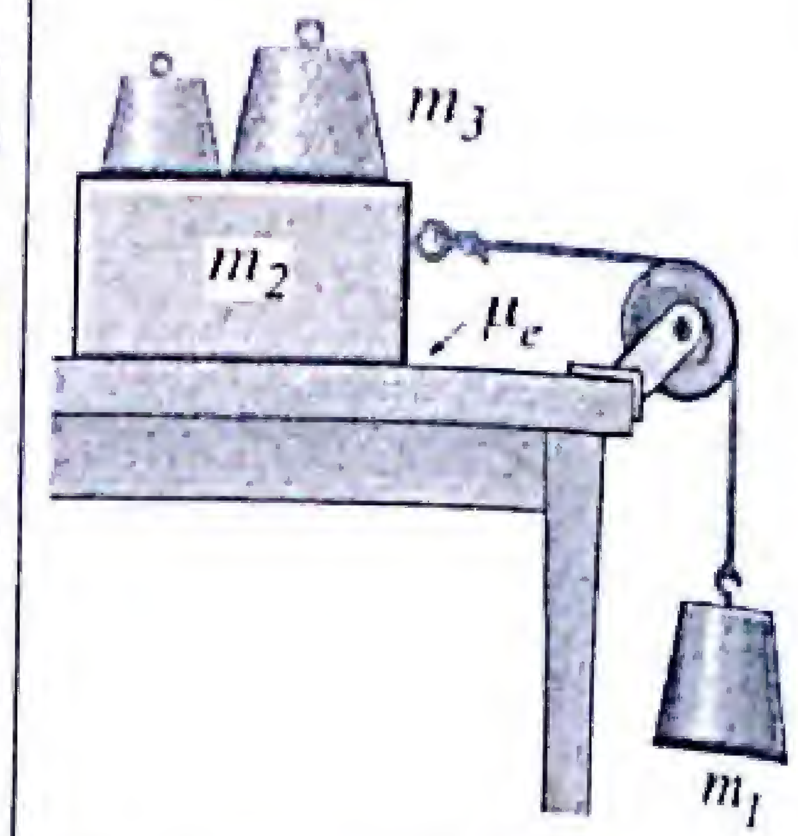
$$V = \frac{1}{3}Ah = \frac{1}{3}(\pi R^2)(\mu_e R) = \frac{\pi\mu_e R^3}{3}$$

Respuesta:

$$V = \frac{\pi\mu_e R^3}{3}$$

PR 2.10. *Midiendo el coeficiente de fricción estática*

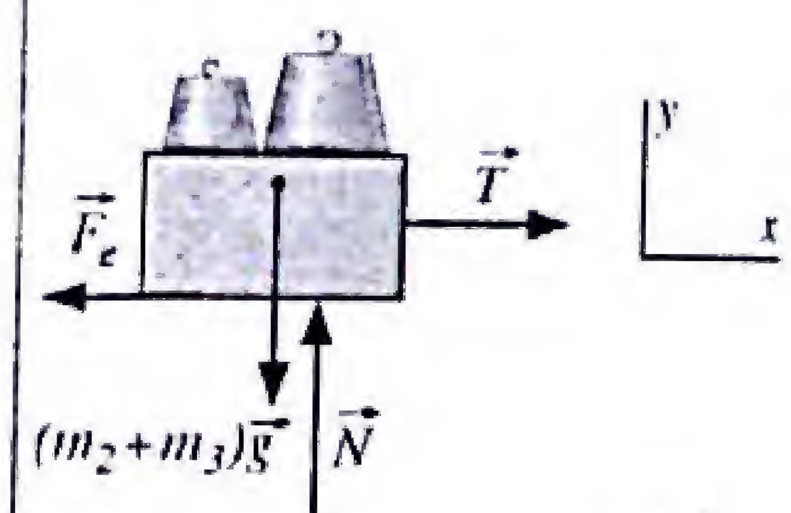
Un bloque de masa m_2 está sobre una mesa horizontal, unido a una pesa de masa m_1, el cual queda suspendida mediante una cuerda que pasa por una polea sin fricción.
a) Se van colocando gradualmente pesas sobre el bloque m_2 hasta llegar a un valor crítico, m_3, para el cual el sistema no se mueve. Halle el coeficiente estático, μ_e.
b) Sabiendo que μ_c es el coeficiente de fricción cinética entre el bloque m_2 y la mesa, ¿cuál sería la aceleración del sistema si de repente retiramos todas las pesas que totalizan el valor crítico m_3?



Solución: a) Aplicando la 2a ley de Newton cuando el sistema combinado ($m_2 + m_3$), está a punto de deslizar:

$$\sum F_x = T - F_e = 0 \quad \Rightarrow \quad T = F_e = \mu_e N \qquad (1)$$

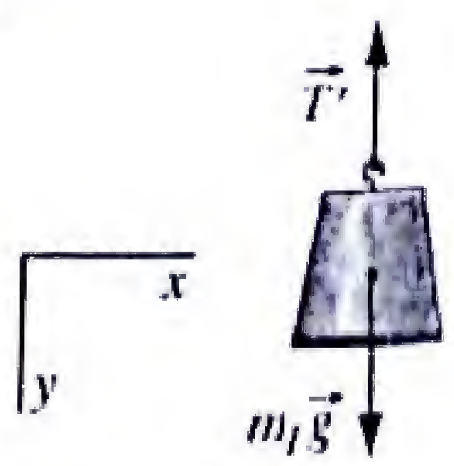
$$\sum F_y = N - (m_2 + m_3)g = 0 \Rightarrow N = (m_2 + m_3)g \qquad (2)$$



Combinando las ecs. (1) y (2): $T = \mu_e(m_2 + m_3)g$ (3)

Para el equilibrio del bloque m_1, con $T' = T$ se tiene:

$$\sum F_y = m_1 g - T = 0 \quad \Rightarrow \quad T = m_1 g \qquad (4)$$



Igualando las dos expresiones (3) y (4), encontramos:

$$\mu_e = \frac{m_1}{m_2 + m_3}$$

b) Cuando retiramos las pesas m_3 los bloques m_1 y m_2 se moverán con una aceleración a, y las ecuaciones son:

$$\sum F_x = T - F_c = m_2 a \quad \Rightarrow \quad T = m_2 a + \mu_c m_2 g \qquad (5)$$

$$\sum F_y = m_1 g - T = m_1 a \quad \Rightarrow \quad T = m_1 g - m_1 a \qquad (6)$$

Igualando las expresiones (5) y (6) para la tensión encontramos la aceleración:

$$a = \frac{m_1 - \mu_c m_2}{m_1 + m_2} g$$

Respuesta:

a) $\mu_e = \dfrac{m_1}{m_2 + m_3}$

b) $a = \dfrac{m_1 - \mu_c m_2}{m_1 + m_2} g$

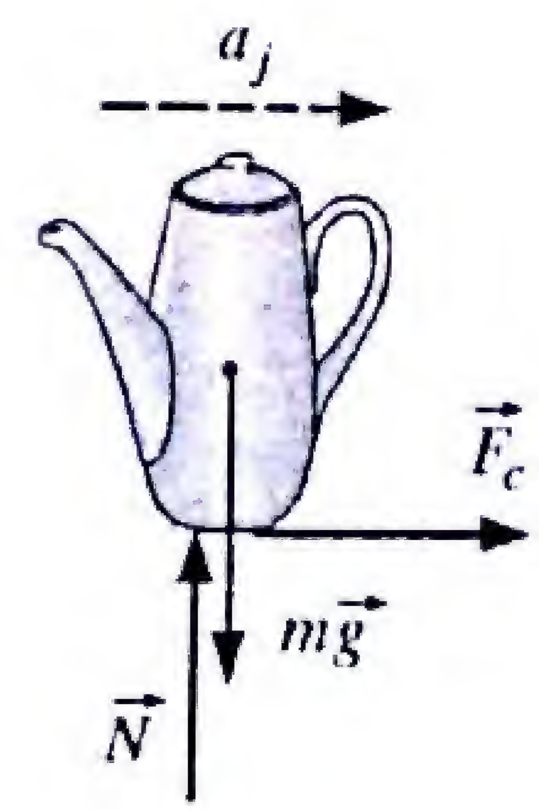
PR-2.11. *Inténtelo cuando no haya nadie en casa*

En una demostración de física de la USB para ilustrar las leyes de Newton, colocamos un jarrón sobre una mesa con un mantel y luego jalamos éste lo suficiente rápido, de modo que el jarrón sufre apenas un pequeño desplazamiento.

Suponga que inicialmente, el borde del mantel coincide con el borde opuesto de la mesa y que el jarrón está a una distancia inicial x_0 = 20 cm. El coeficiente de fricción cinética entre el mantel y el jarrón es μ_c = 0,306. Si se jala el mantel con una aceleración media a_m = 42 m/s², determine el desplazamiento del jarrón cuando el borde del mantel pase justo por debajo de su centro.

Solución: La fuerza de fricción cinética que ejerce el mantel sobre el jarrón $\vec{F}_c$ hace que éste se acelere hacia la derecha. Por la segunda ley de Newton, tenemos:

$$\sum F_x = F_c = m a_j \quad \Rightarrow \quad \mu_c m g = m a_j$$



Simplificando, se obtiene la aceleración del jarrón:

$$a_j = \mu_c g = 0{,}204(9{,}8\text{m/s}^2) = 2\text{m/s}^2$$

Por ser $a_j < a_m$, el jarrón desliza sobre el mantel. Cuando el borde del mantel pasa por debajo del jarrón, estarán a igual distancia del borde de la mesa:

$$x_j = x_m \quad \Rightarrow \quad x_j^0 + \frac{1}{2}a_j t^2 = x_m^0 + \frac{1}{2}a_m t^2$$

$$0{,}2\text{m} + \frac{1}{2}(2\text{m/s}^2)t^2 = \frac{1}{2}(42\text{m/s}^2)t^2$$

Despejando el tiempo, se obtiene t = 0,1 s. El desplazamiento del jarrón durante este tiempo será:

$$\Delta x = x_j - x_j^0 = \frac{1}{2}a_j t^2 = \frac{1}{2}(2\text{m/s}^2)(0{,}1\text{s})^2 = 0{,}01\text{m}$$

Cuando el borde del mantel pasa por debajo del jarrón habrá recorrido una distancia:

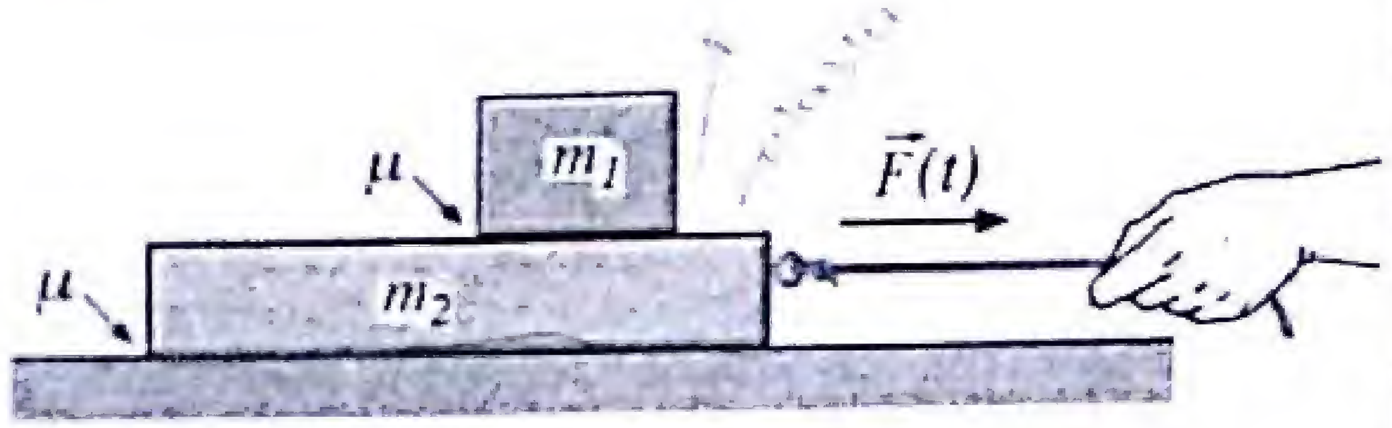
$$x_m = \frac{1}{2}(42\text{m/s}^2)(0{,}1\text{s})^2 = 0{,}21\text{m} = 21\text{ cm}$$

Respuesta:

$\boxed{\Delta x = 1\text{ cm}}$

PR-2.12. *Primero se despega la tabla y luego el bloque.*

Se coloca un bloque de masa $m_1 = 2$ kg sobre una tabla de masa $m_2 = 3$ kg que está sobre una superficie horizontal. Entre todas las superficies el coeficiente de fricción estática es $\mu_e = 0{,}50$ y el de fricción cinética $\mu_c = 0{,}25$.



Se jala la tabla con una fuerza que varía con el tiempo:

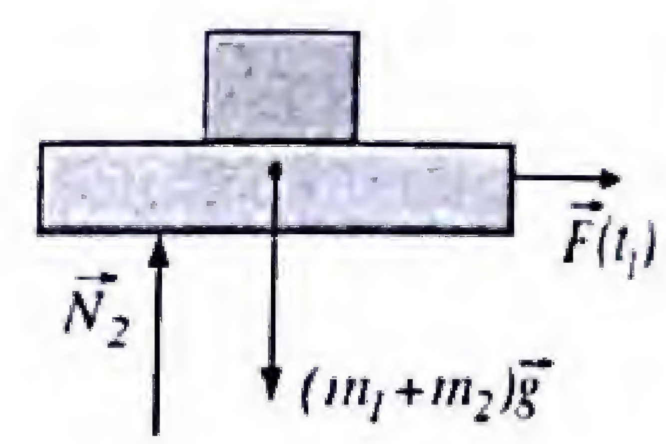
$$F(t) = b\,t$$

Siendo $b = 5$N/s y t en segundos. A partir de $t = 0$ se aumenta la fuerza y en el instante t_1 empieza a resbalar la tabla sobre el plano, luego en un instante posterior t_2 empieza el bloque a resbalar sobre la tabla. Determine cuáles son estos dos instantes de tiempo.

Solución: Consideremos el sistema completo (bloque mas tabla). A medida que se aumente la fuerza aplicada, el sistema no se mueve hasta el instante t_1 en que la fuerza de fricción estática alcanza su valor límite: $F_{e2}(max) = \mu_e N_2$, siendo $N_2 = (m_1 + m_2)g$, por lo tanto:

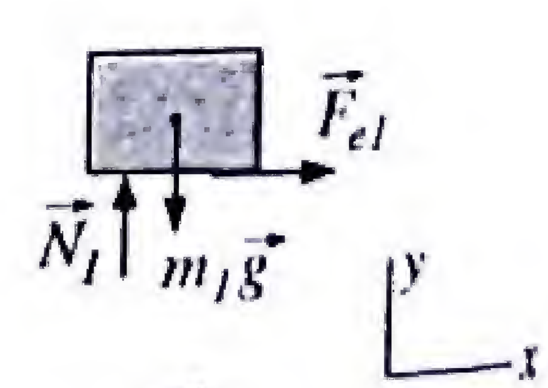
$$\mu_e(m_1 + m_2)g = bt_1$$

$$t_1 = \frac{\mu_e(m_1 + m_2)g}{b} = \frac{0{,}50(2+3)(9{,}8)}{5} = 4{,}9\text{s}$$



La fuerza aplicada sigue aumentando hasta el valor $F(t_2)$ en que la fuerza de fricción sobre el bloque m_1 alcanza su valor límite y este despega: $F_{e1} = \mu_e N_1 = \mu_e m_1 g$. En ese momento su aceleración será:

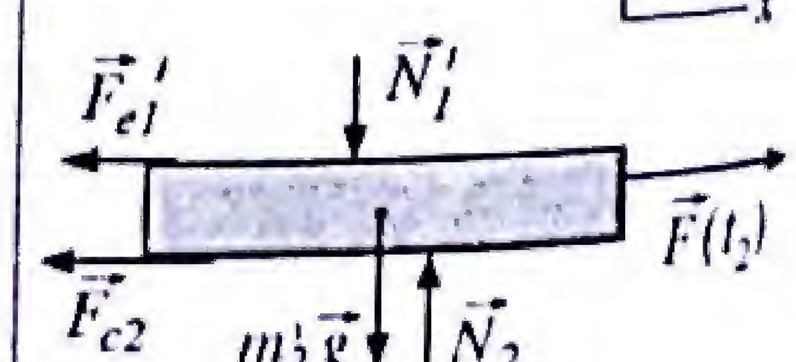
$$F_{e1} = m_1 a \qquad \Rightarrow \qquad a(t_2) = \mu_e g$$



Al mismo tiempo, para la tabla m_2 se tiene:

$$\sum F_x = F(t_2) - F_{e1} - F_{c2} = m_2 a(t_2) \qquad (1)$$

$$\sum F_y = N_2 - N_1 - m_2 g = 0 \qquad (2)$$



Siendo: $\qquad F_{c2} = \mu_c N_2 = \mu_c(m_1 + m_2)g$

Sustituyendo F_{c2} y $a(t_2)$ en la ecuación (1), se obtiene el tiempo t_2:

$$bt_2 - \mu_e m_1 g - \mu_c(m_1 + m_2)g = m_2 g\mu$$

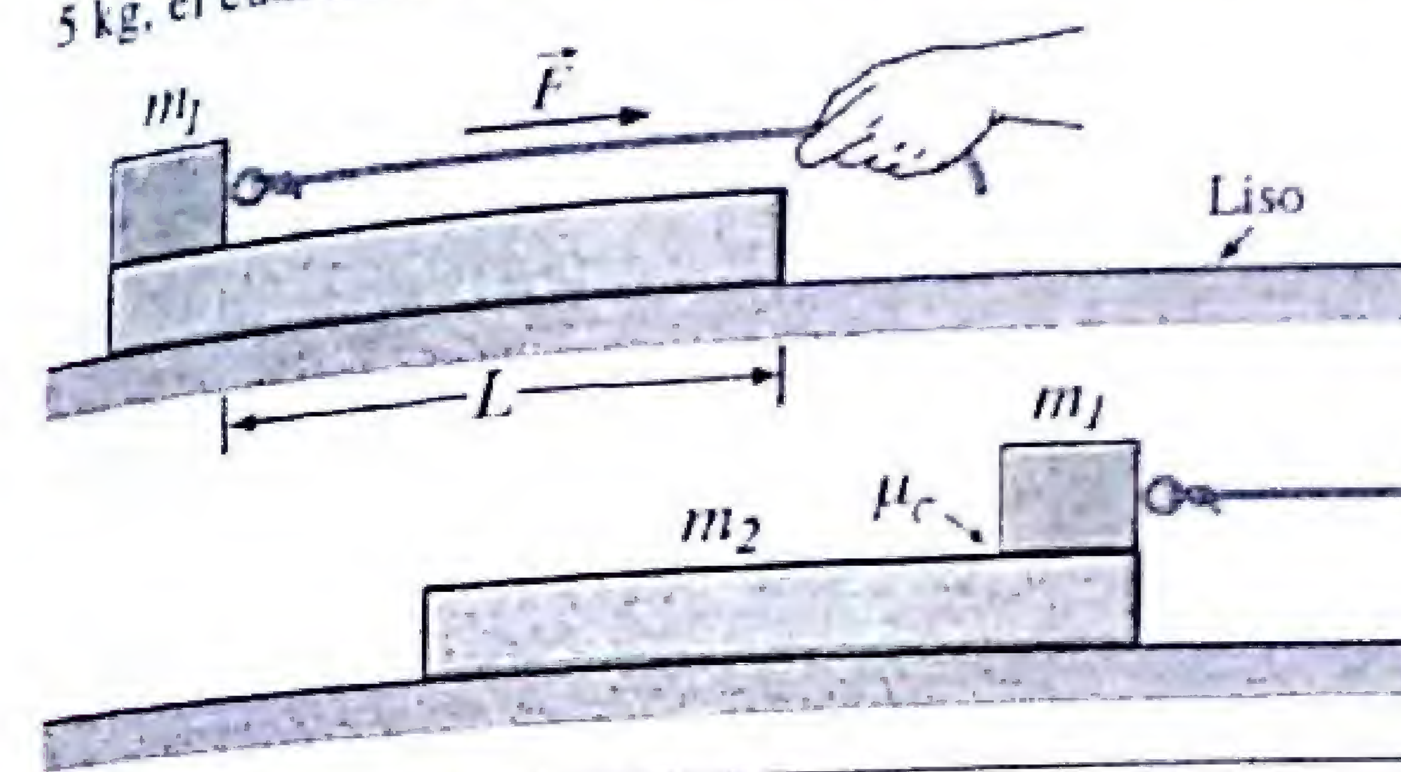
$$t_2 = \frac{(\mu_e + \mu_c)(m_1 + m_2)}{b}g = \frac{(0{,}5 + 0{,}25)(2+3)(9{,}8)}{5} = 7{,}35\text{s}$$

Respuesta

$t_1 = 4{,}9$s
$t_2 = 7{,}35$s

PR-2.13. *Deslizamiento hasta llegar al otro extremo*

Un bloque, $m_1 = 1$ kg descansa sobre otro bloque, $m_2 = 5$ kg, el cual descansa a su vez sobre una superficie lisa.



Al aplicar a m_1 una fuerza $\vec{F}$ de 5 N, ambos bloques son arrastrados hacia la derecha. El coeficiente de fricción cinética entre los bloques es $\mu_c = 0{,}4$.

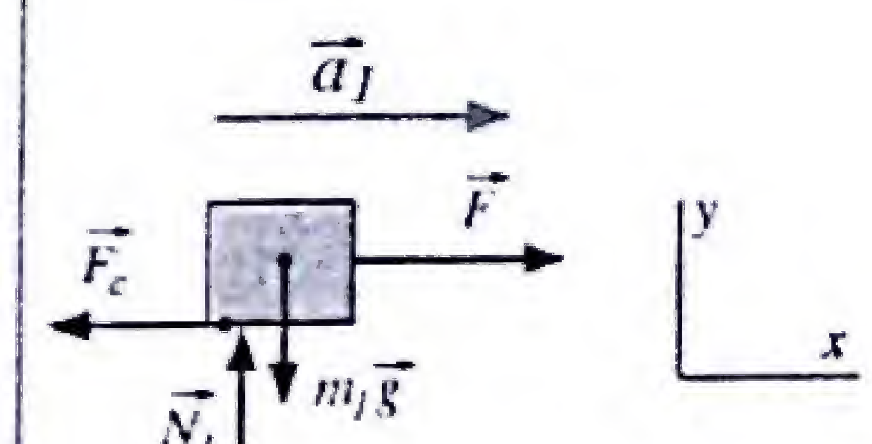
a) ¿Cuánto tiempo le tomará al bloque m_1 en alcanzar el otro extremo del bloque m_2 a una distancia $L = 1$m.

b) ¿Cuál habrá sido el desplazamiento del bloque m_2 durante ese tiempo?

Solución: a) Aplicando la segunda ley de Newton al bloque m_1:

$$\sum F_y = N_1 - m_1 g = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N_1 = m_1 g$$

$$\sum F_x = F - F_c = m_1 a_1 \qquad \Rightarrow \qquad F - \mu_c N_1 = m_1 a_1$$

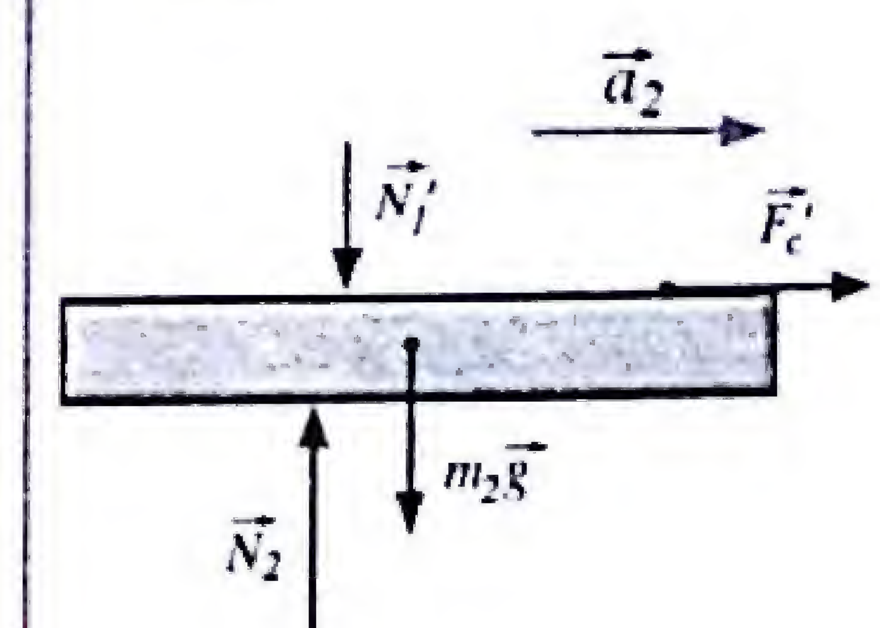


La aceleración de m_1 es:

$$a_1 = \frac{F}{m_1} - \mu_c g = \frac{5\text{N}}{1\text{kg}} - (0{,}4)(9{,}8\text{m/s}^2) = 1{,}08\text{m/s}^2$$

Aplicando la 2ª ley de Newton al bloque m_2:

$$\sum F_x = F_c = m_2 a_2 \qquad \Rightarrow \qquad \mu_c N_1 = \mu_c m_1 g = m_2 a_2$$



$$a_2 = \frac{\mu_c m_1 g}{m_2} = \frac{(0{,}4)(1\text{kg})(9{,}8\text{m/s}^2)}{(5\text{kg})} = 0{,}784\text{m/s}^2$$

Al cabo de un tiempo t el bloque m_2 ha recorrido una distancia d_2 y el bloque m_1 habrá recorrido una distancia:

$$d_1 = d_2 + L \qquad \Rightarrow \qquad \frac{1}{2}a_1 t^2 = \frac{1}{2}a_2 t^2 + L$$

$$t = \sqrt{\frac{2L}{a_1 - a_2}} = \sqrt{\frac{2(1\text{m})}{(1{,}08 - 0{,}784)\text{m/s}^2}} = 2{,}6\text{s}$$

b) Durante ese tiempo la distancia recorrida por el bloque m_2 es:

$$d_2 = \frac{1}{2}a_2 t^2 = \frac{1}{2}(0{,}784\text{m/s}^2)(2{,}6)^2 = 2{,}65\text{m}$$

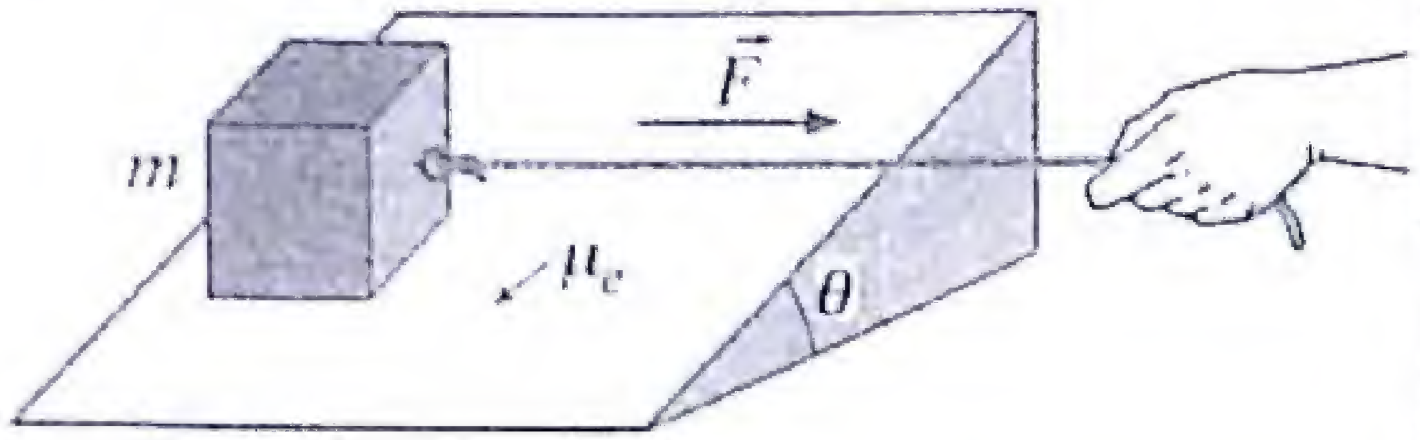
Respuesta:

a) $t = \sqrt{\dfrac{2L}{a_1 - a_2}} = 2{,}6$s

b) $d_2 = \dfrac{1}{2}a_2 t^2 = 2{,}65$m

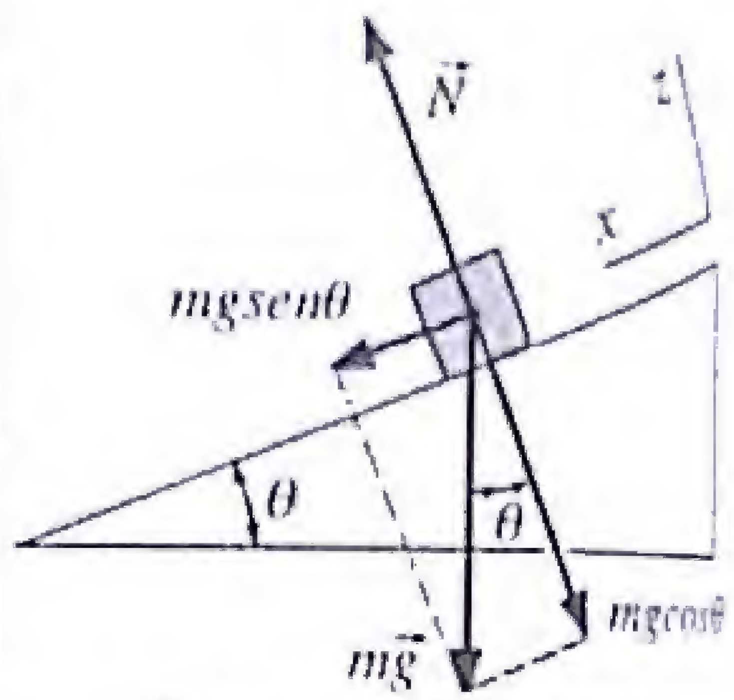
PR-2.14. *Movimiento lateral en un plano inclinado*

Un cubo de masa m = 0,5 kg descansa sobre un plano inclinado a un ángulo $\theta = 37°$ con respecto a la horizontal. El coeficiente de fricción estático entre el cubo y el plano es μ_e = 0,85. Mediante una cuerda, se jala el cubo con una fuerza $\vec{F}$ horizontal y paralela al plano. ¿Cuál será el valor mínimo de esta fuerza necesario para que el cubo se empiece a mover?



Solución: Si descomponemos la fuerza de gravedad $m\vec{g}$ en dos componentes: una paralela al plano ($mgsen\theta$) y la otra perpendicular al plano ($mgcos\theta$), y luego aplicamos la segunda ley de Newton en la dirección perpendicular, se obtiene:

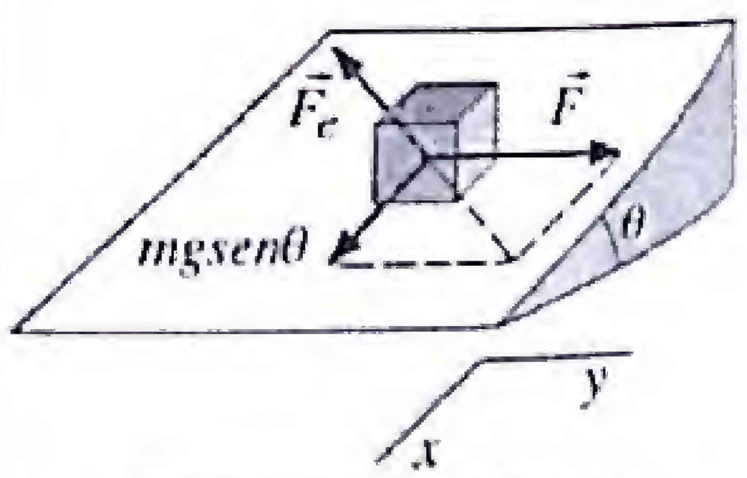
$$\sum F_z = N - mgcos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mgcos\theta$$



Fuerzas en el plano x-z

Las fuerzas paralelas al plano inclinado son: la proyección del peso ($mgsen\theta\hat{x}$), la fuerza aplicada, $F\hat{y}$ y la fuerza de rozamiento estático, $\vec{F}_e$. La fuerza $\vec{F}_e$ equilibra la resultante de las dos fuerzas anteriores, las cuales son perpendiculares entre sí.

$$F_e^2 = (mgsen\theta)^2 + F^2$$



Fuerzas en el plano x-y

En la condición límite, para que ocurra desplazamiento la fuerza de fricción alcanza su valor máximo:

$$F_e = \mu_e N = \mu_e mgcos\theta$$

Por lo tanto, el valor mínimo de la fuerza aplicada viene dado por:

$$(\mu_e mgcos\theta)^2 = (mgsen\theta)^2 + F_{min}^2$$

$$F_{min} = mg\sqrt{(\mu_e cos\theta)^2 - (sen\theta)^2}$$

Sustituyendo los valores numéricos:

$$F_{min} = (0,5)(9,8)\sqrt{(0,85\text{x}\cos 37°)^2 - (\text{sen}37°)^2} = 1,56\text{N}$$

Respuesta:

$$F_{min} = mg\sqrt{(\mu_e cos\theta)^2 - (sen\theta)^2}$$
$$F_{min} = 1,56\text{N}$$

PR-2.15. *Imposible pasar el coleto a un ángulo menor*

El mango de un coleto de masa m forma un ángulo θ con la dirección vertical. Los coeficientes de fricción entre el coleto y el piso son respectivamente, μ_e y μ_c. Se desprecia la masa del mango.

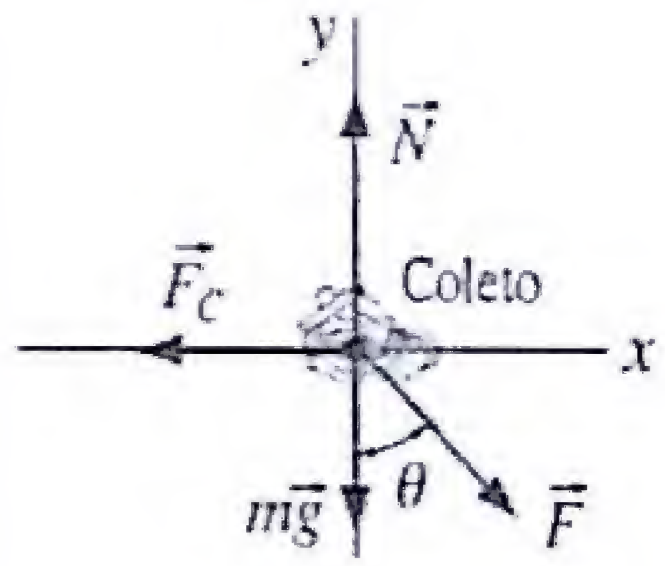
a) Halle la magnitud de la fuerza $\vec{F}$ dirigida a lo largo del mango necesaria para mover el coleto a velocidad constante.

b) Demuestre que si θ es menor que cierto valor θ_0, es imposible deslizar el coleto sin importar que tan grande sea la fuerza ejercida a lo largo del mango. Halle el ángulo crítico, θ_0.

Solución: a) Aplicando la segunda ley de Newton al coleto con aceleración nula:

$$\sum F_x = Fsen\theta - F_c = 0 \quad \Rightarrow \quad Fsen\theta = \mu_c N \qquad (1)$$

$$\sum F_y = N - F cos\theta - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N = F cos\theta + mg \quad (2)$$

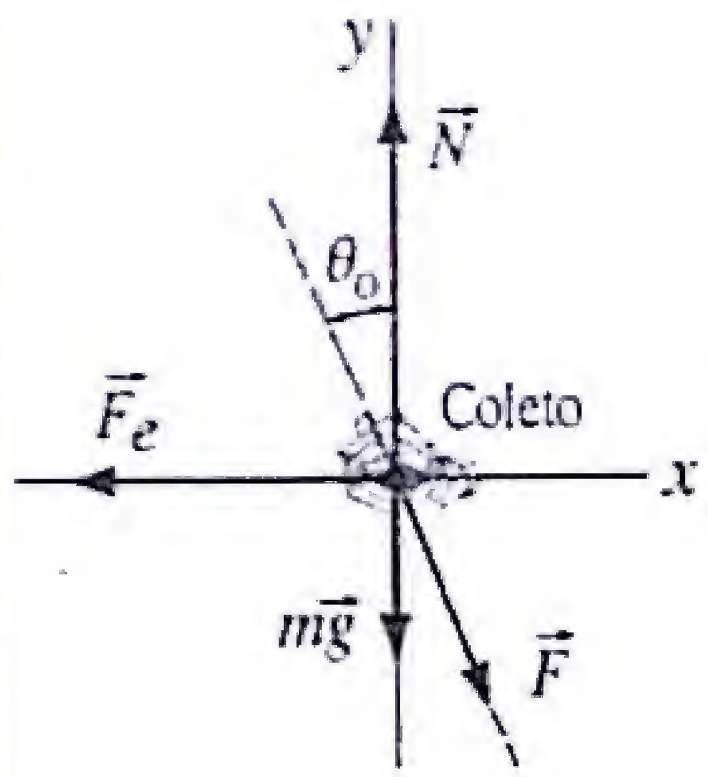


Eliminando N de este par de ecuaciones, se obtiene F:

$$F = \frac{\mu_c mg}{sen\theta - \mu_c cos\theta}$$

b) Según la ecuación (2) cuando disminuye el ángulo θ, aumenta la componente vertical de $\vec{F}$, y también el valor de la fuerza normal $\vec{N}$. Por otra parte, disminuye la componente horizontal de $\vec{F}$, pero para mover el coleto esta no puede ser menor que el máximo de la fuerza de fricción estática $\vec{F}_e$:

$$Fsen\theta \geq F_e(max) = \mu_e N \qquad (3)$$



Sustituyendo (2) en (3) se tiene:

$$Fsen\theta \geq \mu_e(F cos\theta + mg)$$

$$F(sen\theta - \mu_e cos\theta) \geq \mu_e mg$$

El término entre paréntesis no puede llegar a ser negativo, por lo tanto, sin importar el valor de F, el coleto no se moverá para ángulos menores que el dado por la condición:

$$sen\theta_0 = \mu_e cos\theta_0 \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = Arctg\mu_e$$

Respuesta:

a) $F = \dfrac{\mu_c mg}{sen\theta - \mu_c cos\theta}$

b) $\theta_0 = Arctg\mu_e$

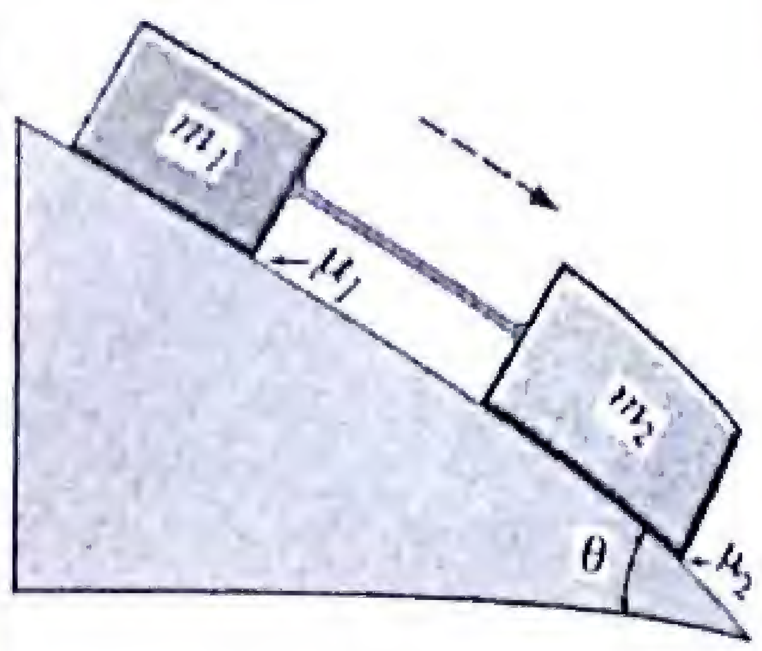
PR-2.16. *¿Habrá tensión o compresión en la barra?*

Dos bloques de masas $m_1 = 1$ kg y $m_2 = 2$ kg unidos con una barra delgada carente de masa, deslizan hacia abajo por un plano inclinado a $\theta = 36{,}9^\circ$. El coeficiente cinético entre el bloque m_1 y el plano es $\mu_1 = 0{,}30$ y entre el bloque m_2 y el plano es $\mu_2 = 0{,}15$.

a) Calcule la aceleración de los bloques.

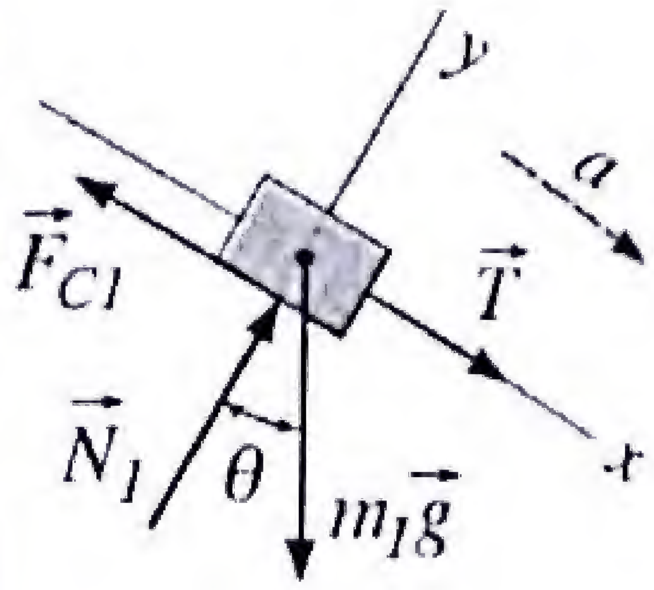
b) Calcule la tensión (o compresión) de la barra.

c) ¿Cómo se modifican los resultados anteriores si se intercambian los bloques?



Solución: a) Supongamos que la barra está bajo tensión T. Como la barra es rígida los bloques tienen la misma aceleración. Aplicando la 2ª ley de Newton:

Bloque 1:
$$\sum F_x = T - F_{C1} + m_1 g sen\theta = m_1 a \qquad (1)$$
$$\sum F_y = N_1 - m_1 g cos\theta = 0 \qquad (2)$$

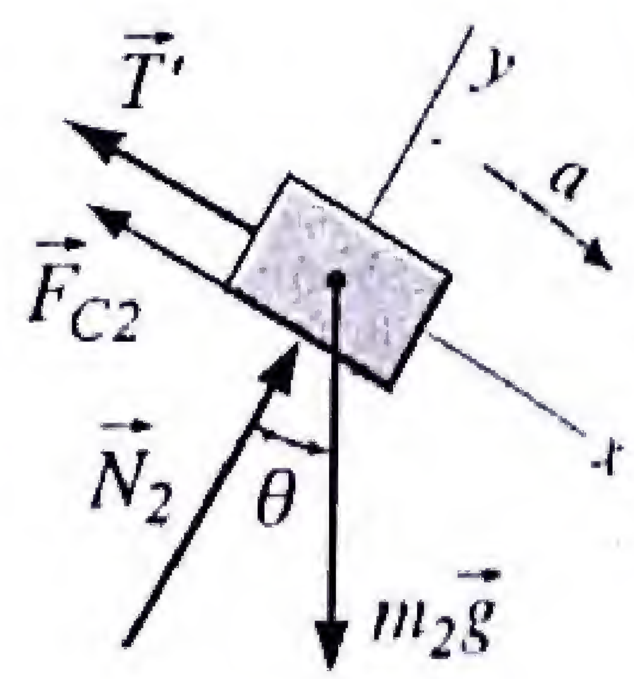


De la ecuación (2) la fuerza de fricción cinética resulta:

$$F_{C1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 m_1 g cos\theta$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación 1:

$$T + m_1 g(sen\theta - \mu_1 cos\theta) = m_1 a \qquad (3)$$



Análogamente se procede para el bloque 2, resultando la ecuación:

$$-T + m_2 g(sen\theta - \mu_2 cos\theta) = m_2 a \qquad (4)$$

Sumando las ecuaciones (3) y (4) se elimina T y se obtiene la aceleración:

$$a = g[\, sen\theta - \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2} cos\theta] = 4{,}31 \text{m/s}^2$$

Sustituyendo a se obtiene la tensión de la barra:

$$T = (\mu_1 - \mu_2) g cos\theta \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = 0{,}784\text{N}$$

Como T resulta positivo para estos valores numéricos, se verifica nuestra suposición inicial de que la barra está bajo *tensión*.

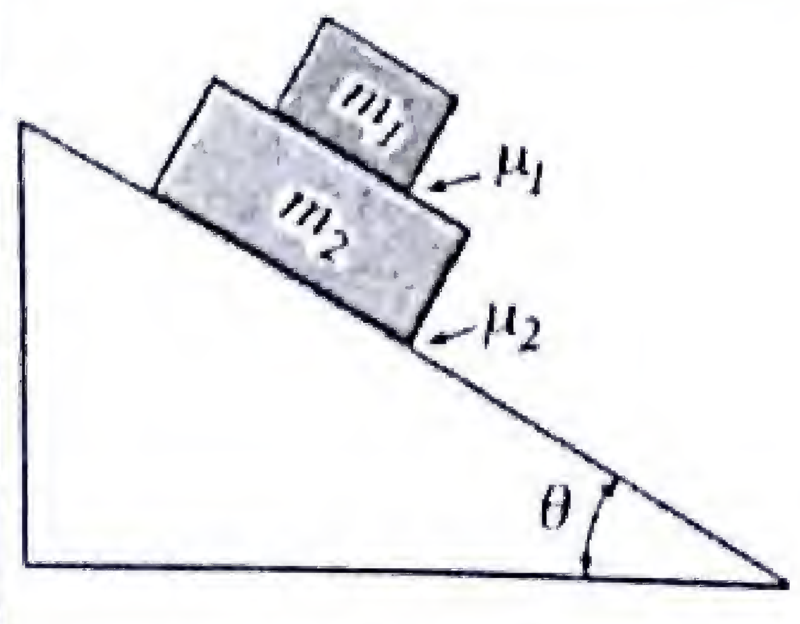
b) Si intercambiamos los bloques m_1 y m_2, la expresión para la tensión T queda con signo negativo, y esto significa que la barra estará bajo *compresión*.

Respuesta:

a) $a = 4{,}31$ m/s², $T = 0{,}784$ N (barra bajo tensión)
b) $a = 4{,}31$ m/s², $T = -0{,}784$ N (barra bajo compresión)

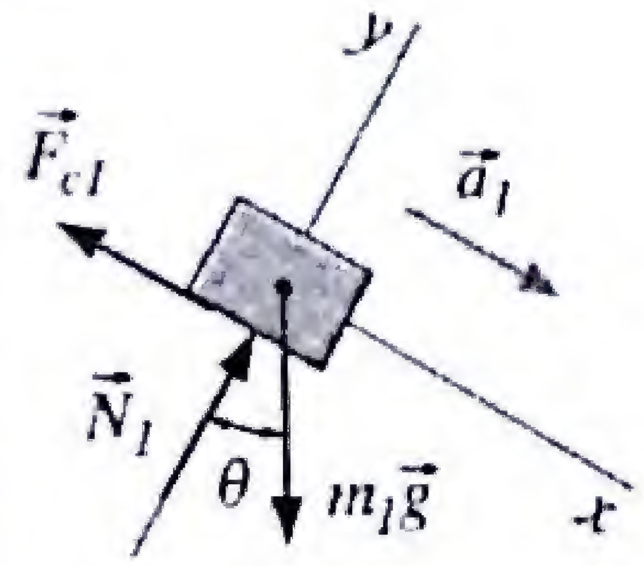
PR-2.17. *Un bloque sobre otro bloque cuesta abajo*

Sobre un plano inclinado de ángulo de inclinación $\theta = 36{,}9^\circ$ se coloca un bloque de masa $m_2 = 2$ kg y sobre éste se coloca a su vez un bloque de masa $m_1 = 1$ kg. El coeficiente de fricción cinética entre los bloques es $\mu_1 = 0{,}20$ y entre el bloque inferior y el plano es $\mu_2 = 0{,}30$. Si los bloques deslizan cuesta abajo, halle las aceleraciones.



Solución: Supongamos que $a_1 > a_2$, de tal manera que la fuerza de fricción sobre el bloque m_1 actúa hacia arriba y su valor es $F_{c1} = \mu_1 N_1$. Las ecuaciones de movimiento para el bloque 1 en direcciones normal y tangente al plano son:

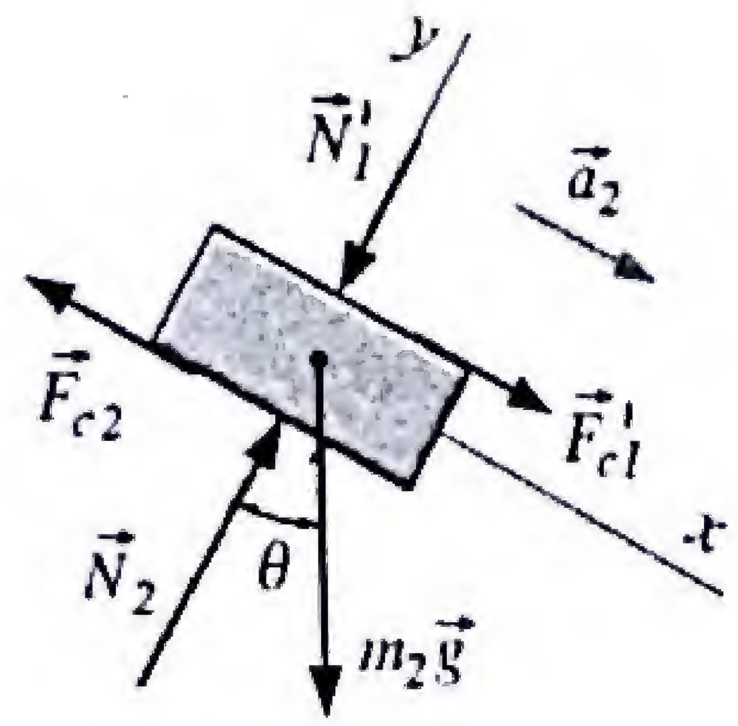
$$\sum F_y = N_1 - m_1 g cos\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = m_1 g cos\theta$$
$$\sum F_x = m_1 g sen\theta - \mu_1 N_1 = m_1 a_1$$



Sustituyendo el valor de N_1 de la primera ecuación en la segunda, obtenemos:

$$a_1 = g(\, sen\theta - \mu_1 cos\theta)$$

$$a_1 = (9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2})(sen\, 36{,}9^\circ - (0{,}20) cos\, 36{,}9^\circ) = 4{,}32 \text{m/s}^2$$



Sobre el bloque m_2 actúan dos fuerza de fricción: $F_{c1} = \mu_1 N_1$ y $F_{c2} = \mu_2 N_2$. Las ecuaciones de movimiento son:

$$\sum F_y = N_2 - N_1 - m_2 g cos\theta = 0$$
$$\Rightarrow N_2 = (m_1 + m_2) g cos\theta$$

$$\sum F_x = m_2 g sen\theta + \mu_1 N_1 - \mu_2 N_2 = m_2 a_2$$

Sustituyendo N_1 y N_2 en esta última ecuación, obtenemos:

$$a_2 = g[\, sen\theta + (\frac{m_1}{m_2})\mu_1 cos\theta - (\frac{m_1 + m_2}{m_2})\mu_2 cos\theta]$$

Sustituyendo los valores numéricos: $a_2 = 3{,}13 \text{m/s}^2$. Se verifica la suposición inicial de haber tomado $a_1 > a_2$.

Respuesta:

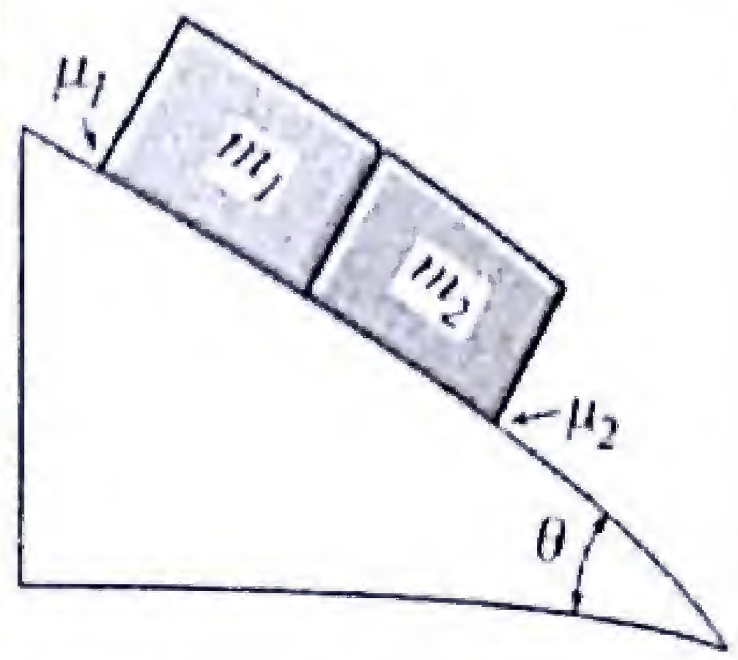
$a_1 = 4{,}32 \text{m/s}^2$
$a_2 = 3{,}13 \text{m/s}^2$

PR 2.18. *Condición para que deslicen apoyándose*

Dos cubos de igual masa, $m_1 = m_2 = m$, se colocan sobre un plano inclinado a un ángulo θ. El coeficiente de fricción cinética del cubo superior con el plano es μ_1 y el del cubo inferior con el plano es $\mu_2 > \mu_1$.

a) Determine la fuerza de contacto entre los dos cubos cuando deslizan por el plano inclinado.

b) ¿Bajo cuál condición tendrán contacto los cubos?



Solución: Cuando existe contacto los cubos deben descender por el plano con igual aceleración. La segunda ley de Newton aplicada al cubo 1 es:

$$mg sen\theta - \mu_1 N_1 - F = ma \quad (1)$$

Mientras que para el cubo 2, escribimos:

$$mg sen\theta - \mu_2 N_2 + F' = ma \quad (2)$$

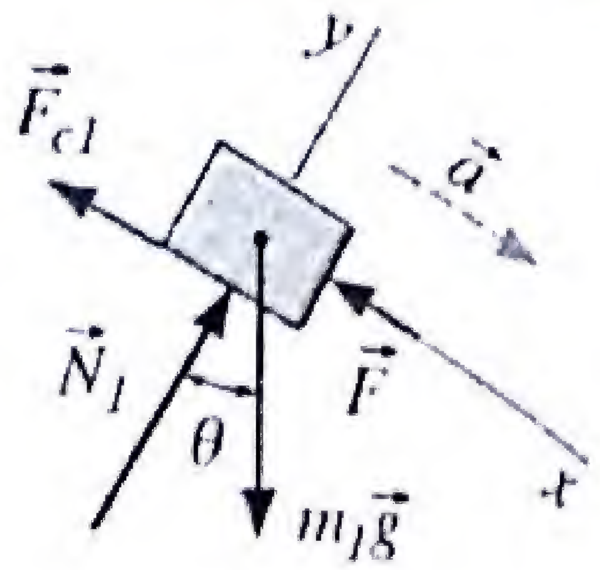
Como las masas son iguales, también serán iguales las fuerzas normales:

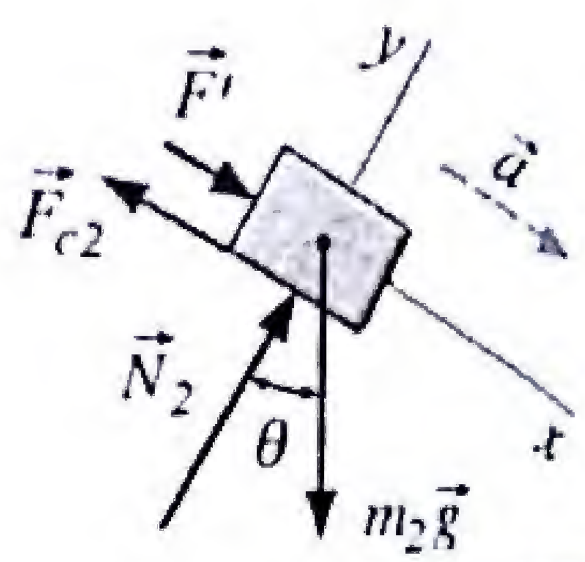
$$N_1 = N_2 = mg cos\theta = N$$

Según la tercera ley de Newton las fuerzas de contacto constituyen un par acción-reacción ($F' = F$). Igualando las ecuaciones (1) y (2) se obtiene:

$$F = \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1) mg cos\theta$$

b) Los bloques pierden contacto para $\mu_2 \le \mu_1$.





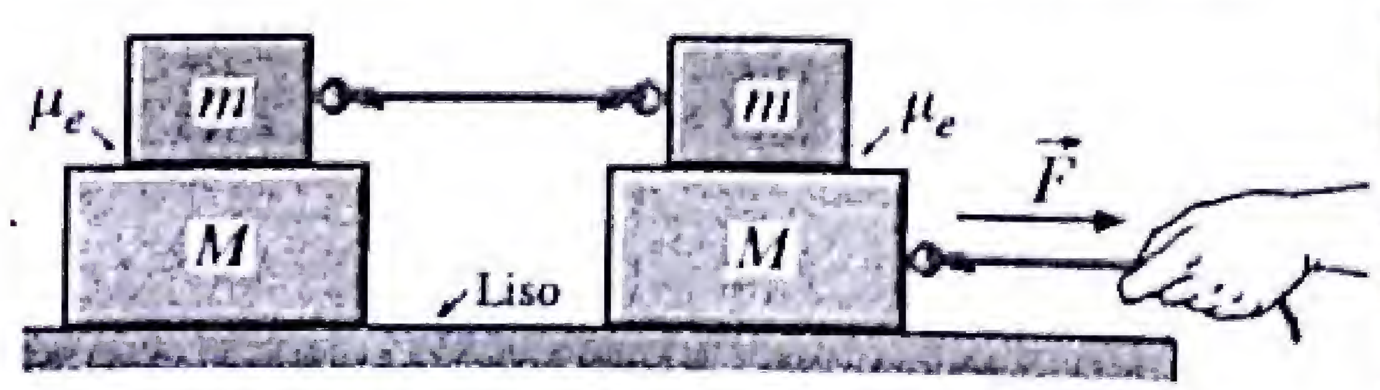
Respuesta

a) $F = \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1) mg cos\theta$

b) Para $\mu_2 \le \mu_1$

PR-2.19. *Para que los cuatro bloques se muevan juntos*

Dos bloques de masa $m = 0,5$ kg están colocados encima de otros dos bloques respectivos cada uno de masa $M = 1$ kg que descansan sobre una superficie horizontal lisa.



El coeficiente de fricción estática entre los bloques es $\mu_e = 0,41$. ¿Cuál es el valor máximo de la fuerza horizontal F que hay que aplicar al bloque delantero M para que los cuatro bloques se muevan como un todo con la misma aceleración?

Solución: Cuando se aplica la fuerza externa $\vec F$ al bloque delantero M, este ejerce una fuerza de fricción estática $\vec F_e$ sobre el bloque m que tiene encima. Esta fuerza de fricción es la que efectivamente arrastra tanto al bloque m como a los dos bloques traseros m y M. El valor máximo de la fuerza de fricción estática es:

$$\vec F_e(max) = \mu_e N = \mu_e mg$$

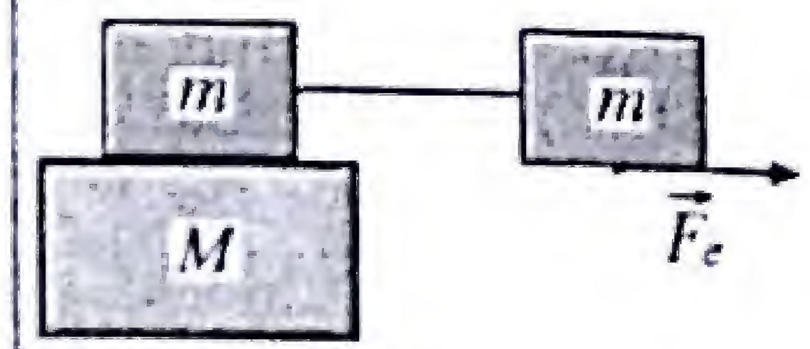
La máxima aceleración de estos tres bloques es:

$$a_{max} = \frac{F_e(max)}{m + m + M} = \frac{\mu_e mg}{m + m + M}$$

Para que el sistema de los cuatro bloques se mueva con esta aceleración, la máxima fuerza aplicada externamente es:

$$F_{max} = (\sum m_i) a_{max} = (m + m + M + M)\frac{\mu_e mg}{2m + M}$$

$$F_{max} = \frac{2\mu_e mg(m + M)}{2m + M} = \frac{2(0,41)(0,5)(9,8)(0,5 + 1)}{2(0,5) + 1} = 3,01\text{N}$$



Respuesta:

$F_{max} = 3,01\text{N}$

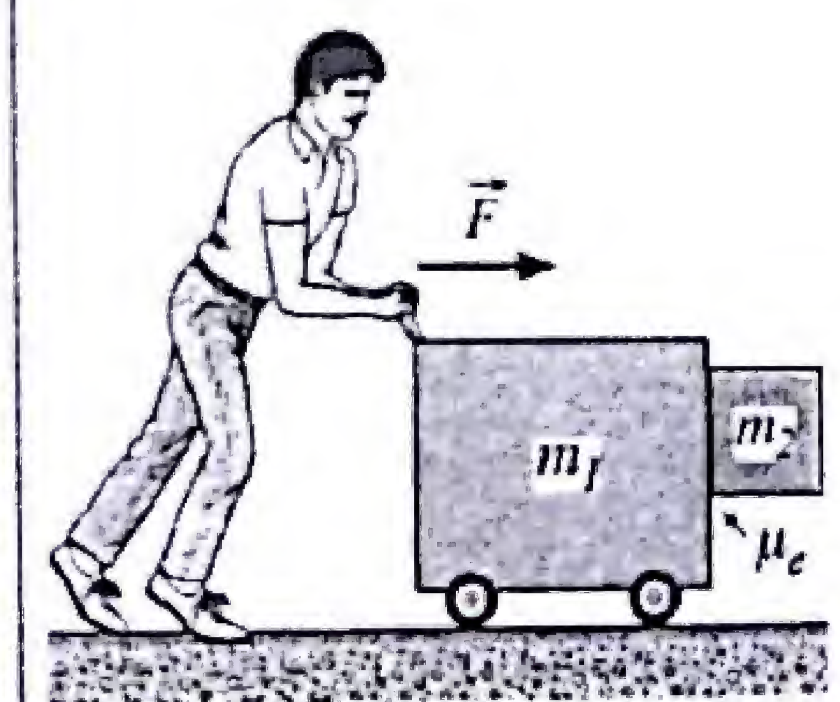
PR-2.20. *Hay que empujar rápido para que no se caiga*

Un carrito de masa $m_1 = 10$ kg es empujado sobre una superficie horizontal arrastrando un bloque de masa $m_2 = 2$ kg que está colocado sobre su superficie vertical frontal. El coeficiente de fricción carrito-bloque es $\mu_e = 0,60$.

a) ¿Cuál es la aceleración mínima del carrito para que el bloque no caiga? ¿Dependerá de la masa del bloque?

b) ¿Cuál es la fuerza de fricción, F_e, en este caso? Si la aceleración es superior al mínimo, aumentará F_e?

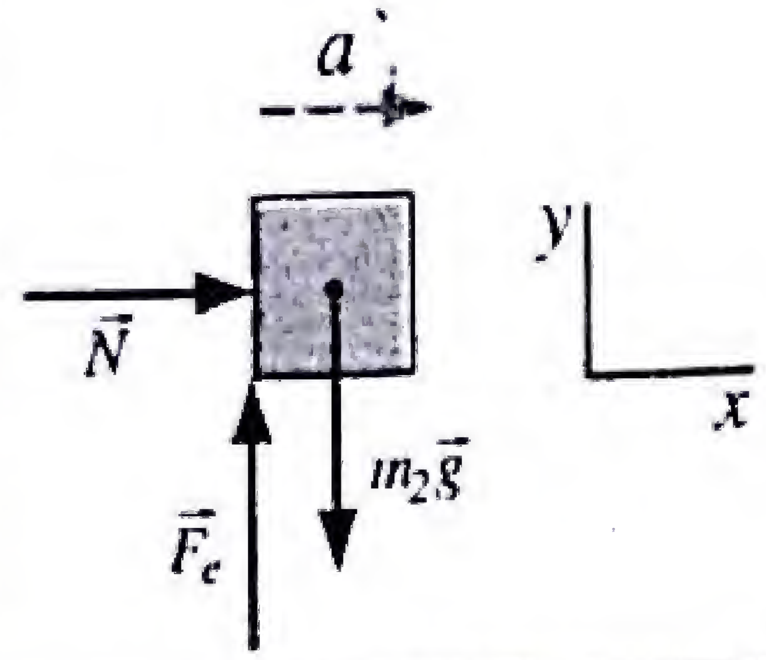
c) ¿Qué valor mínimo de $\vec F$ debe aplicarse al carrito con el fin de que el bloque no caiga?



Solución: Para hallar la aceleración mínima, a_{min}, se aplica la segunda ley al bloque m_2 cuando está a punto de deslizar hacia abajo:

$$\sum F_y = F_e - m_2 g = 0 \quad \Rightarrow \quad F_e(max) = \mu_e N = m_2 g$$

$$\sum F_x = N = m_2 a \quad \Rightarrow \quad a_{min} = \frac{N}{m_2} = \frac{m_2 g/\mu_e}{m_2} = \frac{g}{\mu_e}$$



La mínima aceleración requerida es independiente de la masa m_2:

$$a_{min} = \frac{9{,}8\text{m/s}^2}{0{,}6} = 16{,}3\text{m/s}^2$$

b) La fuerza de fricción estática que sostiene el bloque es:

$$F_e = m_2 g = 19{,}6\text{N}\text{, no aumenta.}$$

c) El valor mínimo de la fuerza aplicada es:

$$F_{min} = (m_1 + m_2)a_{min}$$

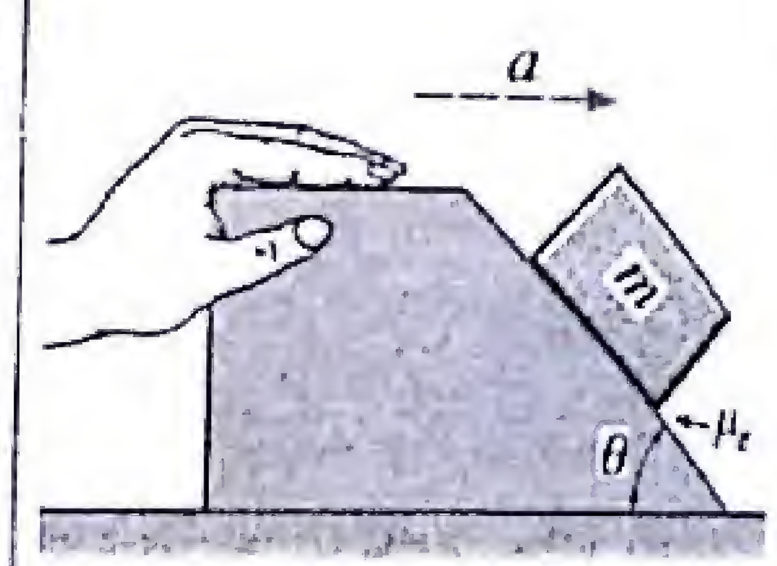
$$F_{min} = (10\text{kg} + 2\text{kg})(16{,}3\text{m/s}^2) = 196\text{N}$$

Respuesta

a) $a_{min} = 16{,}3\text{m/s}^2$
b) $F_e = 19{,}6\text{N}$, no aumenta.
c) $F_{min} = 196\text{N}$.

PR-2.21. *El bloque sobre la cuña no sube ni baja*

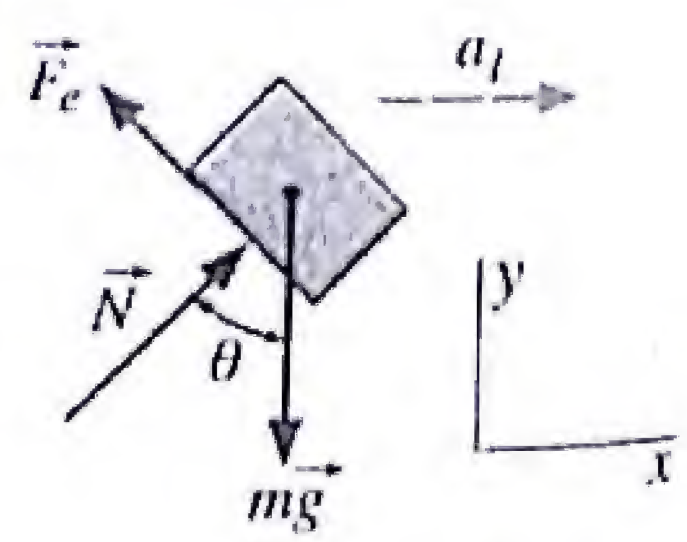
Una cuña de ángulo de inclinación θ descansa sobre una superficie horizontal pulida. Se coloca un bloque de masa m sobre la cuña, siendo μ_e el coeficiente de fricción estática entre el bloque y la cuña.
a) Si la cuña es empujada hacia la derecha, con una aceleración $\vec{a}$, ¿cómo se moverá el bloque?
b) ¿Qué sucede si $\mu_e \geq ctg\theta$?



Solución: Si la aceleración a es pequeña, el bloque tiende a bajar. La fuerza de fricción, $F_e = \mu_e N$, apunta hacia arriba. Aplicando la segunda ley de Newton:

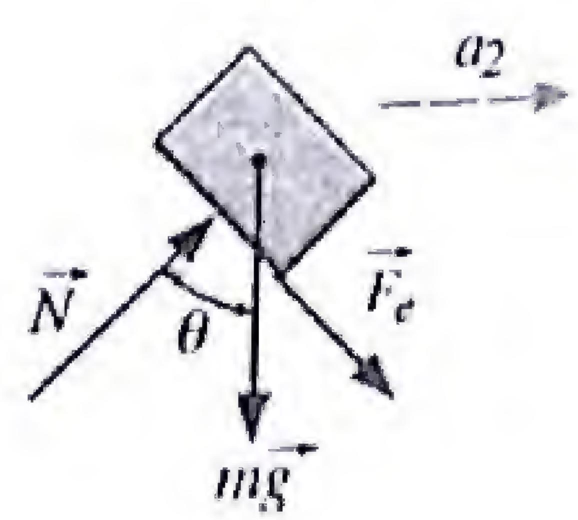
$$\sum F_x = N sen\theta - \mu_e N cos\theta = ma_1 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = N cos\theta + \mu_e N sen\theta - mg = 0 \qquad (2)$$



Dividiendo las dos ecuaciones se elimina N y se obtiene el valor mínimo de la aceleración para que el bloque no deslice hacia abajo:

$$a_1 = g(\frac{sen\theta - \mu_e cos\theta}{cos\theta + \mu_e sen\theta})$$



Por otra parte, si la aceleración es grande, el bloque tiende a subir. Aplicando la segunda ley:

$$\sum F_x = N sen\theta + \mu_e N cos\theta = ma_2 \qquad (3)$$

$$\sum F_y = N cos\theta - \mu_e N sen\theta - mg = 0 \qquad (4)$$

Como en el caso anterior, eliminando N de las ecuaciones (3) y (4), se obtiene el valor máximo de la aceleración para que el bloque no deslice hacia arriba:

$$a_2 = g(\frac{sen\theta + \mu_e cos\theta}{cos\theta - \mu_e sen\theta})$$

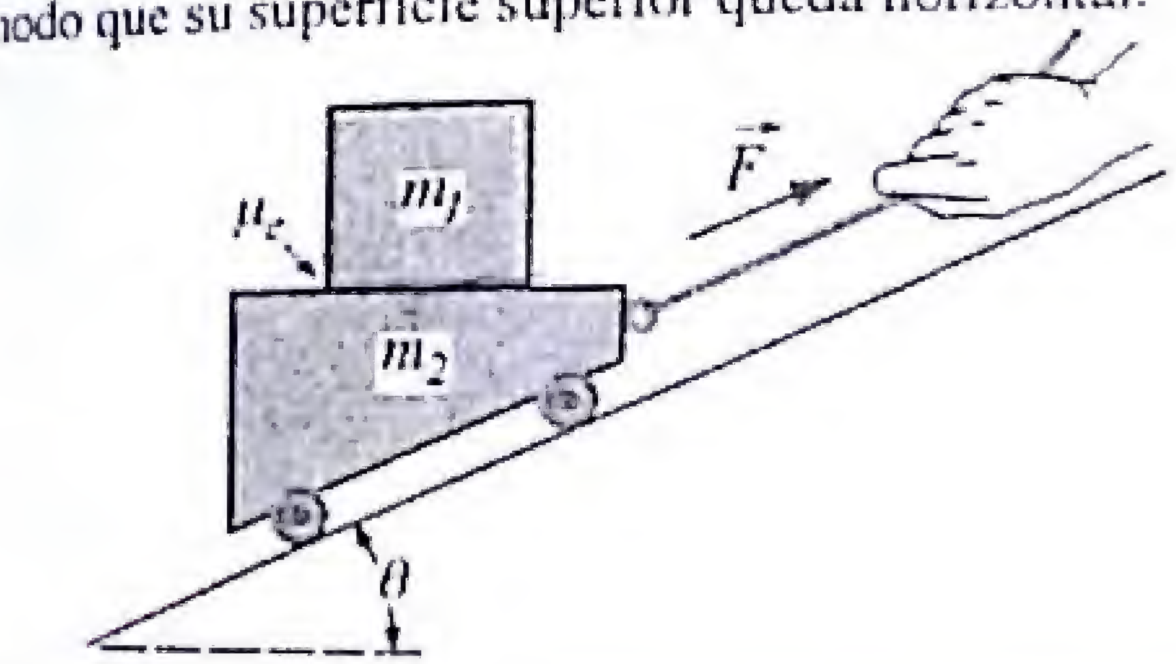
b) Si $\mu_e \geq ctg\theta$ el bloque no subirá cualquiera que sea la aceleración del plano.

Respuesta

a) Si $a < g(\frac{sen\theta - \mu_e cos\theta}{cos\theta + \mu_e sen\theta})$, el bloque desliza hacia abajo.
Si $a > g(\frac{sen\theta + \mu_e cos\theta}{cos\theta - \mu_e sen\theta})$ el bloque desliza hacia arriba.
b) Si $\mu_e \geq ctg\theta$, no subirá.

PR-2.22. *Carrito para transporte horizontal en rampa*

Un bloque de masa m_1 = 1 kg descansa sobre un carrito de masa m_2 = 2 kg que tiene forma de cuña. El carrito se coloca sobre un plano inclinado a un ángulo θ = 30° de modo que su superficie superior queda horizontal.

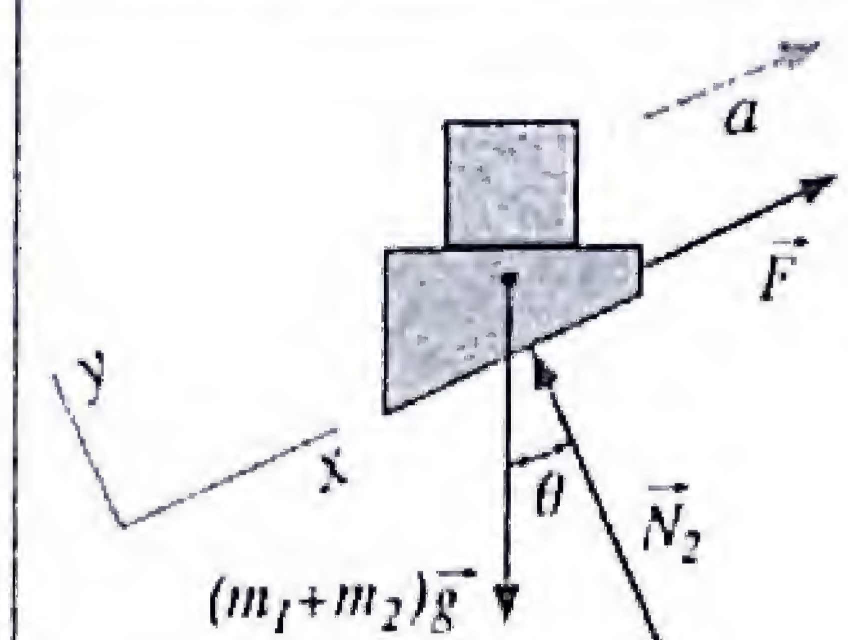


Entre el bloque y el carrito existe fricción y se va aumentando la fuerza aplicada al carrito de modo que cuando alcanza un valor crítico F = 26,7 N, el bloque m_1 comienza a deslizar. Determine:
a) La aceleración del sistema justo en ese instante.
b) El valor del coeficiente de fricción estático, μ_e, entre el bloque y el carrito.

Solución: a) Para hallar la aceleración a se aplica la segunda ley al sistema completo $(m_1 + m_2)$:

$$\sum F_x = F - (m_1 + m_2)g sen\theta = (m_1 + m_2)a$$

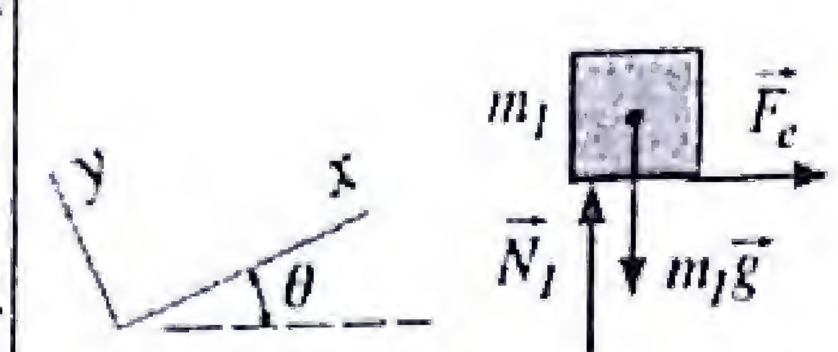
$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} - g sen\theta = \frac{26{,}7}{1+2} - 9{,}8 sen30° = 4\text{m/s}^2$$



b) Para el bloque m_1 aislado, tenemos equilibrio en el eje y:

$$N_1 cos\theta - F_e sen\theta - m_1 g cos\theta = 0$$

Cuando se alcanza la situación crítica de deslizamiento, entonces $F_e = F_e(max) = \mu_e N_1$ y resulta:



$$N_1 = \frac{m_1 g\cos\theta}{\cos\theta - \mu_e sen\theta}$$

La ecuación de movimiento según en el eje x para el bloque es:

$$\sum F_x = F_e\cos\theta + N_1 sen\theta - m_1 g sen\theta = m_1 a$$

Sustituyendo en esta expresión, $F_e = \mu_e N_1$ y luego la expresión para N_1, se obtiene el coeficiente de fricción estática:

$$\mu_e = \frac{a\cos\theta}{g + a sen\theta} = \frac{4\cos 30^o}{9{,}8 + 4sen30^o} = 0{,}294$$

Respuesta

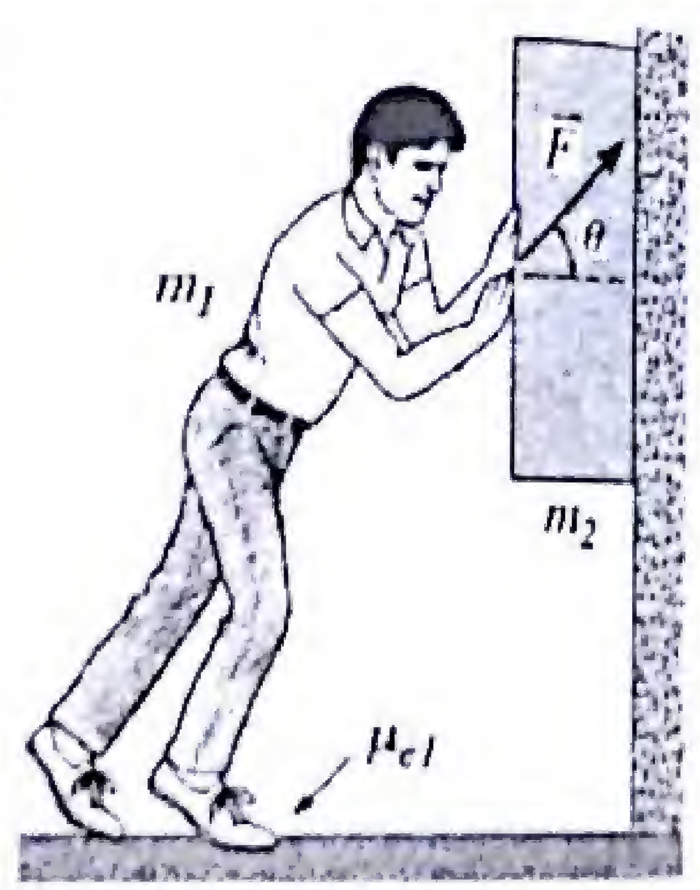
a) $a = 4m/s^2$,
b) $\mu_e = 0{,}294$

PR-2.23. *Si empuja muy fuerte se resbalará en el piso*

Una persona cuyo peso es $m_1 g$ = 490 N sostiene en reposo contra la pared un armario que pesa $m_2 g$ = 40 N. La persona ejerce una fuerza de módulo F = 60 N formando con la horizontal un ángulo $\theta = 30°$. Halle:

a) El valor mínimo del coeficiente de fricción estática entre los zapatos de la persona y el piso para que no se resbale.

b) El módulo y la dirección de la fuerza de fricción $\vec{F}_{e2}$ que ejerce la pared sobre el armario.



Solución: a) Para el equilibrio de la persona en la condición crítica a punto de deslizar:

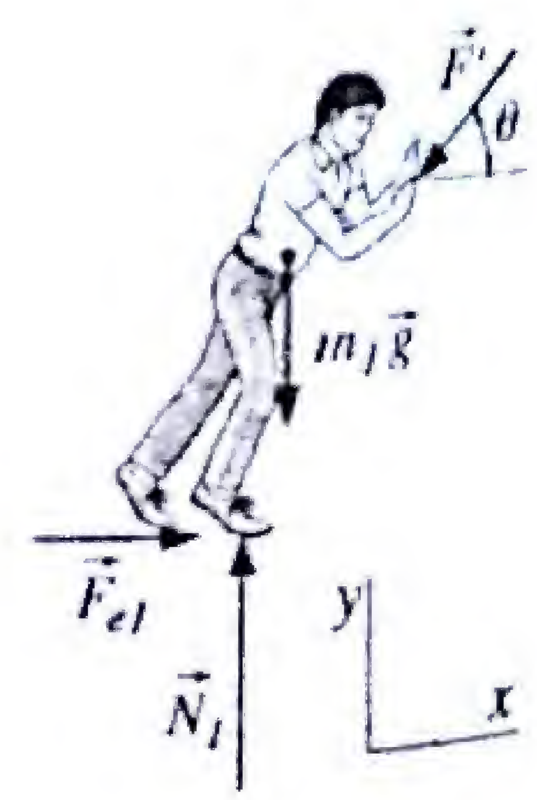
$$\sum F_y = N_1 - F sen\theta - m_1 g = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_x = \mu_{e1} N_1 - F\cos\theta = 0 \qquad (2)$$

Despejando N_1 de la ecuación (1) y sustituyéndolo en la ecuación (2), se obtiene:

$$\mu_{e1}(F sen\theta + m_1 g) - F\cos\theta = 0$$

El valor mínimo del coeficiente de fricción estática es:



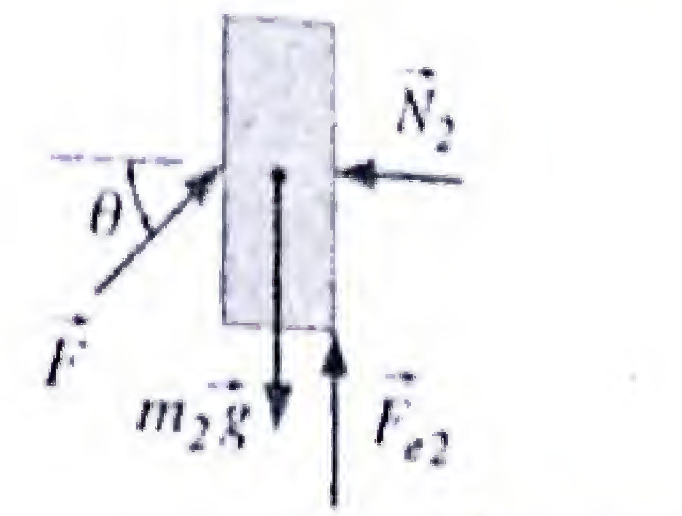
$$\mu_{e1} = \frac{F\cos\theta}{F sen\theta + m_1 g} = \frac{60\cos 30^o}{60 sen 30^o + 490} = 0{,}10$$

b) Para mantener el equilibrio, la suma de las fuerzas verticales es cero:

$$\sum F_y = F_{e2} + F sen\theta - m_2 g = 0$$

La fuerza de fricción que impide que el armario resbale es:

$$F_{e2} = m_2 g - F sen\theta = 40 - 60 sen 30^o = 10N \text{ (hacia arriba)}$$



Respuesta

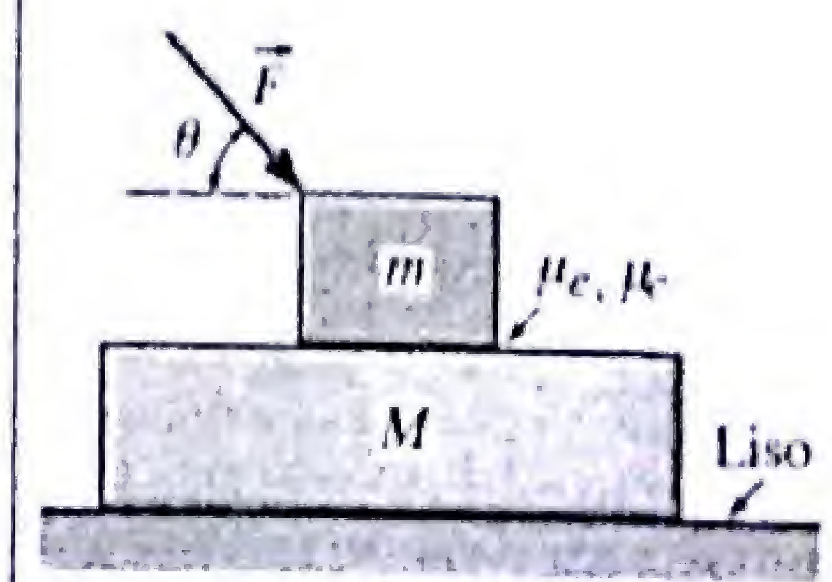
a) $\mu_{e1}(min) = 0{,}10$
b) F_{e2} = 10 N

PR-2.24. *¿Cómo se moverán los dos bloques?*

Un bloque m = 1 kg está colocado encima de otro bloque M = 2 kg, el cual a su vez descansa sobre una superficie horizontal lisa. Los coeficientes de fricción estático y cinético entre los dos bloques son μ_e = 0,50 y μ_c = 0,25, respectivamente. Si se aplica al bloque m una fuerza de módulo 10 N, a un ángulo θ = 60° con la horizontal.

a) ¿Cuáles son las aceleraciones de los dos bloques?

b) ¿Cuál es la fuerza de reacción del bloque M sobre m?



Solución: a) La componente horizontal de la fuerza aplicada al bloque m es: $F_x = F\cos\theta = 10\cos 60^o = 5N$. Veamos si se excede el valor la fuerza de fricción estática máxima que podría ejercer M sobre m, $F_e^{max} = \mu_e N$, encontramos:

$$F_e^{max} = \mu_e(F sen\theta + mg) = 0{,}5(10sen60^o + 1x9{,}8) = 9{,}23N$$

Vemos entonces que $F_x < F_e^{max}$, y por lo tanto no hay deslizamiento y los dos bloques se moverán juntos con una aceleración:

$$a_x = \frac{F_x}{M+m} = \frac{10N\cos 60^o}{(2+1)kg} = 1{,}67m/s^2$$

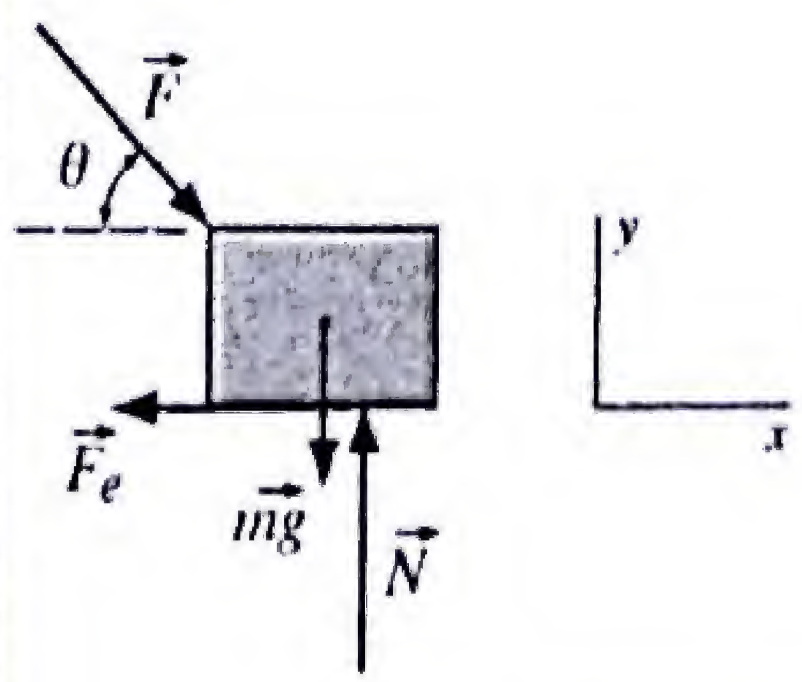
La fuerza de roce estático que arrastra al bloque M es:

$$F_e = Ma_x = (2kg)(1{,}66m/s^2) = 3{,}32N$$

La fuerza normal es: $N = 10sen60^o + (1)(9{,}8) = 18{,}5N$

La fuerza que ejerce el bloque M sobre el bloque m es:

$$\vec{R} = \vec{F}_e + \vec{N} = (-3{,}32\hat{x} + 18{,}5\hat{y})N$$

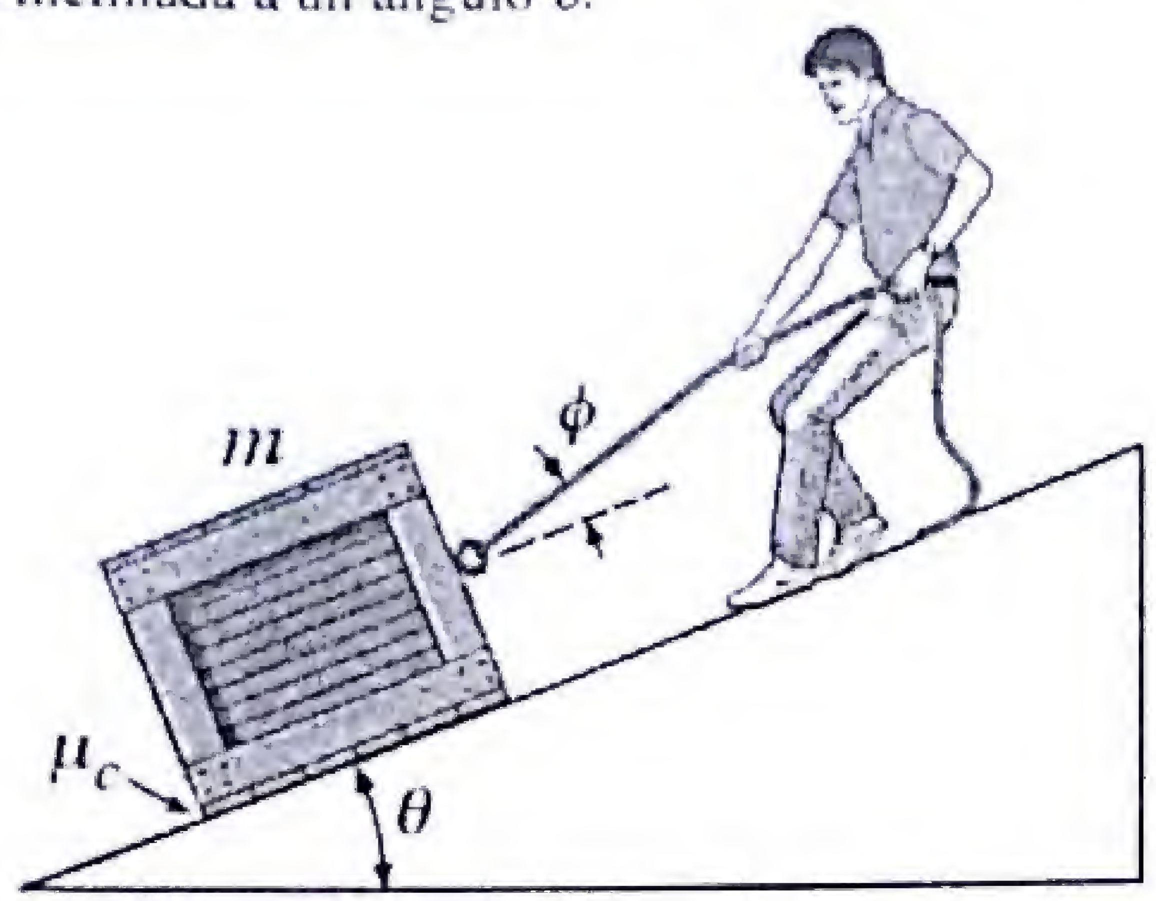


Respuesta:

a) Se mueven juntos con: aceleración: $a_x = 1{,}67m/s^2$
b) $\vec{R} = (-3{,}32\hat{x} + 18{,}5\hat{y})N$

PR-2.25. *Mejor ángulo para jalar con mínimo esfuerzo*

Un cajón de masa m es arrastrado hacia arriba de una rampa inclinada a un ángulo θ.



El coeficiente de fricción cinética entre el cajón y el plano es μ_c. Suponga que el agarre de los zapatos del hombre es suficiente para que no resbale sobre el plano.
a) ¿Bajo qué ángulo ϕ con el plano hay que jalar la cuerda para subir el cajón a una velocidad constante con el mínimo esfuerzo?
b) ¿Cuál es el valor de esta fuerza?

Solución: La fuerza neta sobre el cajón debe ser nula. Aplicando la segunda ley de Newton y tomando en cuenta que la fuerza de fricción cinética es $F_c = \mu_c N$, se tiene:

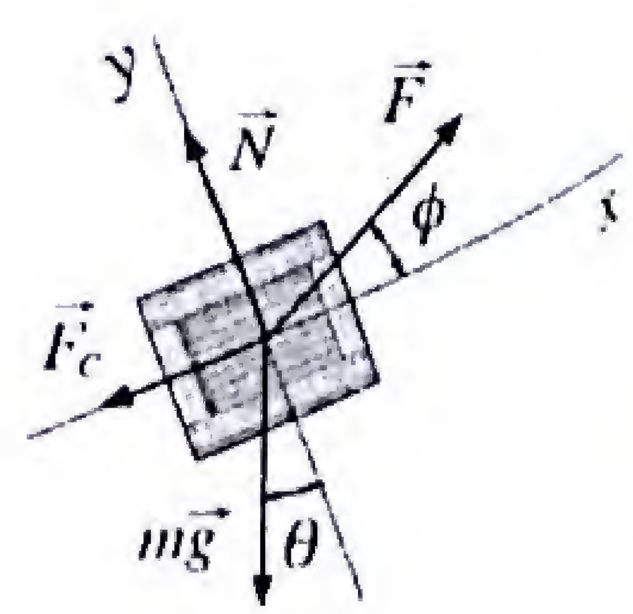
$$\sum F_x = F\cos\phi - \mu_c N - mgsen\theta = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = Fsen\phi + N - mg\cos\theta = 0 \qquad (2)$$

Despejando N de la segunda ecuación y sustituyéndolo en la primera, se obtiene la expresión de la fuerza aplicada:

$$F\cos\phi - \mu_c(mg\cos\theta - Fsen\phi) - mgsen\theta = 0$$

$$F = mg\left(\frac{sen\theta + \mu_c\cos\theta}{\cos\phi + \mu_c sen\phi}\right) \qquad (3)$$



El valor de F será mínimo cuando sea un máximo la función:

$$f(\phi) = \cos\phi + \mu_c sen\phi$$

Si se varía el ángulo ϕ, de la condición $\partial f/\partial\phi = 0$, se obtiene el valor crítico:

$$\frac{\partial}{\partial\phi}(\cos\phi + \mu_c sen\phi) = -sen\phi + \mu_c\cos\phi = 0$$

$$sen\phi = \mu_c\cos\phi \qquad \Rightarrow \qquad tg\phi = \mu_c$$

b) Sustituyendo este valor de μ_c en la ecuación (3), obtenemos la fuerza que debe ser aplicada:

$$F = mg\left(\frac{sen\theta + tg\phi\cos\theta}{\cos\phi + tg\phi sen\phi}\right) = mg\left(\frac{sen\theta\cos\phi + sen\phi\cos\theta}{\cos^2\phi + sen^2\phi}\right)$$

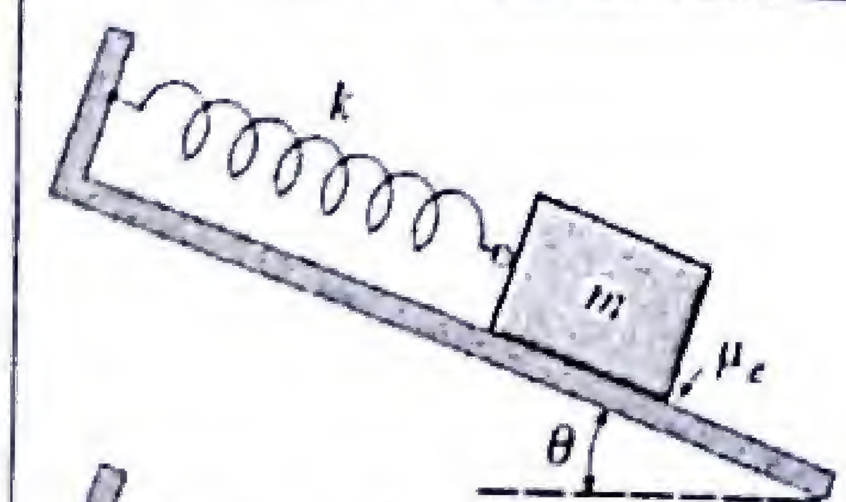
$$F = mgsen(\theta + \phi)$$

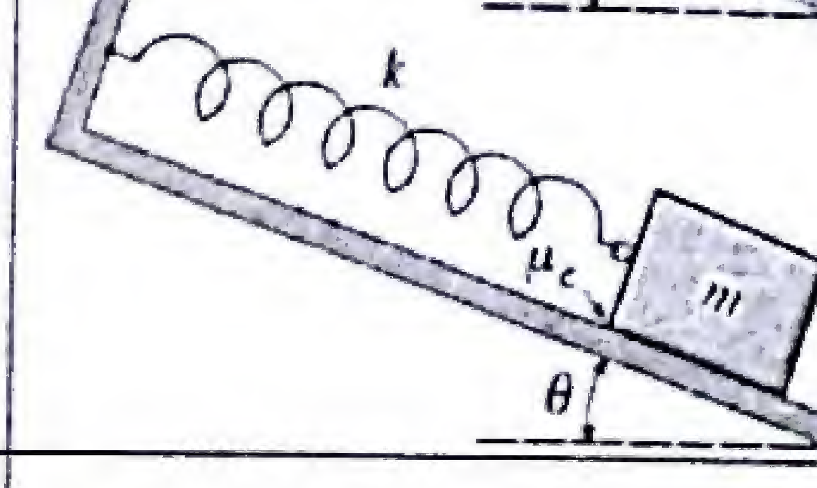
Respuesta:

a) $tg\phi = \mu_c$
b) $F = mgsen(\theta + \phi)$

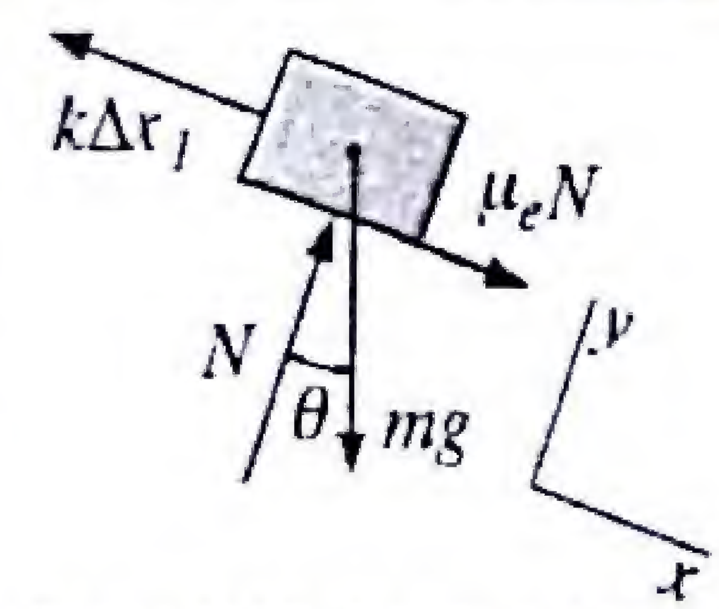
PR-2.26. *¿En cuál región no deslizará el bloque?*

Un bloque de masa m = 1 kg está conectado a un resorte cuyo otro extremo se encuentra fijo a lo alto de un plano de ángulo de inclinación $\theta = 36{,}9°$. La constante de fuerza del resorte es k = 49 N/m, y el coeficiente de fricción estática entre el bloque y el plano inclinado es $\mu_e = 0{,}25$. Comenzando con el bloque en la posición tal que el resorte tiene su longitud normal, ¿a que distancia podemos colocar el bloque para que permanezca allí sin moverse?





Solución: En una posición crítica cuando el bloque está a punto de deslizar, la fuerza de fricción estática tiene su valor máximo ($\mu_e mg\cos\theta$). Esta fuerza apuntará hacia abajo o hacia arriba del plano inclinado, según sea que la fuerza del resorte ($k\Delta x$) sea menor o mayor que la componente de la fuerza de gravedad en esa dirección ($mgsen\theta$).



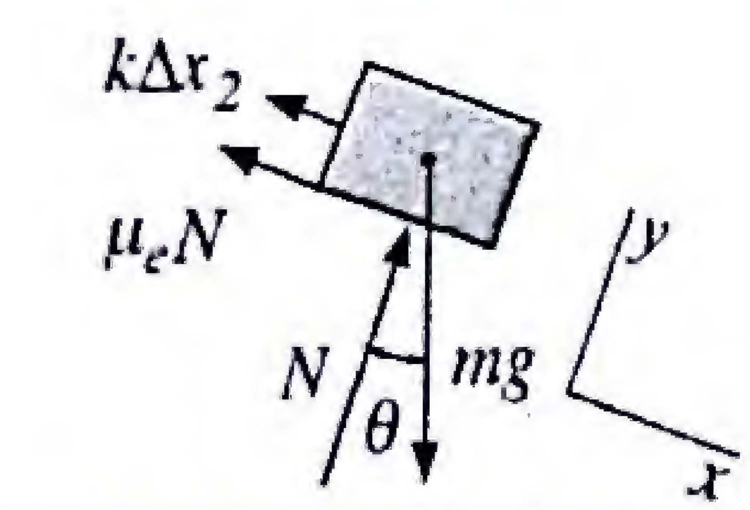
Fuerza de fricción hacia abajo

Cuando la fricción es hacia abajo, en equilibrio se tiene:

$$\sum F_x = \mu_e N + mgsen\theta - k\Delta x_1 = 0$$

$$k\Delta x_1 = mg(sen\theta - \mu_e\cos\theta)$$

$$\Delta x_1 = \frac{(1)(9{,}8)}{49}(\text{sen}36{,}9° - 0{,}25\cos 36{,}9°) = 0{,}08\text{m}$$



Fuerza de fricción hacia arriba

Cuando la fricción es hacia arriba, en equilibrio se tiene:

$$\sum F_x = mgsen\theta - \mu_e N - k\Delta x_2 = 0$$

$$k\Delta x_2 = mg(sen\theta + \mu_e\cos\theta)$$

$$\Delta x_2 = \frac{(1)(9{,}8)}{49}(\text{sen}36{,}9° + 0{,}25\cos 36{,}9°) = 0{,}16\text{m}$$

Respuesta

En el rango: 8 cm ≤ Δx ≤ 16 cm, a partir de la longitud normal del resorte

PR-2.27. *Diversión para personas ligeras o pesadas*

El "rotor" de los parques de diversiones consiste de una cámara cilíndrica giratoria, con un piso que desaparece después que las personas quedan adheridas a la pared gracias a la fricción. Suponga una estudiante de masa m = 50 kg que se coloca en el tambor de radio R = 2 m que alcanza una velocidad angular rotación ω = 30 rpm.

a) ¿Cuál es el valor de la fuerza normal que presiona la estudiante contra la pared?

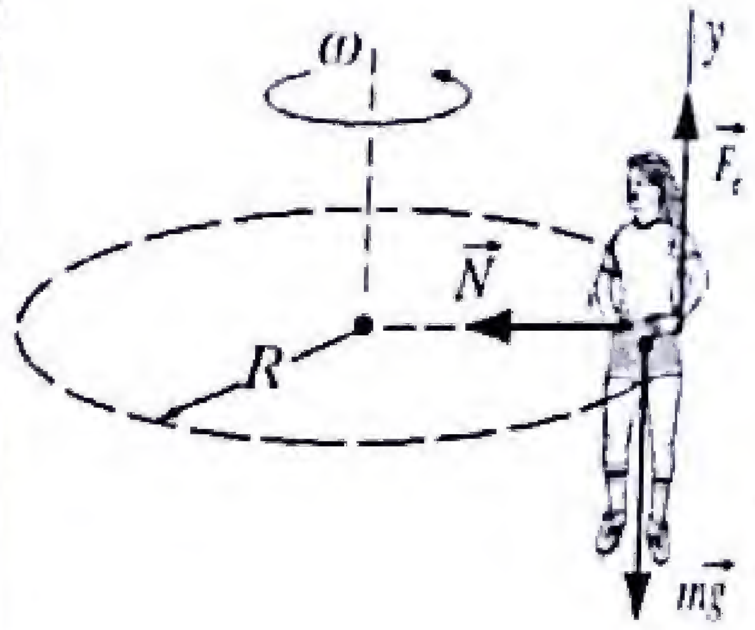
b) ¿Cuál debe ser mínimo valor del coeficiente de fricción estática μ_e entre la estudiante y la pared?

c) Suponga que ahora se coloca en el tambor el amigo, de ella, un joven de 100 kg. ¿se caerá éste cuando el piso sea retirado?

Solución: a) Según un observador inercial la fuerza normal que ejerce la pared del tambor contra la estudiante provoca la aceleración centrípeta de su movimiento:

$$\sum F_r = N = ma_r \qquad \Rightarrow \qquad N = m\frac{v^2}{R} = mR\omega^2$$

$$N = (50\text{kg})(2\text{m})[(30\frac{\text{rev}}{\text{min}})(2\pi\frac{\text{rad}}{\text{rev}})(\frac{1\text{min}}{60\text{s}})]^2 = 987\text{N}$$



b) La fuerza de fricción estática, debe equilibrar el peso de la estudiante. Por lo tanto, el valor mínimo del coeficiente de fricción estática para que no se resbale debe cumplir:

$$\sum F_y = F_e - mg = 0 \qquad \Rightarrow \qquad F_e = \mu_e N = mg$$

Usando la expresión para la fuerza normal:

$$\mu_e(mR\omega^2) = mg \qquad \Rightarrow$$

$$\mu_e = \frac{g}{R\omega^2} = \frac{9{,}8\text{m/s}^2}{(2\text{m})(\pi\text{rad/s})^2} = 0{,}50$$

c) La relación entre ω y el coeficiente μ_e es independiente de la masa de la persona. Por lo tanto el joven de 100 kg también quedará adherido, con tal que su coeficiente de fricción sea superior al valor mínimo ($\mu_e \geq 0{,}50$). ¡Prohibido llevar ropa de seda!

Respuesta:

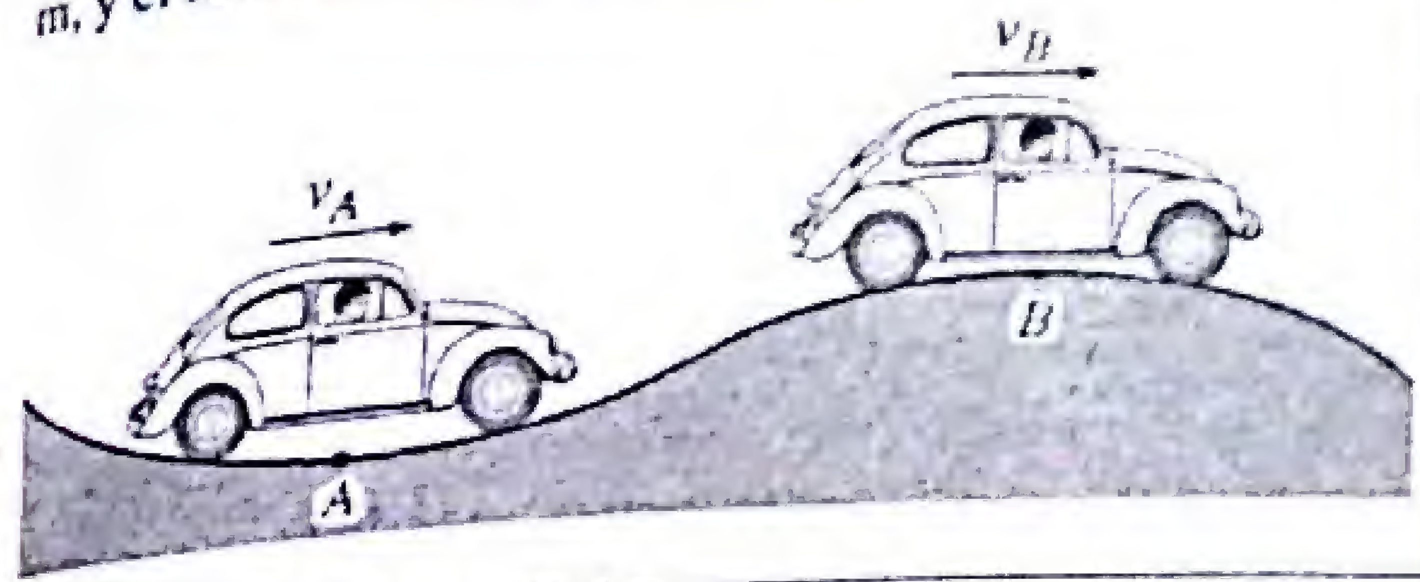
a) N = 987 N
b) μ_e = 0,50

PR-2.28. *Fuerza de contacto en los valles y las lomas*

Un automóvil de masa m se mueve por una carretera que tiene valles y lomas, como se muestra en la figura. En la parte mas baja de un valle el radio de curvatura es R_A = 49 m, y el automóvil lleva una rapidez de 112 km/h (31 m/s).

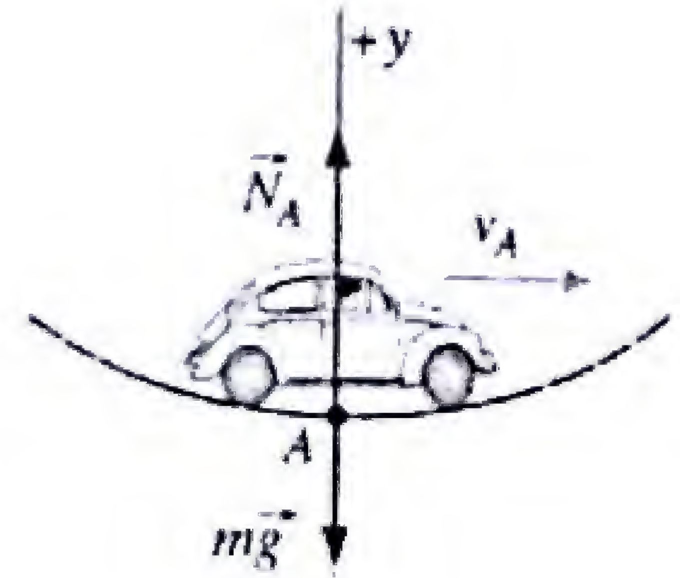
a) ¿Cuál es la fuerza normal (en términos del peso) que ejerce el suelo sobre el automóvil?

b) ¿Qué rapidez máxima debe llevar el automóvil en la parte mas alta de un montículo de radio de curvatura R_B = 40 m, para que no pierda contacto con el suelo?



Solución: a) Cuando el automóvil pasa por el valle A, tomamos el eje y positivo hacia arriba y la segunda ley de Newton aplicada al movimiento circular de radio R_A se escribe:

$$\sum F_y = N_A - mg = m\frac{v_A^2}{R_A}$$

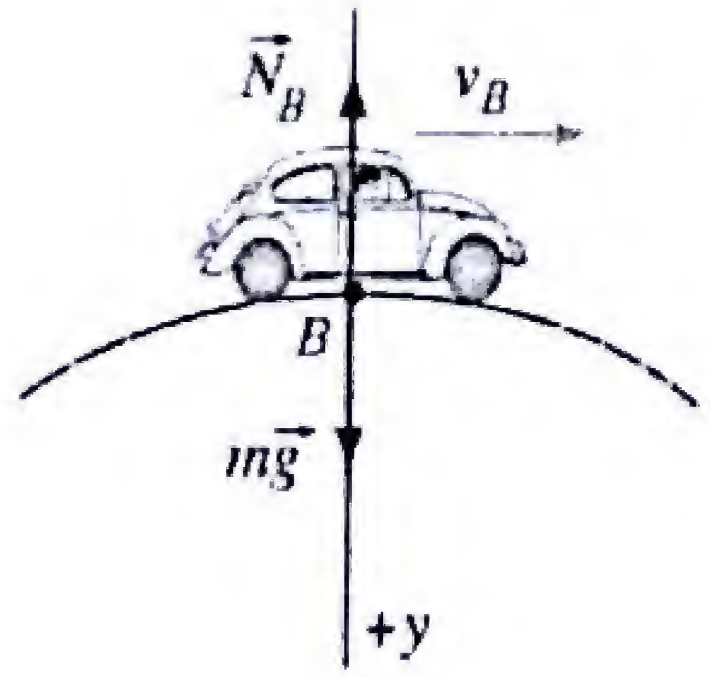


Por lo tanto, la fuerza normal que ejerce el suelo sobre el automóvil en el valle es:

$$N_A = mg + m\frac{v_A^2}{R_A} = mg(1 + \frac{v_A^2}{R_A g})$$

Sustituyendo los valores numéricos:

$$N_A = mg[1 + \frac{(31\text{m/s})^2}{(49\text{m})(9{,}8\text{m/s})}] = 3mg$$



a) Cuando el automóvil pasa por la loma B, tomamos el eje y positivo hacia abajo y la segunda ley de Newton se escribe:

$$\sum F_y = mg - N_B = m\frac{v_B^2}{R_B} \qquad \Rightarrow \qquad N_B = mg(1 - \frac{v_B^2}{R_B g})$$

La máxima velocidad ocurre cuando el automóvil pierde contacto con el suelo ($N_B = 0$) o sea:

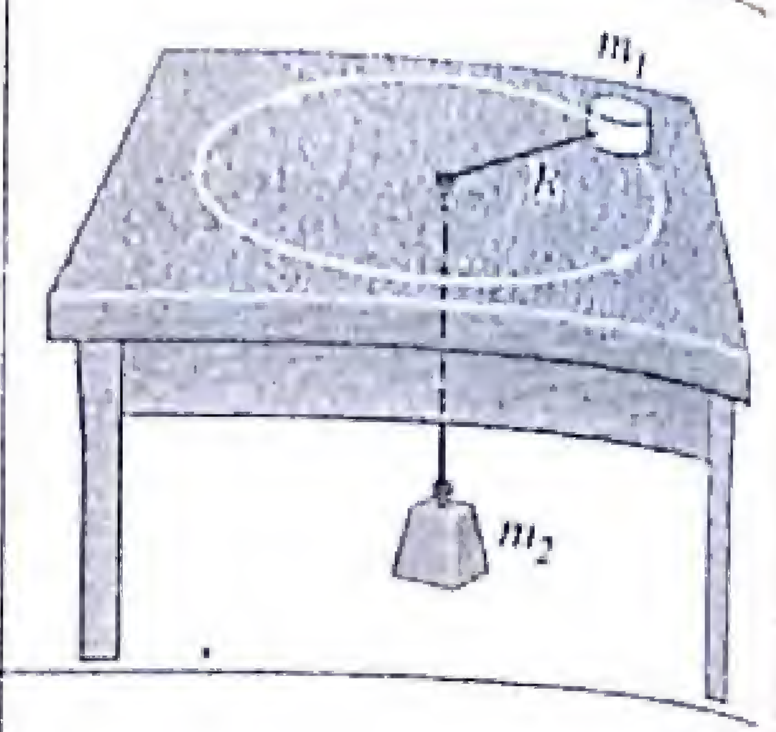
$$v_B^{max} = \sqrt{Rg} = \sqrt{(40\text{m})(9{,}8\text{m/s})} = 19{,}8\text{m/s} = 71{,}3\text{km/h}$$

Respuesta:

a) $N_A = 3mg$
b) $v_B^{max} = 71{,}3\text{km/h}$

PR-2.29. *El disco al girar mantiene la pesa en reposo*

Un disco de masa $m_1 = 0{,}2$ kg que está sobre una mesa horizontal sin fricción, se encuentra amarrado a una cuerda que pasa por un agujero en la mesa. En el otro extremo de la cuerda se encuentra suspendida una pesa de masa $m_2 = 1$ kg. La pesa permanece en equilibrio mientras el disco está girando sobre la mesa en un círculo de radio $R = 1$m. ¿A qué rapidez v gira el disco?



Solución: Para que la pesa permanezca en reposo, la tensión en la cuerda debe equilibrar su peso:

Pesa m_2: $$\sum F_y = T - m_2 g = 0 \quad \Rightarrow \quad T = m_2 g$$

La tensión $\vec{T}$ de la cuerda suministra la fuerza centrípeta que mantiene el disco de masa m_1 en su órbita circular. Aplicando la segunda ley de Newton:

Disco m_1: $$\sum F_r = T = m_1 a_r \quad \Rightarrow \quad m_2 g = m_1\left(\frac{v^2}{R}\right)$$

Despejando, obtenemos la rapidez de rotación:

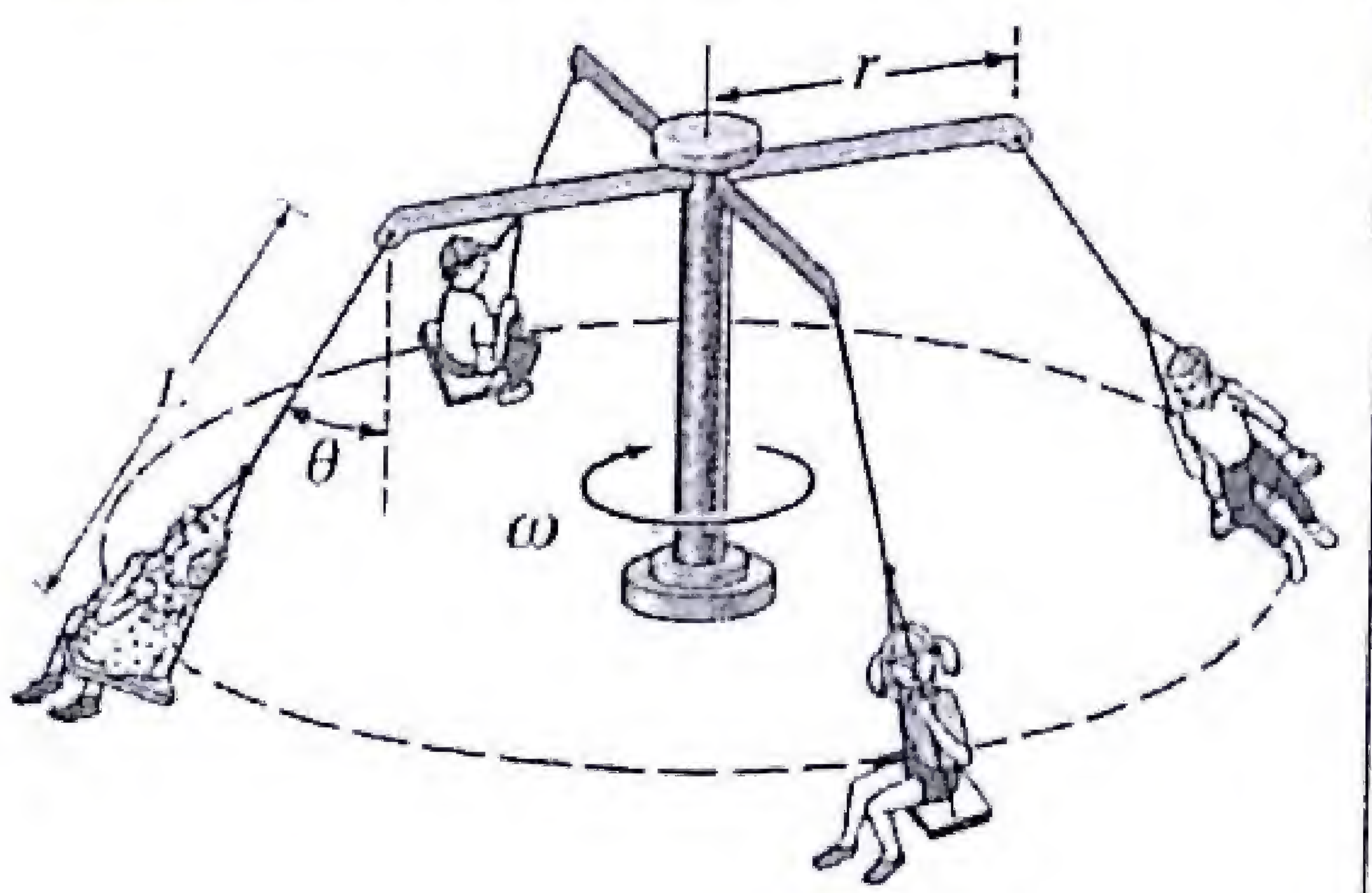
$$v = \sqrt{\frac{m_2 g R}{m_1}} = \sqrt{\frac{(1\text{kg})(9{,}8\text{m/s}^2)(1\text{m})}{0{,}2\text{kg}}} = 7\text{m/s}$$

Respuesta

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{m_2 g R}{m_1}} = 7\text{m/s}}$$

PR-2.30. *Todos giran con la misma inclinación*

En un parque de diversiones, un carrusel giratorio tiene sillas suspendidas de brazos horizontales de radio $r = 3$ m, mediante cables livianos de longitud $L = 5{,}3$ m.



Un estudiante observa que cuando el sistema gira, los cables forman un ángulo $\theta = 30°$ con la vertical.

a) ¿Cual es la velocidad angular de rotación?

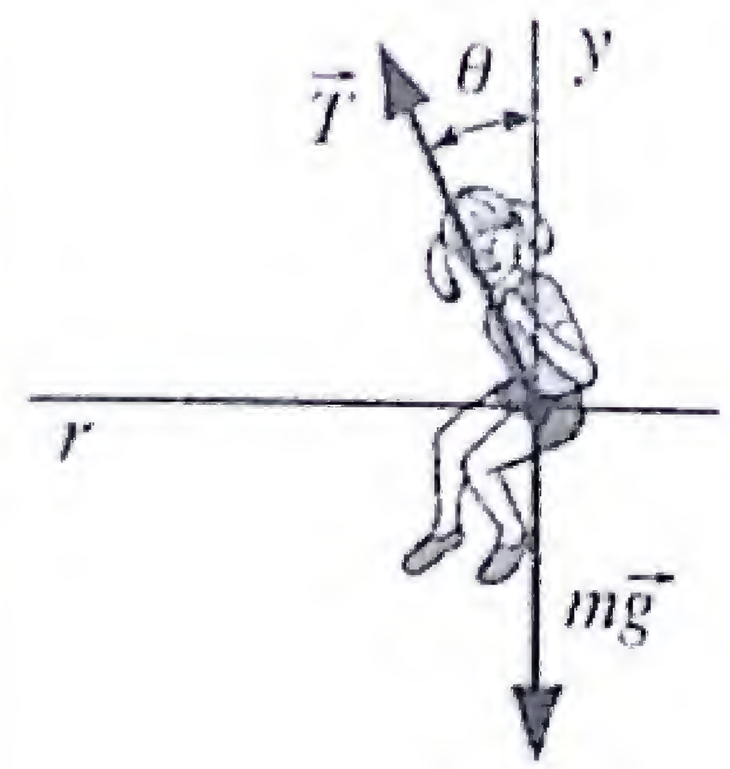
b) ¿Dependerá el ángulo que forman los cables de diferentes sillas del peso de cada persona?

c) ¿Cuál será la tensión del cable para una persona de 50 kg (incluida la silla)?

Solución: Aplicando la segunda ley de Newton a una persona de masa m, en las direcciones vertical y radial, respectivamente:

$$\sum F_y = T\cos\theta - mg = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_r = T sen\theta = m\omega^2 R \qquad (2)$$



Siendo el radio del círculo de rotación:

$$R = r + L sen\theta$$

Dividiendo la ecuación (2) entre la (1), se elimina T y se obtiene:

$$\frac{sen\theta}{\cos\theta} = tg\theta = \frac{\omega^2 R}{g} \quad \Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{g tg\theta}{R}$$

La velocidad angular es:

$$\omega = \sqrt{\frac{g tg\theta}{r + L sen\theta}} = \sqrt{\frac{9{,}8 tg30°}{3 + 5{,}3 sen30°}} = 1\text{rad/s}$$

b) El ángulo no depende de la masa del pasajero.

c) De la ecuación (1) se obtiene la tensión de la cuerda:

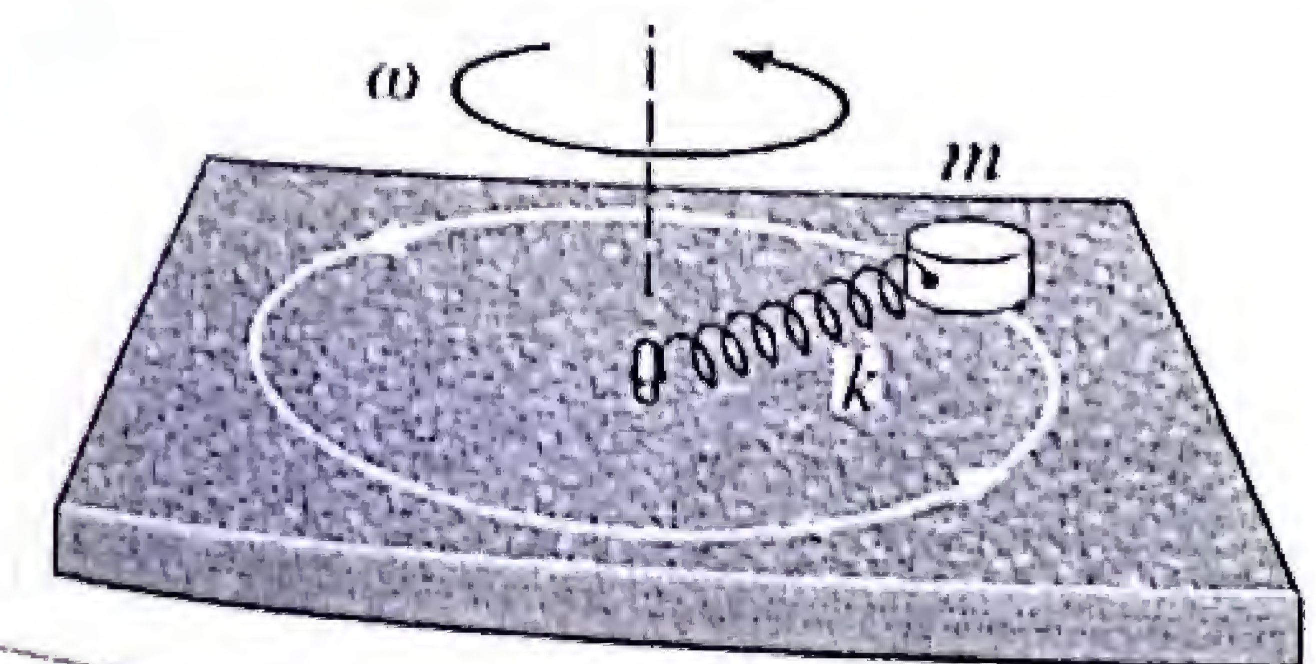
$$T = \frac{mg}{\cos\theta} = \frac{(50\text{kg})(9{,}8\text{m/s}^2)}{\cos 30°} = 566\text{N}$$

Respuesta

a) $\omega = 1$rad/s
b) No.
c) $T = 566$N

PR-2.31. *Un disco que al girar estira un resorte*

Sobre una superficie horizontal sin fricción, un disco de masa m está girando unido a un resorte de constante elástica k y longitud distendida L_O.



Si la velocidad angular de rotación del disco es ω, determine:

a) El radio R del movimiento circular.

b) La tensión T del resorte.

Solución: La tensión del resorte le proporciona al disco la aceleración centrípeta del movimiento circular:

$$\sum F_r = T = ma_c \qquad \Rightarrow \qquad T = m\omega^2 R$$

La tensión del resorte aumenta en proporción directa a su alargamiento:

$$T = k\Delta r = k(R - L_0)$$

Igualando esta expresión a la anterior se obtiene el radio:

$$R = \frac{kL_0}{(k - m\omega^2)}$$

b) La tensión en el resorte es:

$$T = m\omega^2\left(\frac{kL_0}{k - m\omega^2}\right) = \frac{km\omega^2 L_0}{k - m\omega^2}$$

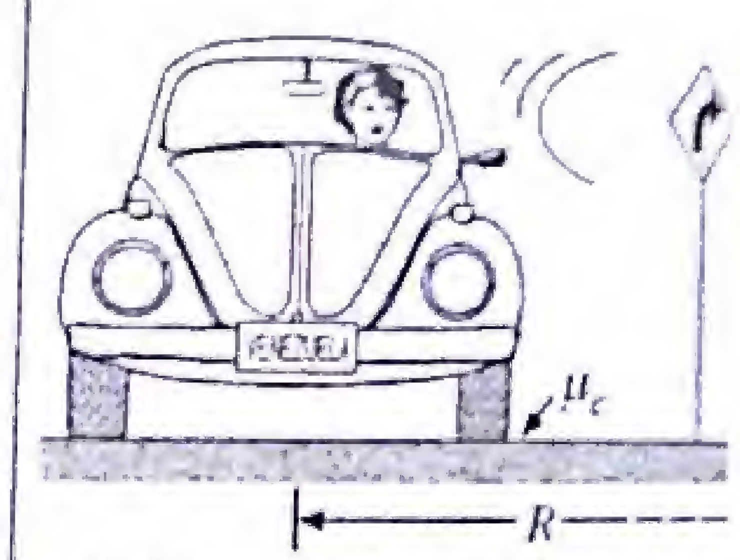
Respuesta:

a) $R = \frac{kL_0}{(k - m\omega^2)}$

b) $T = \frac{km\omega^2 L_0}{k - m\omega^2}$

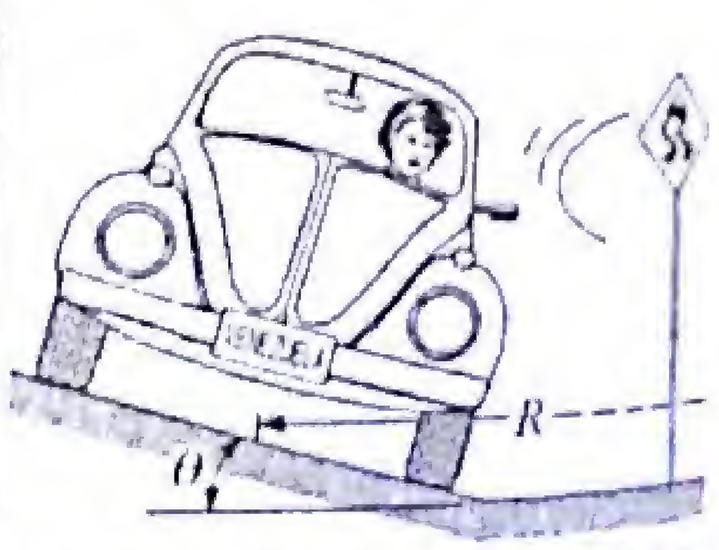
PR-2.32 *Velocidad máxima permitida en una curva*

a) Un automóvil viaja por una carretera horizontal y toma una curva describiendo una circunferencia de radio R = 30 m. Si el coeficiente de fricción estática entre las ruedas y el pavimento es μ_e = 0.66. ¿Cuál será la velocidad máxima que puede tener el automóvil sin salirse de la carretera? . ¿Dependerá ésta de la masa del automóvil?



(a) Curva en carretera plana y rugosa

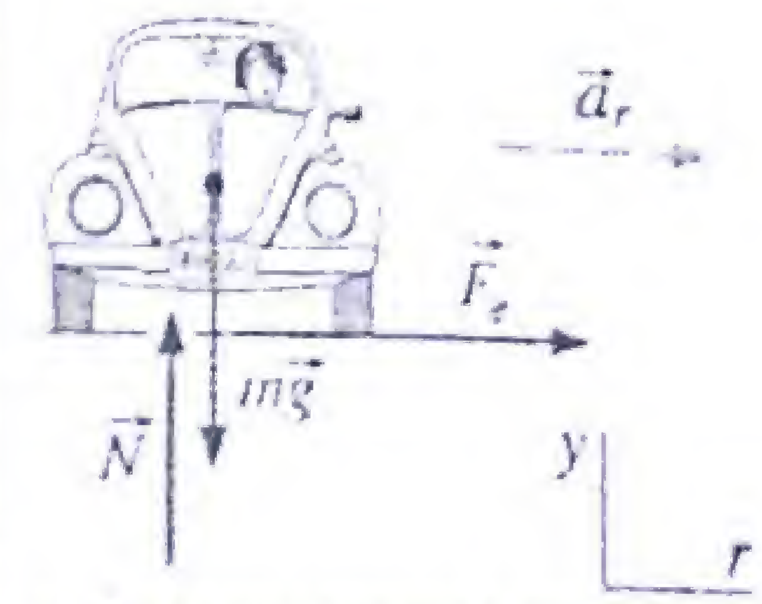
b) Los tramos curvos de las carreteras deben tener una cierta inclinación o "peralte" para que los automóviles no tengan que depender mucho de la fricción para tomar la curva sin patinar. Suponga que se proyecta una carretera peraltada de modo que un automóvil desplazándose a 50 km/h (13,9 m/s) pueda tomar una curva de radio R = 30 m aun, el pavimento está mojado (caso extremo: μ_e = 0). ¿Cuál debe ser el ángulo θ de peralte apropiado para esta velocidad?



(b) Curva en carretera peraltada lisa

Solución: a) En la carretera plana, la fuerza radial que suministra al automóvil la aceleración centrípeta para que permanezca en trayectoria circular, es la fuerza de fricción estática:

$$\sum F_r = F_e = ma_r = m\frac{v^2}{R}$$



a) Curva en carretera plana y rugosa

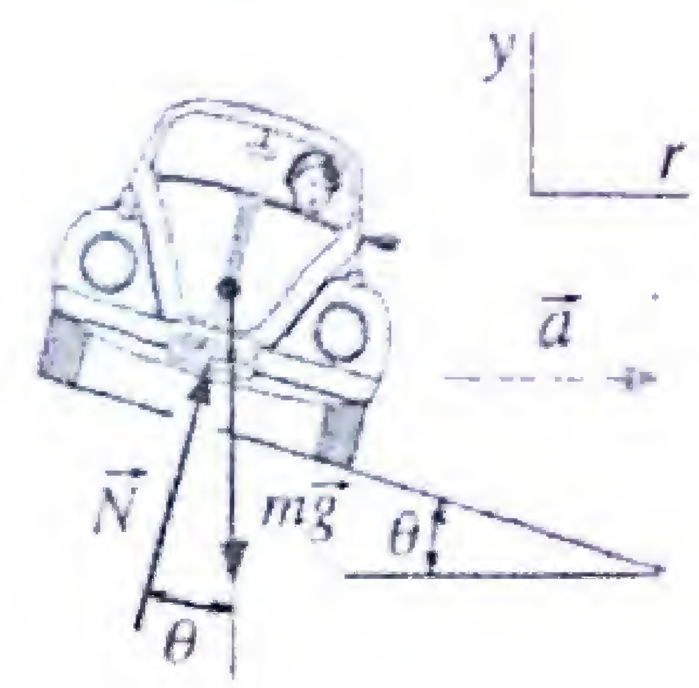
Como no hay aceleración vertical, la fuerza normal equilibra el peso:

$$\sum F_y = N - mg = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N = mg$$

La rapidez máxima que el automóvil puede tener al tomar la curva corresponde a la condición en que está a punto de patinar hacia afuera. En este caso la fuerza de fricción estática alcanza su valor máximo:

$$F_e = \mu_e N = \mu_e mg = m\frac{v^2}{R}$$

$$v_{max} = \sqrt{\mu_e Rg} = \sqrt{(0,66)(30\text{m})(9,8\text{m/s}^2)} = 13,9\frac{\text{m}}{\text{s}} = 50\frac{\text{km}}{\text{h}}$$



b) Curva en carretera peraltada y lisa

b) Si no hay fricción, pero la carretera es inclinada, la fuerza normal que ejerce el suelo tiene una componente horizontal $N sen\theta$ que apunta hacia el centro de rotación y suministra la fuerza centrípeta. Por la segunda ley de Newton:

$$\sum F_r = N sen\theta = ma_r \qquad \Rightarrow \qquad N sen\theta = m\frac{v^2}{R} \qquad (1)$$

El automóvil está en equilibrio en la dirección vertical, por lo tanto:

$$\sum F_r = N\cos\theta - mg = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N\cos\theta = mg \qquad (2)$$

Si se divide la Ec. 1 entre la Ec. 2, para eliminar N, obtenemos el ángulo de peralte requerido:

$$tg\theta = \frac{v^2}{Rg} \qquad \Rightarrow \qquad \theta = arctg\left[\frac{(13.9\text{m/s})^2}{(30\text{m})(9,8\text{m/s}^2)}\right] = 33,3°$$

Observe que, en esta carretera peraltada pero sin rozamiento, un conductor que intente tomar la curva a velocidad mayor de 50 km/h deslizará hacia arriba, y, si la toma a un velocidad menor de 50 km/h, deslizará hacia abajo por la pendiente.

Respuesta:

a) $v_{max} = 13,9\frac{\text{m}}{\text{s}} = 50\frac{\text{km}}{\text{h}}$

b) $\theta = arct\left(\frac{v^2}{Rg}\right) = 33,3°$

Solución: La tensión del resorte le proporciona al disco la aceleración centrípeta del movimiento circular:

$$\sum F_r = T = ma_c \qquad \Rightarrow \qquad T = m\omega^2 R$$

La tensión del resorte aumenta en proporción directa a su alargamiento:

$$T = k\Delta r = k(R - L_0)$$

Igualando esta expresión a la anterior se obtiene el radio:

$$R = \frac{kL_0}{(k - m\omega^2)}$$

b) La tensión en el resorte es:

$$T = m\omega^2\left(\frac{kL_0}{k - m\omega^2}\right) = \frac{km\omega^2 L_0}{k - m\omega^2}$$

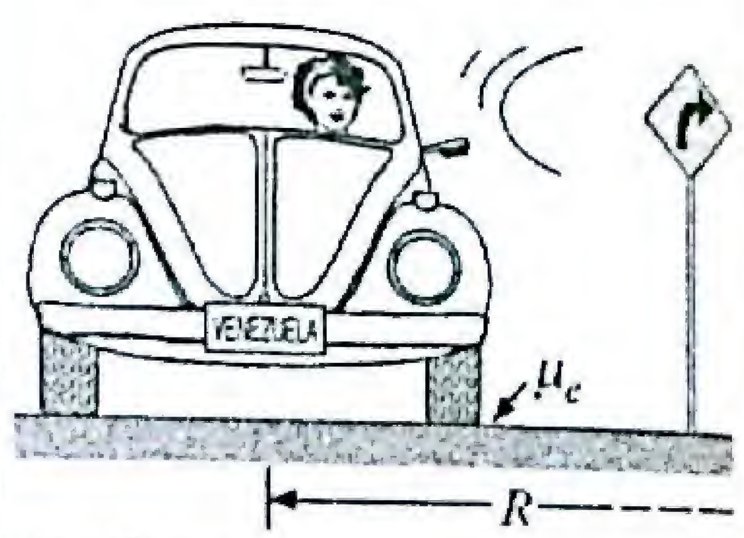
Respuesta:

a) $R = \dfrac{kL_0}{(k - m\omega^2)}$

b) $T = \dfrac{km\omega^2 L_0}{k - m\omega^2}$

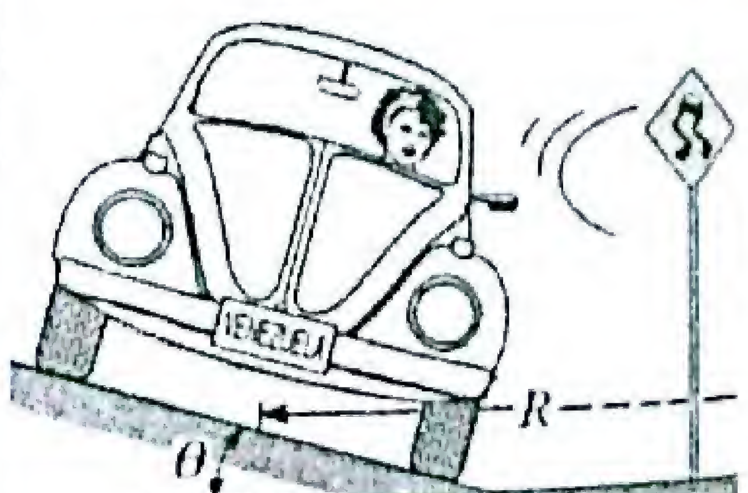
PR-2.32. *Velocidad máxima permitida en una curva*

a) Un automóvil viaja por una carretera horizontal y toma una curva describiendo una circunferencia de radio R = 30 m. Si el coeficiente de fricción estática entre las ruedas y el pavimento es μ_e = 0,66. ¿Cuál será la velocidad máxima que puede tener el automóvil sin salirse de la carretera? , ¿Dependerá ésta de la masa del automóvil?



(a) Curva en carretera plana y rugosa

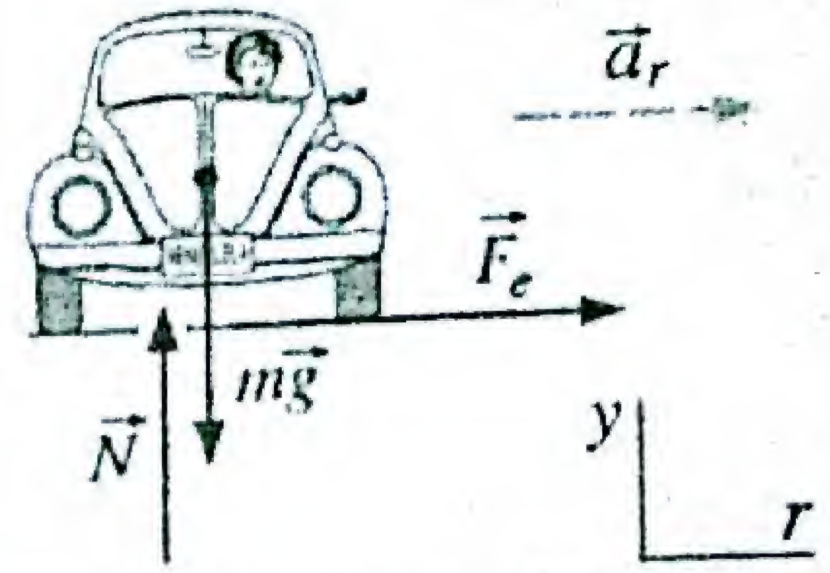
b) Los tramos curvos de las carreteras deben tener una cierta inclinación o "peralte" para que los automóviles no tengan que depender mucho de la fricción para tomar la curva sin patinar. Suponga que se proyecta una carretera peraltada de modo que un automóvil desplazándose a 50 km/h (13,9 m/s) pueda tomar una curva de radio R = 30 m aun , el pavimento está mojado (caso extremo: μ_e = 0). ¿Cuál debe ser el ángulo θ de peralte apropiado para esta velocidad?



(b) Curva en carretera peraltada lisa

Solución: a) En la carretera plana, la fuerza radial que suministra al automóvil la aceleración centrípeta para que permanezca en trayectoria circular, es la fuerza de fricción estática:

$$\sum F_r = F_e = ma_r = m\frac{v^2}{R}$$



a) Curva en carretera plana y rugosa

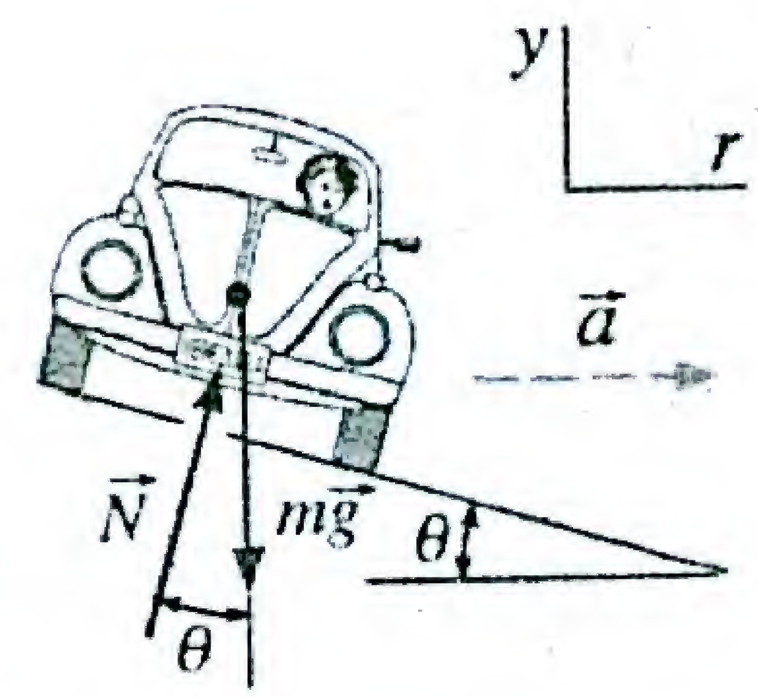
Como no hay aceleración vertical, la fuerza normal equilibra el peso:

$$\sum F_y = N - mg = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N = mg$$

La rapidez máxima que el automóvil puede tener al tomar la curva corresponde a la condición en que está a punto de patinar hacia afuera. En este caso la fuerza de fricción estática alcanza su valor máximo:

$$F_e = \mu_e N = \mu_e mg = m\frac{v^2}{R}$$

$$v_{max} = \sqrt{\mu_e Rg} = \sqrt{(0,66)(30\text{m})(9,8\text{m/s}^2)} = 13,9\,\frac{\text{m}}{\text{s}} = 50\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$



b) Curva en carretera peraltada y lisa

b) Si no hay fricción, pero la carretera es inclinada, la fuerza normal que ejerce el suelo tiene una componente horizontal $Nsen\theta$ que apunta hacia el centro de rotación y suministra la fuerza centrípeta. Por la segunda ley de Newton:

$$\sum F_r = Nsen\theta = ma_r \qquad \Rightarrow \qquad Nsen\theta = m\frac{v^2}{R} \qquad (1)$$

El automóvil está en equilibrio en la dirección vertical, por lo tanto:

$$\sum F_r = N\cos\theta - mg = 0 \qquad \Rightarrow \qquad N\cos\theta = mg \qquad (2)$$

Si se divide la Ec. 1 entre la Ec. 2, para eliminar N, obtenemos el ángulo de peralte requerido:

$$tg\theta = \frac{v^2}{Rg} \qquad \Rightarrow \qquad \theta = arctg\left[\frac{(13,9\text{m/s})^2}{(30\text{m})(9,8\text{m/s}^2)}\right] = 33,3°$$

Observe que, en esta carretera peraltada pero sin rozamiento, un conductor que intente tomar la curva a velocidad mayor de 50 km/h deslizará hacia arriba, y, si la toma a un velocidad menor de 50 km/h, deslizará hacia abajo por la pendiente.

Respuesta:

a) $v_{max} = 13,9\,\dfrac{\text{m}}{\text{s}} = 50\,\dfrac{\text{km}}{\text{h}}$

b) $\theta = arct\left(\dfrac{v^2}{Rg}\right) = 33,3°$

c) En la posición C, el asiento de la silla aplica una fuerza vertical, $\vec{N}_y$, que equilibra el peso $m\vec{g}$ de la persona:

$$\sum F_y = N_y - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N_y = mg$$

La espalda de la silla aplica una fuerza horizontal, $\vec{N}_x$ que proporciona la aceleración centrípeta.

$$\sum F_x = N_x = m\frac{v^2}{R} = m\omega^2 R$$

El peso aparente es la fuerza resultante ejercida sobre la persona por la silla:

$$N_C = \sqrt{N_x^2 + N_y^2} = mg\sqrt{1 + (\frac{\omega^2 R}{g})^2} = 1{,}04mg = 611\text{N}$$

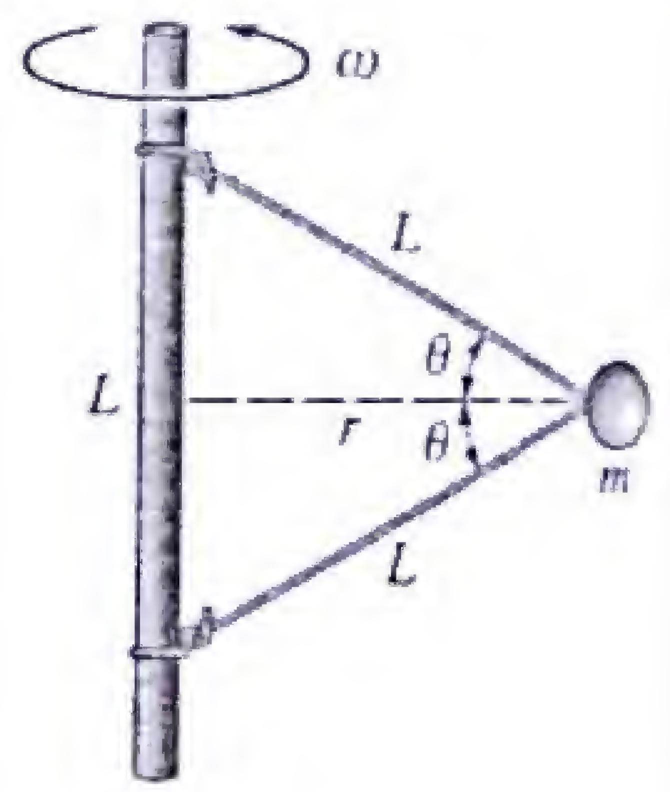
Respuesta:

a) 588 N = Peso verdadero
424 N = Peso aparente en A
b) 752 N = Peso aparente en B
c) 611 N = Peso aparente en C

PR-2.35. ***Las cuerdas se tensan debido a la rotación***

Una esferita de masa m está amarrada a una varilla vertical giratoria mediante dos cuerdas livianas de longitud L. El sistema está girando con respecto al eje de la varilla, a una velocidad angular ω, tal que ambas cuerdas están tensas formando un triángulo equilátero con la varilla.

a) Determine la tensión en cada cuerda.
b) Halle el valor de la velocidad angular de rotación, ω_o, por debajo del cual la cuerda inferior se afloja.

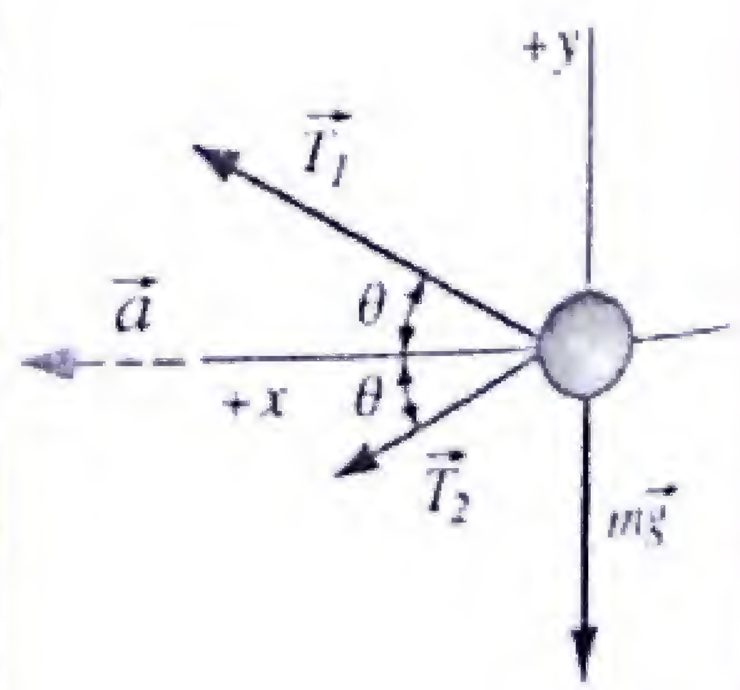


Solución: Dibujamos el diagrama de cuerpo libre de la esferita y aplicamos la segunda ley de Newton. En la dirección vertical no hay aceleración:

$$\sum F_y = T_1 sen\theta - T_2 sen\theta - mg = 0 \qquad (1)$$

La componente radial de fuerza neta es responsable de la aceleración centrípeta del movimiento circular:

$$\sum F_x = T_1 cos\theta + T_2 cos\theta = m\omega^2 r \qquad (2)$$



Tomando en cuenta que el ángulo θ es 30° y que el radio de rotación es $r = Lcos\theta$, podemos simplificar las ecuaciones (1) y (2):

$$T_1 - T_2 = 2mg \qquad (1)'$$

$$T_1 + T_2 = m\omega^2 L \qquad (2)'$$

Sumando las dos ecuaciones se obtiene T_1:

$$T_1 = \frac{1}{2}m\omega^2 L + mg$$

Restándolas se obtiene T_2:

$$T_2 = \frac{1}{2}m\omega^2 L - mg$$

b) El valor crítico de ω para el cual la cuerda inferior pierde su tensión ($T_2 = 0$) se obtiene de la condición:

$$\frac{1}{2}m\omega^2 L = mg \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{2g}{L}}$$

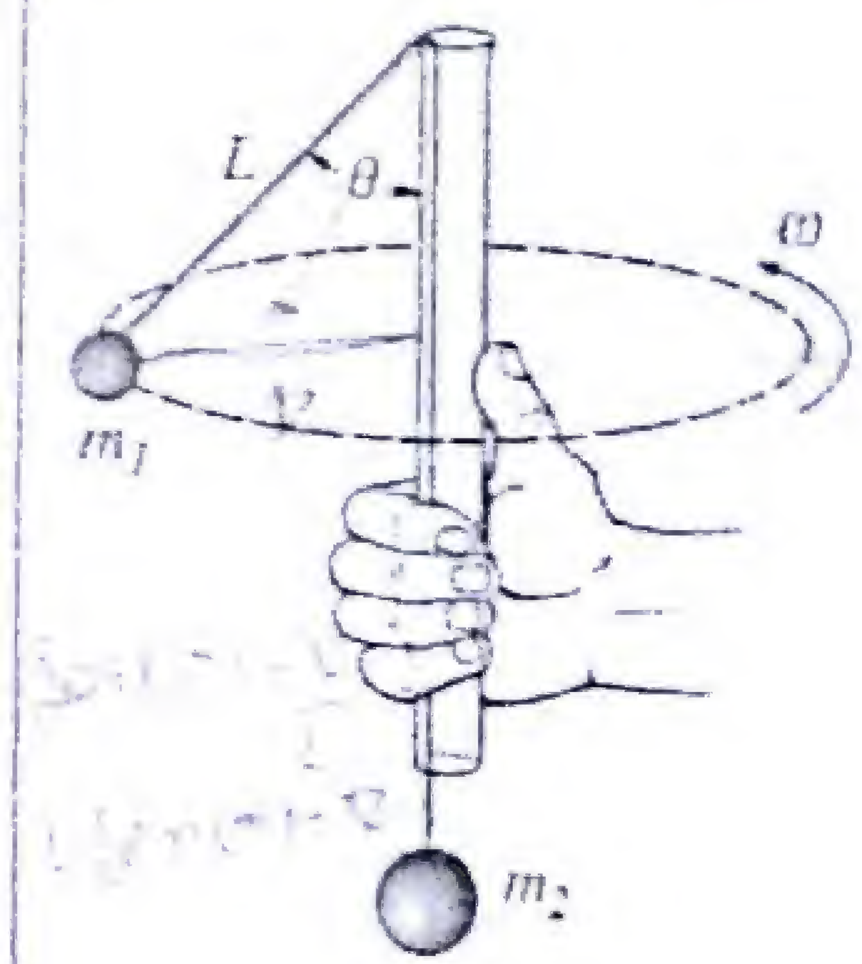
Respuesta:

a) $T_1 = \frac{1}{2}m\omega^2 L + mg$
$T_2 = \frac{1}{2}m\omega^2 L - mg$
b) $\omega = \sqrt{\frac{2g}{L}}$

PR-2.36. ***Pelota en equilibrio por la rotación de otra***

Dos pelotas de masas m_1 y m_2 (con $m_2 > m_1$) están unidas mediante una cuerda que pasa a través de un tubo de vidrio liso. La pelota liviana se hace girar alrededor del tubo en un círculo horizontal con una velocidad angular constante, ω, de manera que la pelota de abajo ni sube ni baja.

a) ¿Cuál es el ángulo entre la cuerda y el tubo?
b) ¿Cuál es la longitud libre de la cuerda que gira?



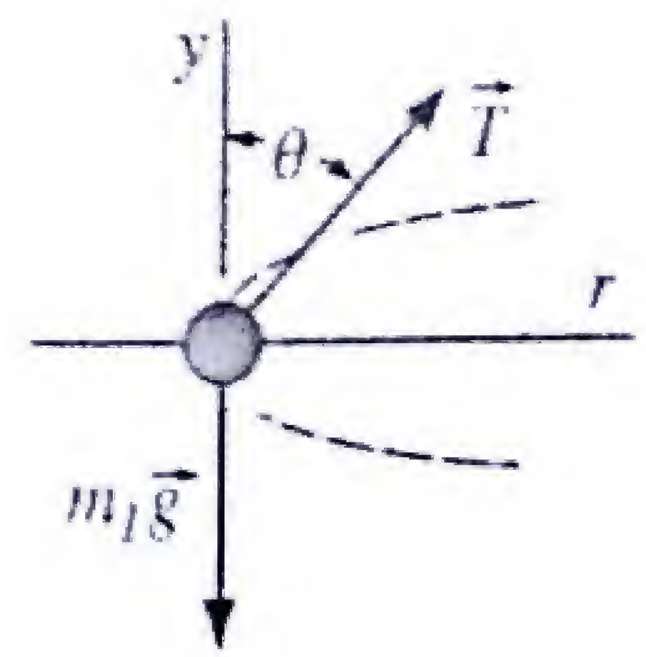
Solución: a) En la dirección vertical hay equilibrio:

Para m_1: $\sum F_y = T cos\theta - m_1 g = 0 \Rightarrow T cos\theta = m_1 g$

Para m_2: $\sum F_y = T - m_2 g = 0 \Rightarrow T = m_2 g$

Eliminando T de este par de ecuaciones se obtiene el ángulo:

$$cos\theta = \frac{m_1}{m_2}$$



b) La componente radial de la tensión es la fuerza centrípeta que mantiene a m_1 en rotación:

$$\sum F_r = T sen\theta = m_1 a_c = m_1\omega^2 r \quad \Rightarrow \quad T sen\theta = m_1\omega^2 r$$

Siendo r el radio del círculo: $sen\theta = r/L$, por lo tanto:

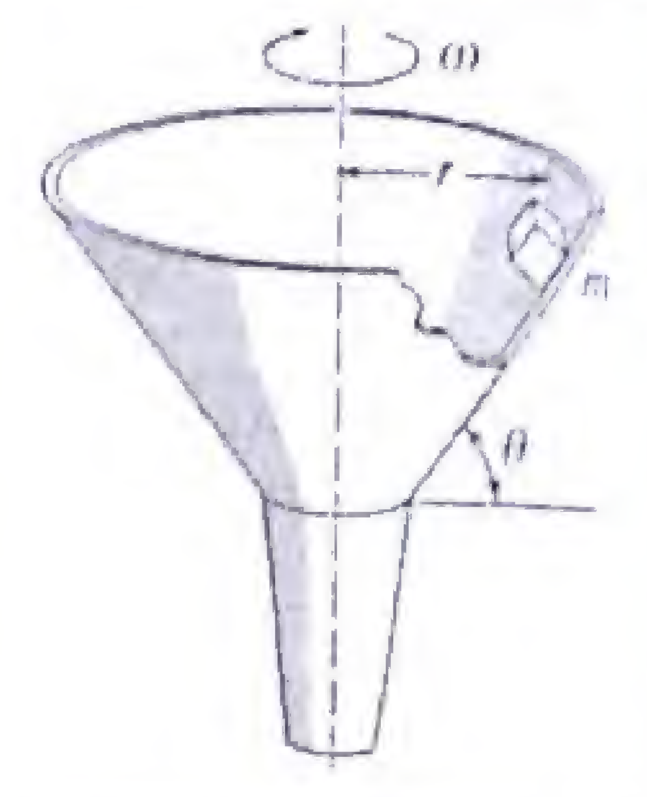
$$L = \frac{m_2}{m_1}\frac{g}{\omega^2}$$

Respuesta:

a) $cos\theta = \frac{m_1}{m_2}$

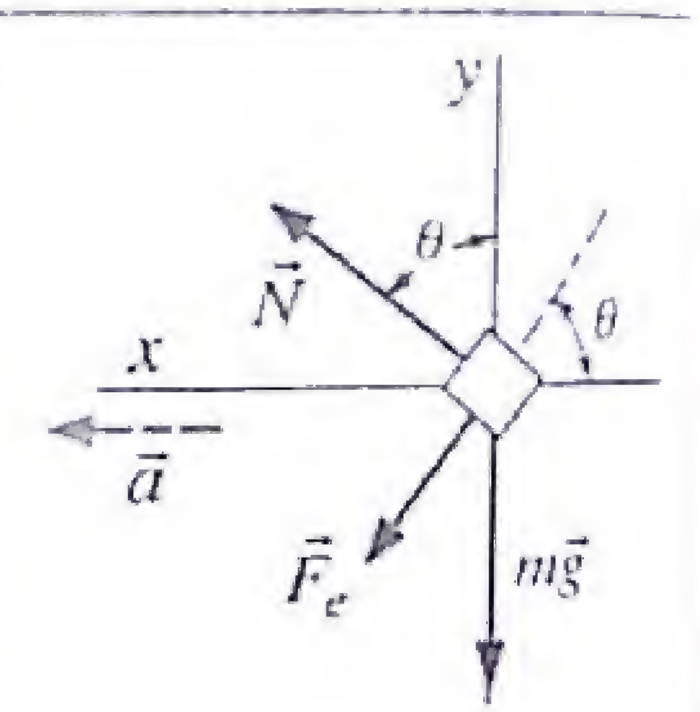
b) $L = \frac{m_2}{m_1}\frac{g}{\omega^2}$

PR-2.37. *Cubo adherido a un embudo en rotación*



Un cubo pequeño de masa m se halla en el interior de un embudo que gira alrededor de su eje a una velocidad angular ω. La pared cónica del embudo forma un ángulo θ con la horizontal. El coeficiente de fricción estática entre el cubo y las paredes del embudo es μ_e. Si se desea que el cubo se mantenga inmóvil respecto al embudo a una distancia r del eje de rotación, determine:
a) el mayor valor de la velocidad angular ω_+
b) el menor valor de la velocidad angular ω_-

Solución: a) Cuando se alcanza la máxima velocidad angular ω_+, el cubo está a punto de subir, la fuerza de fricción estática apunta pendiente abajo, alcanzando su valor máximo $F_e(max) = \mu_e N$. Aplicando la segunda ley de Newton:



a) El cubo a punto de subir

$$\sum F_x = N sen\theta + F_e cos\theta = m\omega_+^2 r \qquad (1)$$

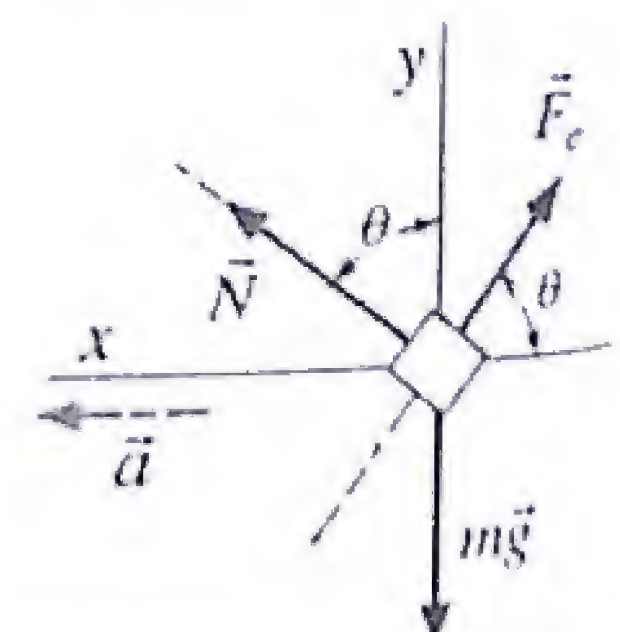
$$\sum F_y = N cos\theta - F_e sen\theta - mg = 0 \qquad (2)$$

$$N sen\theta + \mu_e N cos\theta = m\omega_+^2 r \qquad (1')$$

$$N cos\theta - \mu_e N sen\theta = mg \qquad (2')$$

Combinando las ecuaciones (1) y (2), y simplificando, se obtiene la velocidad angular máxima:

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{r}\left(\frac{tg\theta + \mu_e}{1 - \mu_e tg\theta}\right)}$$



b) El cubo a punto de bajar

b) Para la mínima velocidad angular, ω_- el cubo está a punto de bajar y la fuerza de fricción estática apunta pendiente arriba. Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum F_x = N sen\theta - F_e cos\theta = m\omega_-^2 r \qquad (3)$$

$$\sum F_y = N cos\theta + F_e sen\theta - mg = 0 \qquad (4)$$

$$N sen\theta - \mu_e N cos\theta = m\omega_-^2 r \qquad (3')$$

$$N cos\theta + \mu_e N sen\theta = mg \qquad (4')$$

Dividiendo la ecuación 3' entre la ecuación 4', y despejando se obtiene la velocidad angular mínima:

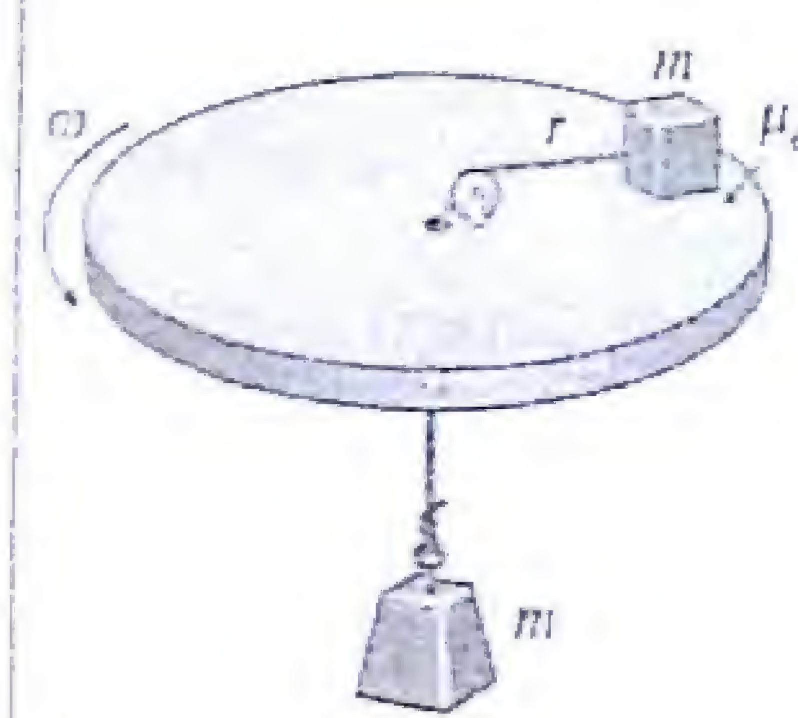
$$\omega_- = \sqrt{\frac{g}{r}\left(\frac{tg\theta - \mu_e}{1 + \mu_e tg\theta}\right)}$$

Respuesta:

a) $\omega_+ = \sqrt{\frac{g}{r}\left(\frac{tg\theta + \mu_e}{1 - \mu_e tg\theta}\right)}$

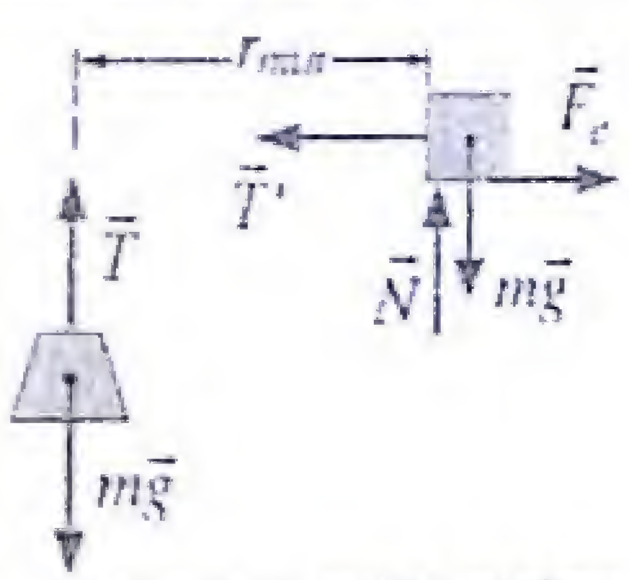
b) $\omega_- = \sqrt{\frac{g}{r}\left(\frac{tg\theta - \mu_e}{1 + \mu_e tg\theta}\right)}$

PR-2.38. *Bloque sin deslizar sobre plato giratorio*



Un bloque de masa m está atado a una cuerda y coloca a una distancia radial r sobre un plato que gira a velocidad angular constante, ω. La cuerda pasa por un agujero en el centro del plato y en el otro extremo se halla una pesa de masa m suspendida verticalmente por el hilo que pasa por un agujero en el centro del plato. El coeficiente de fricción estática entre el plato y el bloque es μ_e. Determine el menor y el mayor valor de la distancia radial r tal que el bloque no deslice sobre el plato.

Solución: a) En la posición de *mínima* distancia, el bloque está a punto de deslizar hacia el centro del plato y la fuerza de fricción $\vec{F}_e$ apunta hacia fuera, oponiéndose a la tensión de la cuerda $\vec{T}$.



Distancia radial mínima

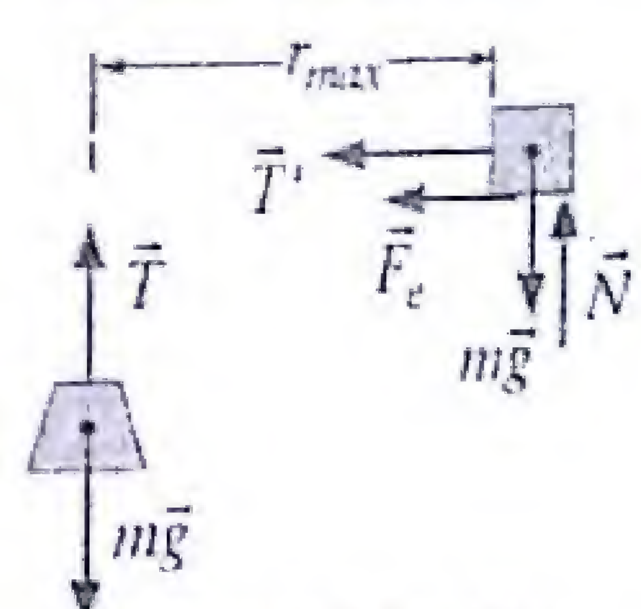
$$\sum F_r = T - F_e = m\omega^2 r_{min}$$

Siendo el valor crítico de la fuerza de fricción estática, $F_e = \mu_e mg$. La tensión de la cuerda debe equilibrar la pesa suspendida: $T = mg$. Sustituyendo estos valores en la expresión anterior:

$$mg - \mu_e mg = m\omega^2 r_{min}$$

Por lo tanto, el radio mínimo es:

$$r_{min} = \frac{g}{\omega^2}(1 - \mu_e)$$



Distancia radial máxima

b) En la posición de *máxima* distancia, el bloque está a punto de deslizar hacia afuera del plato y la fuerza de fricción $\vec{F}_e$ se opone a esta tendencia, apuntando hacia el centro.

$$\sum F_r = T + F_e = m\omega^2 r_{max}$$

Sustituyendo en esta expresión los valores de la fuerza de fricción, $F_e = \mu_e mg$ y de la tensión de la cuerda, $T = mg$, tenemos:

$$mg + \mu_e mg = m\omega^2 r_{max}$$

Por lo tanto, el radio máximo es:

$$r_{max} = \frac{g}{\omega^2}(1+\mu_e)$$

Respuesta:

a) $r_{min} = \frac{g}{\omega^2}(1-\mu_e)$

b) $r_{max} = \frac{g}{\omega^2}(1+\mu_e)$

PR-2.39. *Dale vueltas hasta que se rompa la cuerda*

Se pone a girar en un círculo horizontal, un trozo de cuerda de longitud L = 2 m y masa m = 0,4 kg. La tensión de rotura de la cuerda es T = 640 N. Determine el valor que debe alcanzar la velocidad angular de rotación, ω, para que se rompa la cuerda y diga en qué punto esto sucedería.

Solución: e selecciona a una distancia radial r, un trozo elemental de cuerda de longitud dr y masa: $dm = \lambda dr$, siendo la densidad de masa $\lambda = m/L$. Si ignoramos el peso de la cuerda y aplicamos la segunda ley de Newton en la dirección radial, se tiene:

$$(T+dT)-T = -dm\omega^2 r \quad \Rightarrow \quad dT = -\lambda\omega^2 r dr$$

Observe que la tensión decrece a medida que r aumenta. Integrando:

$$T(r) = -\frac{1}{2}\lambda\omega^2 r^2 + cte.$$

La constante de integración está determinada por la condición de que la tensión debe ser nula en el extremo libre:

$$T(L) = -\frac{1}{2}\frac{m}{L}\omega^2 L^2 + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = m\omega^2 L/2$$

La tensión es:

$$T(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 L[1-(\frac{r}{L})^2]$$

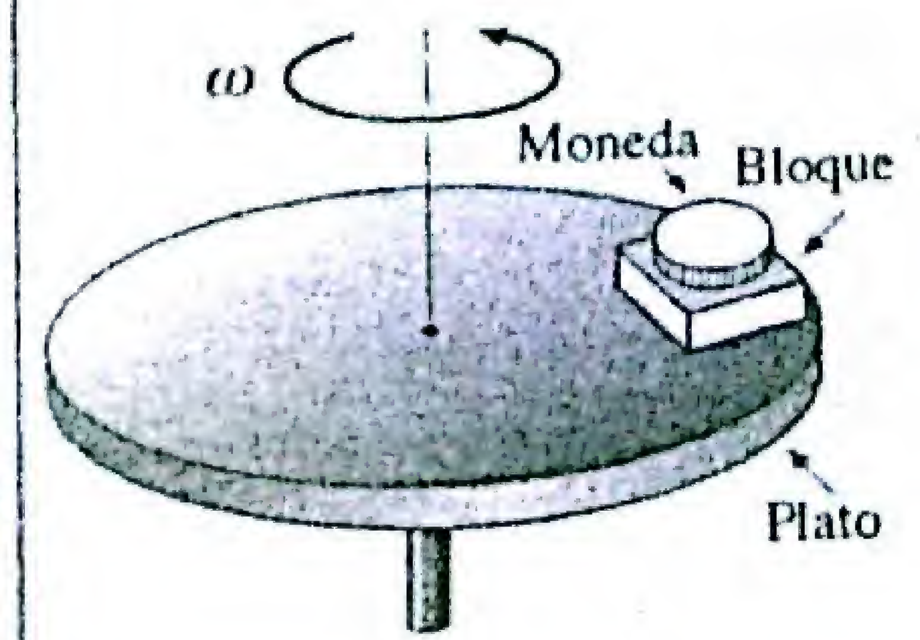
$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{2T}{mL}} = \sqrt{\frac{2(640\text{N})}{(0{,}4\text{kg})(2\text{m})}} = 40\text{rad/s} = 6{,}37\text{rev/s}$$

Respuesta:

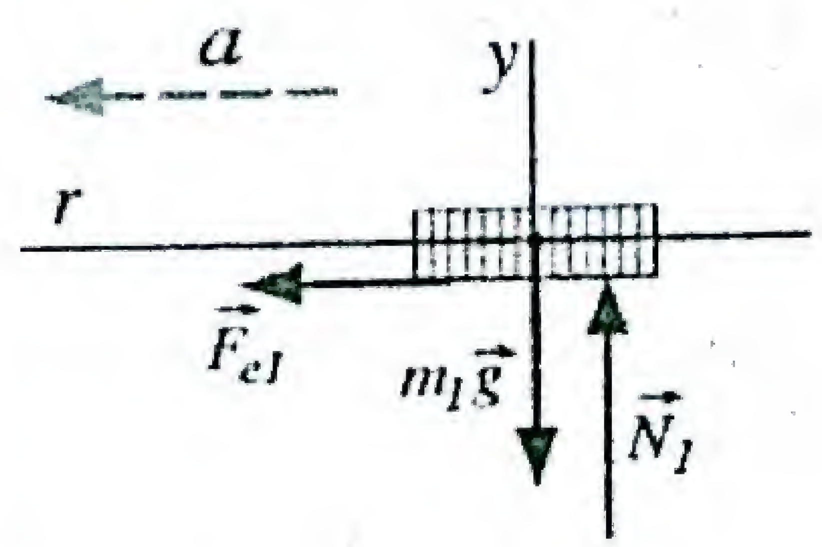
$\omega_m = 40\text{rad/s} = 6{,}37\text{rev/s}$ La cuerda se rompe por el punto donde está agarrada.

PR-2.40. *Moneda sobre bloque girando en un plato*

Una moneda de masa m_1 está sobre un bloque de masa m_2 el cual a su vez está sobre un plato giratorio a una distancia radial R = 0,15 m del eje de rotación. El coeficiente de fricción estática entre la moneda y el bloque es μ_{e1} = 0,55 y entre el bloque y el plato giratorio es μ_{e2} = 0,75. Determine la máxima velocidad angular ω_{max}, de rotación del plato para que ni la moneda ni el bloque deslicen.



Solución: Para que la moneda permanezca sin resbalar sobre el bloque, la máxima velocidad angular de rotación está limitada por la condición de que la fuerza de fricción no alcance su valor máximo, $F_{e1} = \mu_{e1}N_1$. Aplicando la segunda ley de Newton en la dirección radial, a la moneda m_1:



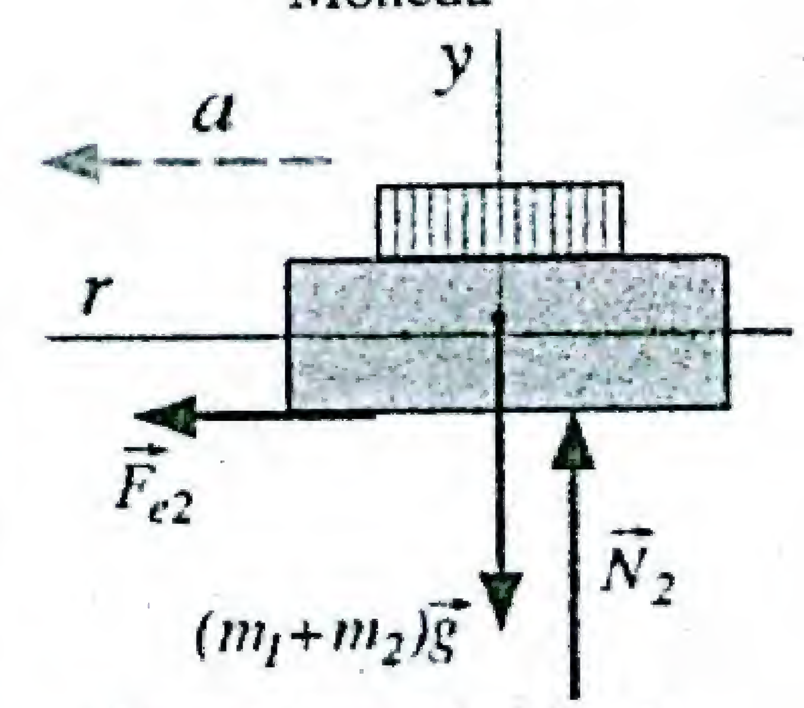
$$\sum F_r = F_{e1} = m_1 a_r = m_1\omega_1^2 R \quad \Rightarrow \quad \mu_{e1}N_1 = m_1\omega_1^2 R$$

$$\sum F_y = N_1 - m_1 g = 0 \quad \Rightarrow \quad N_1 = m_1 g$$

Sustituyendo la fuerza normal $N_1 = m_1 g$ en la primera ecuación, encontramos la máxima velocidad angular:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{\mu_{e1}g}{R}} = \sqrt{\frac{(0{,}55)(9{,}8\text{m/s}^2)}{(0{,}15\text{m})}} = 6\text{rad/s}$$

Moneda



Sistema moneda-bloque

Si consideramos ahora el sistema del bloque y la moneda encima con (m_1+m_2), la máxima velocidad angular de rotación está limitada por la condición de que la fuerza de fricción del bloque con el plato alcanza su valor crítico, $F_{e2} = \mu_{e2}N_2$. Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum F_r = F_{e2} = (m_1+m_2)\omega_a^2 R$$

$$\Rightarrow \quad \mu_{e2}N_2 = (m_1+m_2)\omega_a^2 R$$

$$\sum F_y = N_2 - (m_1 + m_2)g = 0 \quad \Rightarrow \quad N_2 = (m_1 + m_2)g$$

Eliminando N_2 de estas ecuaciones, encontramos el valor de la velocidad angular crítica:

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{\mu_e 2g}{R}} = \sqrt{\frac{(0,75)(9,8\text{m/s}^2)}{(0,15\text{m})}} = 7\text{rad/s}$$

Como $\omega_2 > \omega_1$, la máxima velocidad de rotación del plato para que no ocurra ningún deslizamiento es:

$$\omega_{max} = \omega_1 = 6\text{rad/s}.$$

Respuesta:

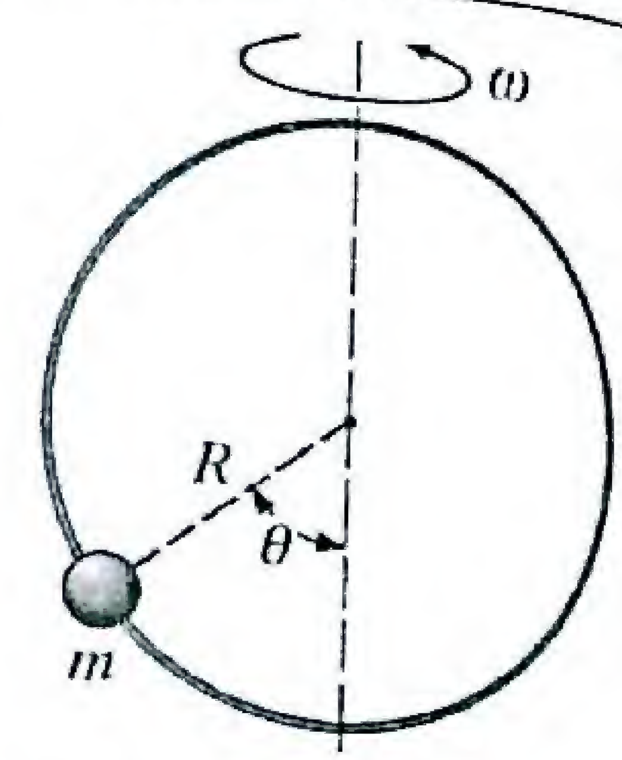
$$\boxed{\omega_{max} = \omega_1 = 6\text{rad/s}}$$

PR-2.41. *¿Hasta dónde subirá la esferita en el aro?*

Una esferita puede deslizar sin fricción por un alambre circular de radio R. El aro gira a velocidad angular constante, ω, alrededor de un diámetro vertical.

a) ¿En qué posición angular θ quedará la esferita?

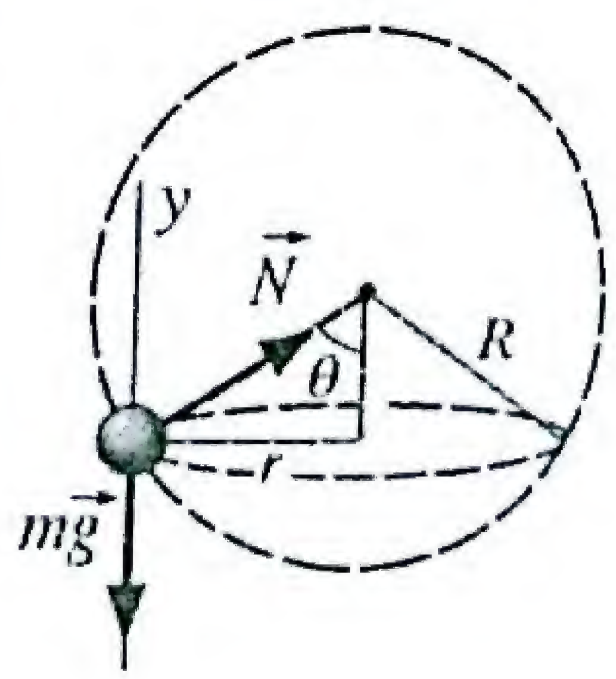
b) ¿Será posible lograr que la esferita se eleve por encima del nivel del centro del aro?



Solución: Aplicando la segunda ley de Newton a la esferita:

$$\sum F_r = N sen\theta = m\omega^2 r \qquad (1)$$

$$\sum F_y = N cos\theta - mg = 0 \qquad (2)$$



Siendo el radio del círculo: $r = R sen\theta$. Combinando estas dos ecuaciones, se obtiene la posición angular:

$$\frac{N sen\theta}{N cos\theta} = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{\omega^2 R sen\theta}{g} \quad \Rightarrow \quad cos\theta = \frac{g}{\omega^2 R}$$

Observe que si ω es pequeña, tal que $\omega^2 R < g$, implicaría $cos\theta > 1$, lo cual no tiene sentido. Por lo tanto, solo es posible que la esferita suba si $\omega^2 R \geq g$.

b) Para que la esferita alcance la misma elevación que el centro del aro, es decir, $\theta = 90°$, $cos\theta = 0$, esto requiere una velocidad angular muy grande ($\omega = \infty$).

Respuesta

a) Posición: $cos\theta = \frac{g}{\omega^2 R}$,

(siendo $\omega^2 R \geq g$)

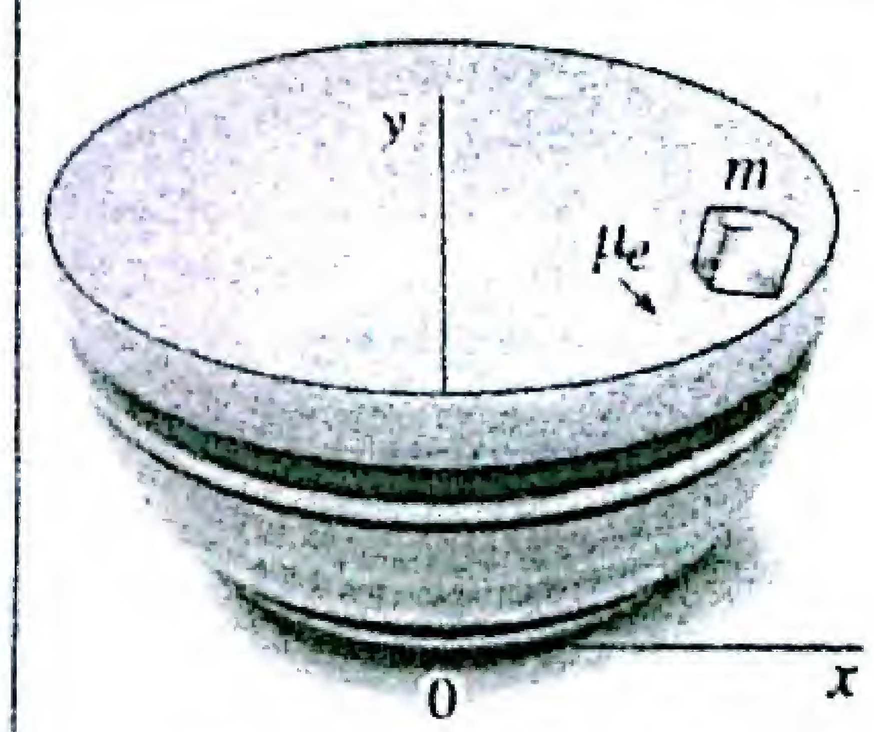
b) Imposible.

PR-2.42. *Bloque en un tazón parabólico rugoso*

Se coloca un cubito de masa m sobre un tazón cuya superficie es un paraboloide :

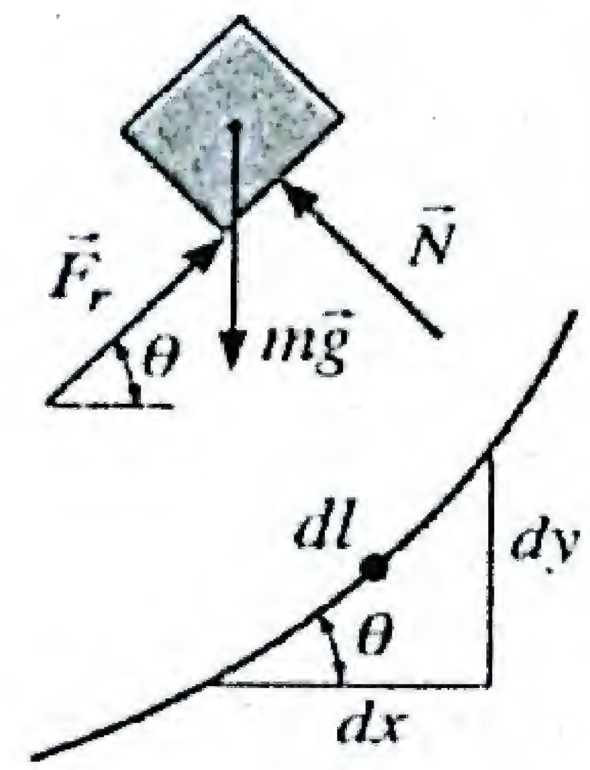
$$y(x) = bx^2$$

Siendo la constante $b = 3\text{m}^{-1}$. Si el coeficiente de fricción estática es $\mu_e = 0,6$ determine la región de coordenadas x, en la cual el bloque puede permanecer sin resbalar sobre la superficie del tazón.



Solución: Para mantener el equilibrio en la dirección tangencial a la superficie, la magnitud de la fuerza de fricción debe ser igual a la componente del peso en esa dirección: $F_t = mg sen\theta$. Mientras que la fuerza de contacto normal a la superficie debe ser:

$$F_n = mg cos\theta = N$$



Esto significa que para que el bloque no resbale se debe cumplir la condición: $F_t \leq \mu_e N$, es decir:

$$mg sen\theta \leq \mu_e mg cos\theta \quad \Rightarrow \quad tg\theta \leq \mu_e$$

Pero:

$$tg\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(bx^2) = 2bx \quad \Rightarrow \quad 2bx \leq \mu_e$$

Por lo tanto, el valor máximo de la coordenada x es:

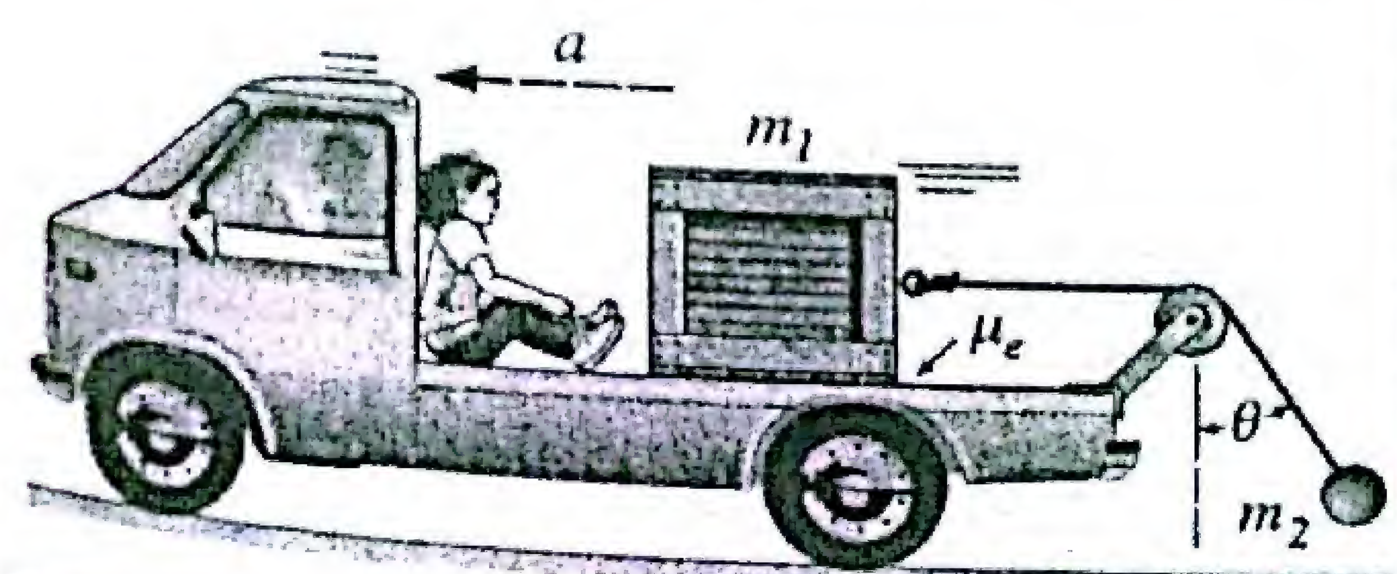
$$x_{max} = \mu_e / 2b = 0,60/2\text{x}3\text{m}^{-1} = 0,1\text{m}$$

Respuesta

$$\boxed{0 < x < 10\text{cm}}$$

PR-2.43. *Lo que sucede en un marco acelerado*

Un camión lleva sobre su plataforma una caja de masa m_1, acoplada a una bola de masa m_2, que cuelga mediante una cuerda que pasa por una polea sin fricción.



Cuando el camión se mueve con cierta aceleración, se observa que la cuerda forma un ángulo θ con la vertical.

a) En el marco de referencia del camión determine la aceleración a del camión y la tensión T de la cuerda.

b) Si la caja está a punto de deslizar, halle el coeficiente μ_e de fricción estática entre la caja y la plataforma.

Solución: a) En un marco de referencia de un *Observador No Inercial* (ONI), tanto la caja como la bola están en equilibrio y para poder aplicar la 2ª ley de Newton, debemos introducir dos pseudo-fuerzas, con sentidos opuestos a la aceleración $\vec{a}$ del camión: La fuerza $\vec{F}_1^*$ sobre la caja, de magnitud $m_1 a$, y la otra fuerza $\vec{F}_2^*$ sobre la bola, de magnitud $m_2 a$. Estas fuerzas no son debidas a ningún agente externo y por ello no están acompañadas de la correspondiente fuerza de reacción en otro cuerpo como lo estipula la tercera ley de Newton. Aplicando la 2ª ley de Newton a *la bola:*

$$\sum F_x = F_2^* - Tsen\theta = 0 \;\Rightarrow\; F_2^* = m_2 a = Tsen\theta \qquad (1)$$

$$\sum F_y = T\cos\theta - m_2 g = 0 \;\Rightarrow\; T\cos\theta = m_2 g \qquad (2)$$

Combinando estas ecuaciones obtenemos:

$$a = g\,tg\theta \qquad T = m_2 g/\cos\theta$$

b) Aplicando la 2a ley de Newton *a la caja en equilibrio:*

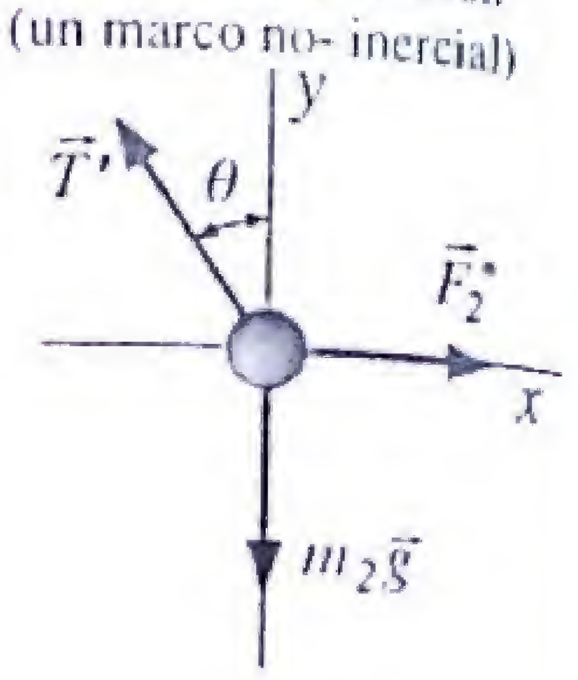
$$\sum F_x = F_1^* + T - F_e = 0 \;\Rightarrow\; m_1 a + T = F_e \qquad (3)$$

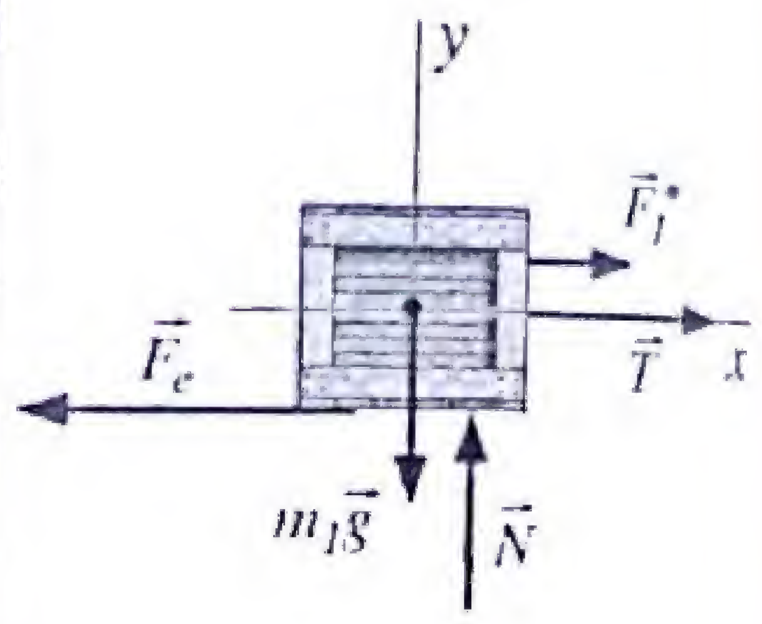
$$\sum F_y = N - m_1 g = 0 \;\Rightarrow\; N = m_1 g \qquad (4)$$

Utilizando las ecuaciones (3) y (4) y teniendo en cuenta que la fuerza de fricción estática alcanzó su valor máximo $F_e(max) = \mu_e N$, se obtiene el coeficiente de fricción:

$$\mu_e = tg\theta + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)\sec\theta$$

Equilibrio en el marco de referencia del camión (un marco no- inercial)



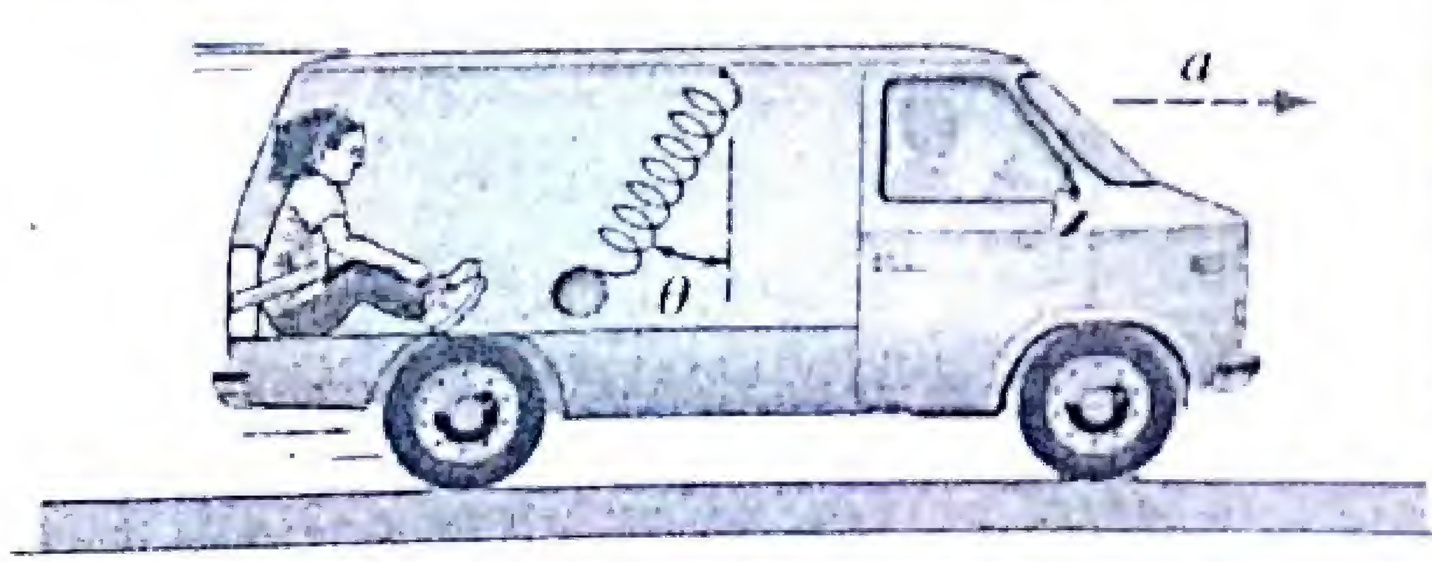


Respuesta:

a) $a = g\,tg\theta$, $T = m_2 g\sec\theta$
b) $\mu_e = tg\theta + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)\sec\theta$

PR-2.44. *Una práctica de física en un marco acelerado*

A una estudiante se le asigna la tarea de realizar la práctica de física en un marco de referencia acelerado. Para ello suspende del techo de una van, un resorte con una pelota en su extremo, de masa $m = 0{,}1$ kg.

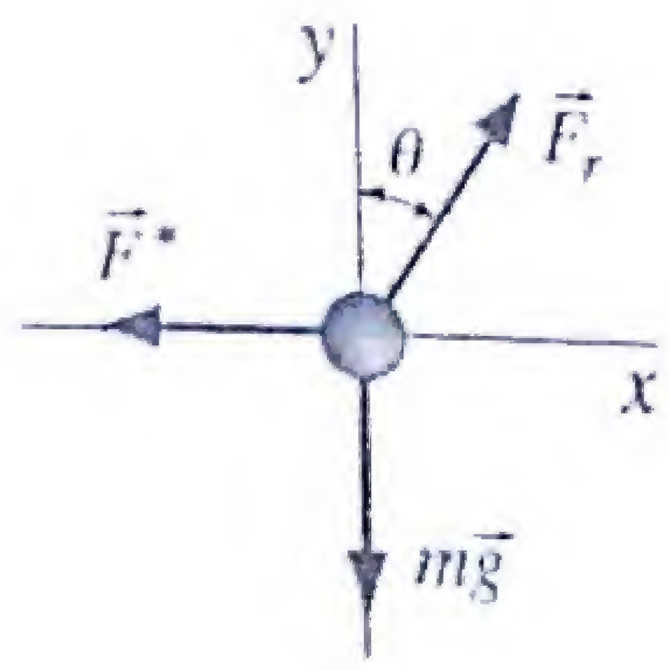


La estudiante observa que cuando la camioneta va con una aceleración uniforme, el resorte queda estirado una distancia $x = 20{,}6$ cm y forma un ángulo $\theta = 17{,}8°$ con la vertical. Determine:
b) la aceleración de la camioneta
a) la constante k del resorte.

Solución: a) Según esta observadora no inercial, la esferita está en *equilibrio* bajo la acción de tres fuerzas: 1) la fuerza elástica del resorte, $\vec{F}_r$, de magnitud kx, 2) su peso, $m\vec{g}$ y 3) una pseudo-fuerza $\vec{F}^*$ que tiene dirección opuesta a la aceleración del vagón y su magnitud es ma.
Las condiciones de equilibrio son:

$$\sum F_x = F_r sen\theta - F^* = 0 \;\Rightarrow\; kx\,sen\theta = ma \qquad (1)$$

$$\sum F_y = F_r\cos\theta - mg = 0 \;\Rightarrow\; kx\cos\theta = mg \qquad (2)$$



Dividiendo la ecuación (1) por la ecuación (2) tenemos la aceleración del vagón:

$$\frac{kx\,sen\theta}{kx\cos\theta} = \frac{ma}{mg} \;\Rightarrow$$

$$a = g\,tg\theta = (9{,}8\text{m/s}^2)(tg17{,}8°) = 3\text{m/s}^2$$

b) Usando la ecuación (2), obtenemos la constante elástica del resorte:

$$k = \frac{mg}{x\cos\theta} = \frac{(0{,}1\text{kg})(9{,}8\text{m/s}^2)}{(0{,}206\text{m})\cos 17{,}8°} = 5\text{N/m}$$

Respuesta:

a) $a = g\,tg\theta = 3\text{m/s}^2$
b) $k = \frac{mg}{x\cos\theta} = 5N/m$

PR-2.45. *La plomada se desvía de la vertical*

Debido a la rotación la superficie terrestre es un sistema no inercial, y siempre estamos sujetos a los efectos de una seudo fuerza llamada centrífuga. En consecuencia, una persona aparenta un peso ligeramente menor que el que tendría si la Tierra no girase. Además, a causa de la rotación de la tierra, una plomada puede no colgar en la dirección de la fuerza de gravedad, sino que se desvía.
a) Halle el ángulo de desviación, θ, de la plomada en un punto sobre la superficie terrestre de latitud ϕ.
b) ¿En qué latitud será máxima esta desviación y cuánto vale?
c) ¿Cuál es la desviación en los polos y en el ecuador?

La Tierra: un marco no inercial

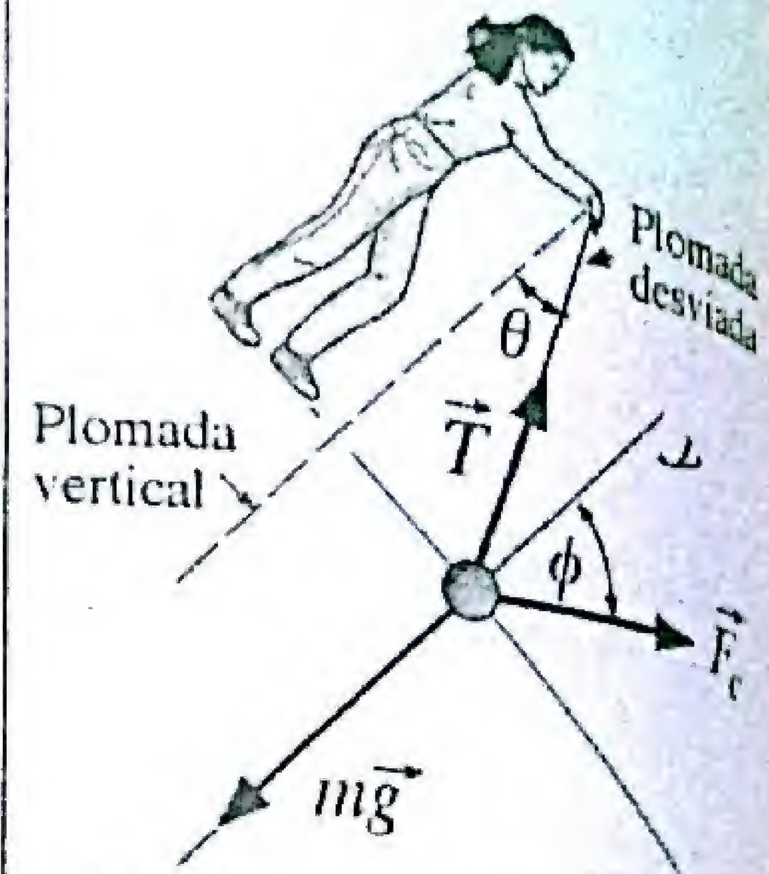
Solución: Según un observador *no inercial* girando con la Tierra, un cuerpo en la superficie terrestre está sometido no solo a la fuerza de gravedad $m\vec{g}$ sino también a una fuerza centrífuga $\vec{F}_c$. Esta pseudo-fuerza

apunta en sentido opuesto a la aceleración centrípeta (hacia afuera, y perpendicularmente al eje de rotación) y su magnitud es:

$$F_c = ma_c = m\omega^2 r = m\omega^2 R\cos\phi$$

Siendo ϕ el ángulo que define la latitud del lugar.

Una masa m suspendida de un hilo (plomada) se encuentra en *equilibrio* desviada de la vertical en un ángulo θ, bajo el efecto de tres fuerzas: la de gravedad $m\vec{g}$, la tensión $\vec{T}$ y la centrífuga, $\vec{F}_c$. Aplicando la segunda ley de Newton en componentes, escribimos:



Fuerzas sobre la plomada en equilibrio

$$\sum F_x = F_c\,sen\phi - T\,sen\theta = 0 \qquad \Rightarrow \quad T\,sen\theta = F_c\,sen\phi$$

$$\sum F_y = F_c\cos\phi + T\cos\theta - mg = 0 \quad \Rightarrow$$

$$T\cos\theta = mg - F_c\cos\phi$$

Dividiendo la primera ecuación por la segunda, tenemos:

$$tg\theta = \frac{F_c\,sen\phi}{mg - F_c\cos\phi}$$

Debido a que la Tierra no gira muy rápido, en realidad $mg >> F_c\cos\phi$ y el ángulo de desviación resulta muy pequeño, de modo que: $tg\theta \approx \theta$. Con estas aproximaciones y tomando en cuenta que: $\omega = 2\pi/T$, la expresión anterior queda en términos del periodo de rotación T:

$$\theta = \frac{F_c\,sen\phi}{mg} = \frac{m\omega^2 R\cos\phi\,sen\phi}{mg} = \frac{2\pi^2 R\,sen2\phi}{gT^2}$$

b) De acuerdo a esta expresión la desviación de la plomada por efecto de la rotación de la Tierra es máxima en la latitud $\phi = 45°$ y su valor es:

$$\theta = \frac{2\pi^2(6{,}46\text{x}10^6\text{m})sen(2\text{x}45°)}{(9{,}8\text{m/s}^2)(86400\text{s})^2} = 1{,}74\text{x}10^{-3}\text{rad} \approx 0{,}1°$$

c) La desviación resulta nula tanto en los polos ($\phi = 90°$), como en el ecuador ($\phi = 0°$).

Respuesta:

a) $\theta = \dfrac{2\pi^2 R\,sen2\phi}{gT^2}$

b) $\theta = 1{,}74\text{x}10^{-3}$ rad

c) En el ecuador y en los polos $\theta = 0°$

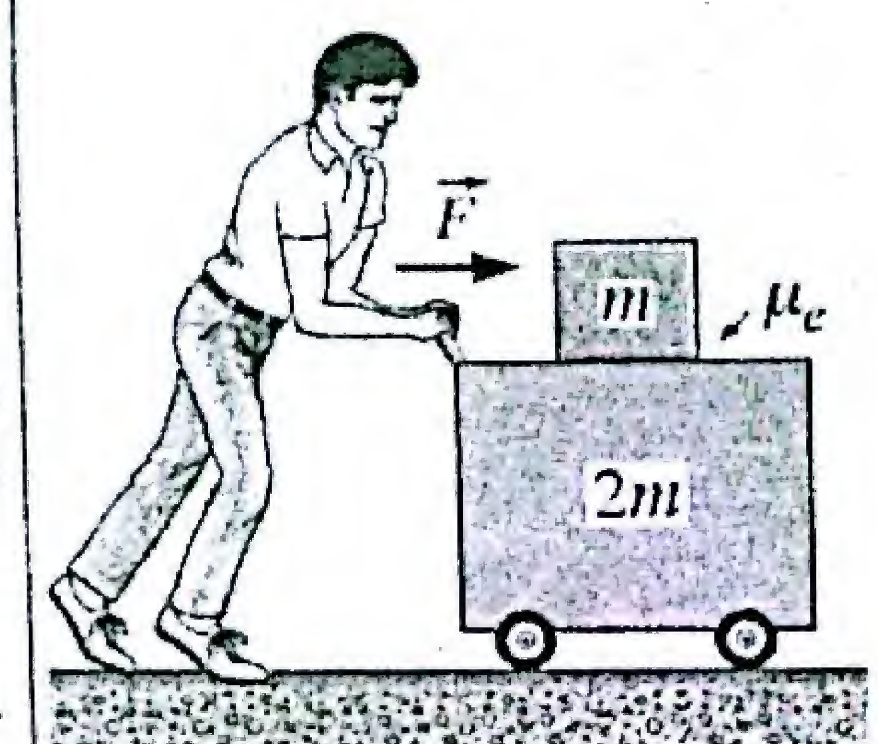
VERIFICA TU COMPRENSIÓN

PE-2.01. ***¿Cuál de estas afirmaciones no es correcta?***

a) La magnitud de la fuerza de fricción cinética entre un objeto y una superficie es proporcional a la magnitud de la fuerza normal que actúa sobre el objeto.
b) Cuando un objeto se desliza sobre una superficie, la fuerza de fricción cinética es opuesta al movimiento.
c) El coeficiente de fricción estático nunca puede ser mayor que uno.
d) El coeficiente de fricción cinética suele ser menor que el de fricción estática para un par de superficies dados.
e) Cuanto mas rebaladiza sea una superficie menor será el coeficiente de fricción cinética.

PE-2.02. ***La fuerza de fricción empuja al bloque m***

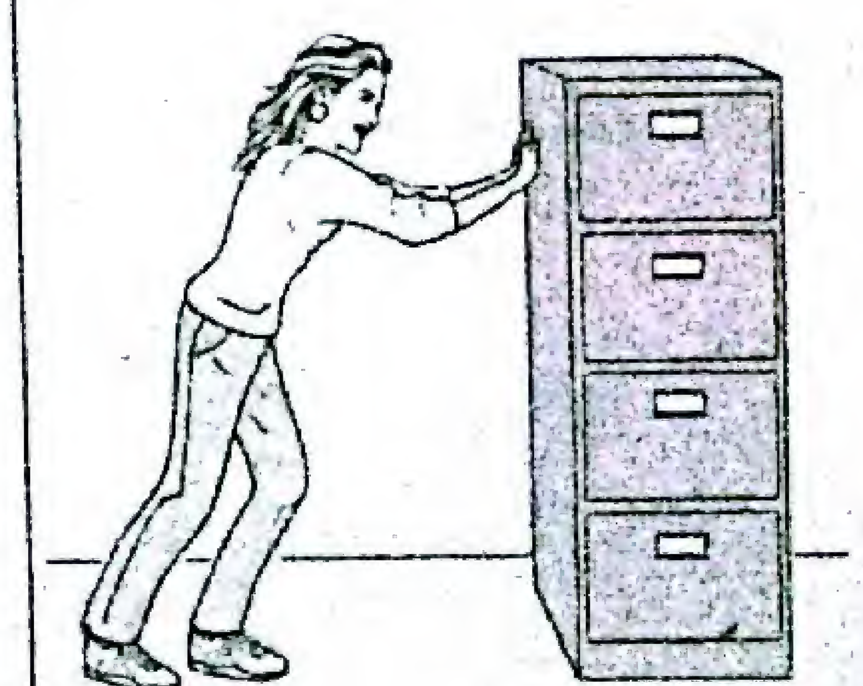
Un bloque de masa m se coloca sobre un carrito de masa $2m$ que se mueve sin rozamiento sobre una superficie horizontal. Al aplicar al carrito una fuerza horizontal hacia la derecha de magnitud 30 N, el bloque se mueve con el carrito sin deslizar. La fuerza de fricción que empuja al bloque tiene un valor de:



a) 5 N, *b*) 10 N, *c*) 15 N, *d*) 20 N, *e*) 30 N.

PE-2.03. ***¿Suficiente fricción de los zapatos?***

Un archivo que pesa un poco mas que usted, descansa sobre el suelo. El coeficiente de fricción estática entre el archivo y el suelo es el mismo que entre tus zapatos y el suelo. Para poder desplazar el archivo habría que......



a) Aplicar una fuerza horizontal.
b) Aplicar una fuerza inclinada hacia arriba.
c) Aplicar una fuerza inclinada hacia abajo.
d) Aplicar una fuerza en cualquier dirección.
e) Resulta imposible desplazarlo.

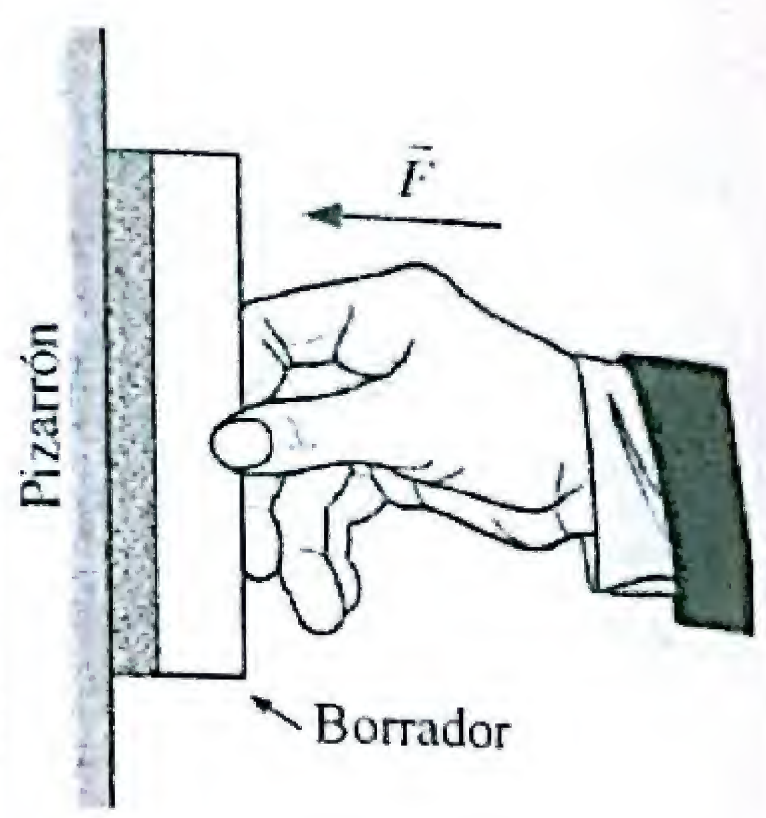
PE-2.04. *¿Cuál es la aceleración de la caja?*

Sobre una caja se aplica una fuerza horizontal de magnitud suficiente para que comience a moverse. Una vez en movimiento se continúa aplicando la misma fuerza. La aceleración con que se mueve la caja es....

a) 0 *b*) $\mu_e g$ c) $\mu_c g$ d) $(\mu_e + \mu_c)g$ e) $(\mu_e - \mu_c)g$

PE-2.05. *Una de estas afirmaciones no es correcta*

El borrador se mantiene presionado contra el pizarrón mediante una fuerza horizontal, $\vec{F}$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es *incorrecta*?



a) Si el borrador queda en reposo, el pizarrón ejerce sobre él una fuerza de fricción estática, mg, dirigida hacia arriba.

b) Si el borrador queda en reposo, la fuerza de fricción estática ejercida por el pizarrón tiene su valor máximo $\mu_e N$.

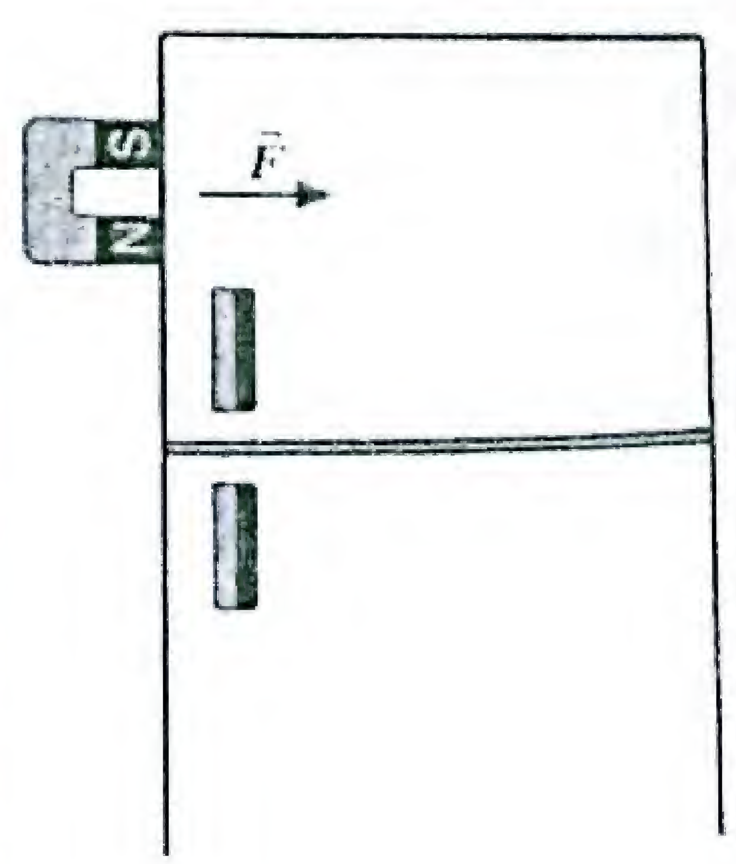
c) Si el valor de F fuera nulo, el pizarrón no ejercería ninguna fuerza de fricción estática sobre el borrador.

d) Si el coeficiente de fricción estática fuera nulo, el borrador caería sin importar cuan grande sea el valor de F.

PE-2.06. *Pegando un imán en la nevera*

Un imán de masa 0,1 kg es pegado a una superficie metálica vertical con una fuerza magnética horizontal de 4 N. Si el coeficiente de fricción estática entre la superficie y el imán es $\mu_e = 0{,}3$, podemos afirmar que...

a) el imán bajará con velocidad creciente.
b) el imán bajará con velocidad constante.
c) el imán subirá con velocidad constante.
d) el imán se quedará adherido en reposo.
e) no se puede predecir lo que sucederá.



PE-2.07. *Distancia mínima de frenado*

Una ambulancia que va a velocidad constante v = 72 km/h (20 m/s) lleva una paciente acostada en posición horizontal. El coeficiente de fricción estática entre la persona y la camilla es $\mu_e = 0{,}408$.

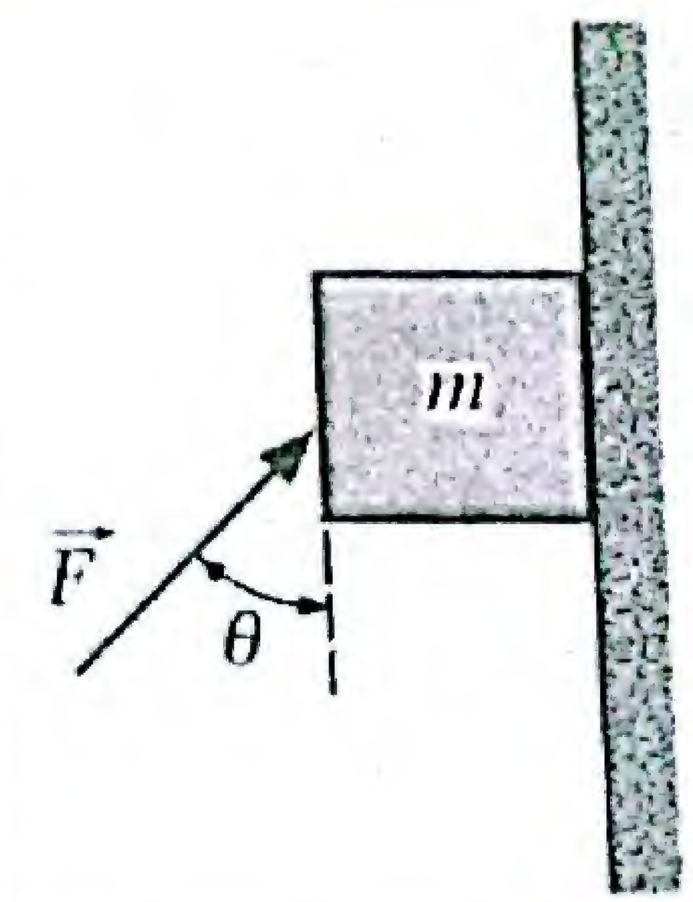
Si el conductor debe frenar uniformemente hasta detenerse, la mínima distancia de frenado para que el paciente no resbale es ......

a) 15 m,
b) 30 m,
c) 50 m,
d) 75 m,
e) 100 m

PE-2.08. *Apoyando un bloque sobre una pared*

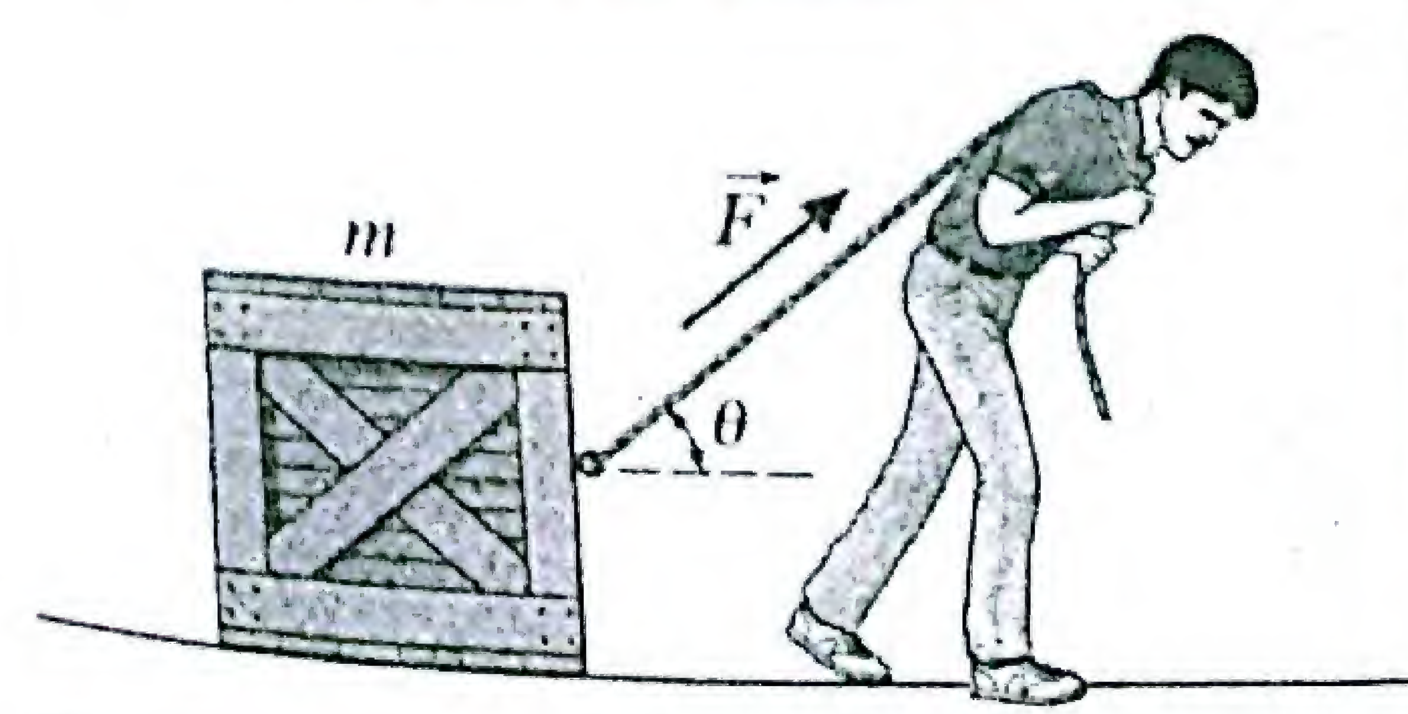
Un bloque que pesa 20 N es apoyado contra una pared vertical mediante una fuerza $\vec{F}$ de módulo 30 N que está inclinada a un ángulo θ = 60° con la vertical. Los coeficientes de fricción entre el bloque y la pared son, $\mu_e = 0{,}6$ y $\mu_c = 0{,}5$. Si el bloque queda en reposo la fuerza de fricción que ejerce la pared sobre el bloque es de módulo:

a) 15,6 N y hacia arriba. b) 13 N y hacia arriba.
c) 10 N y hacia abajo. d) 8 N y hacia abajo.
e) 5 N y hacia arriba.



PE-2.09. *¿Cómo están relacionadas estas fuerzas?*

Una persona arrastra un cajón a velocidad constante por una superficie horizontal rugosa, aplicando una fuerza que forma un cierto ángulo θ con la horizontal:



Considerando los módulos de las fuerzas sobre el cajón:

F = Fuerza aplicada.
F_c = Fuerza de fricción.
mg = Peso
N = Fuerza normal.

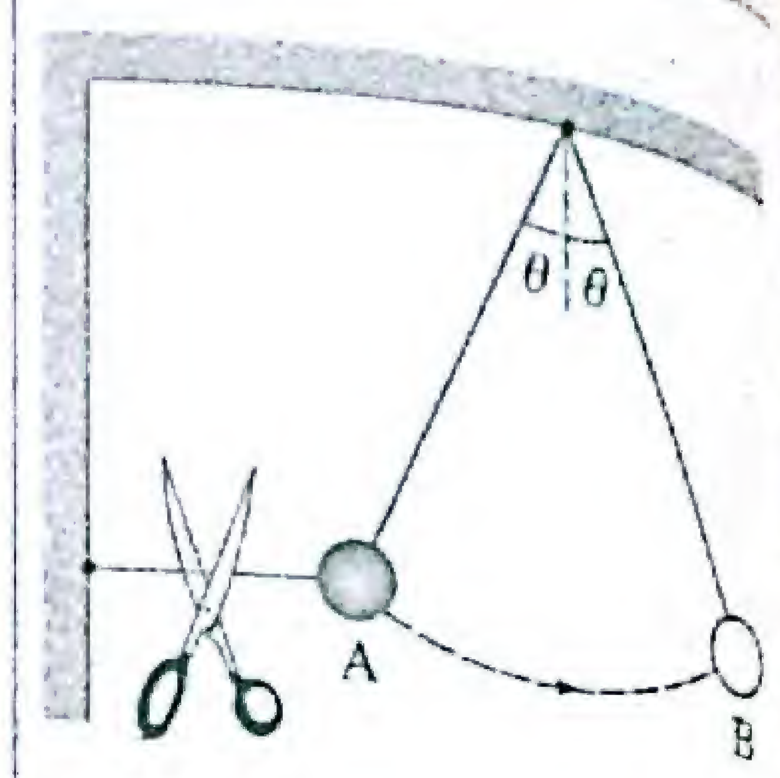
¿Cómo se relacionan estas fuerzas?

a) $F_c = F$ y $N = mg$
b) $F_c = F$ y $N > mg$
c) $F_c = F$ y $N < mg$
d) $F_c < F$ y $N < mg$
e) $F_c < F$ y $N > mg$

PE 2.10. *Liberando el péndulo cautivo*

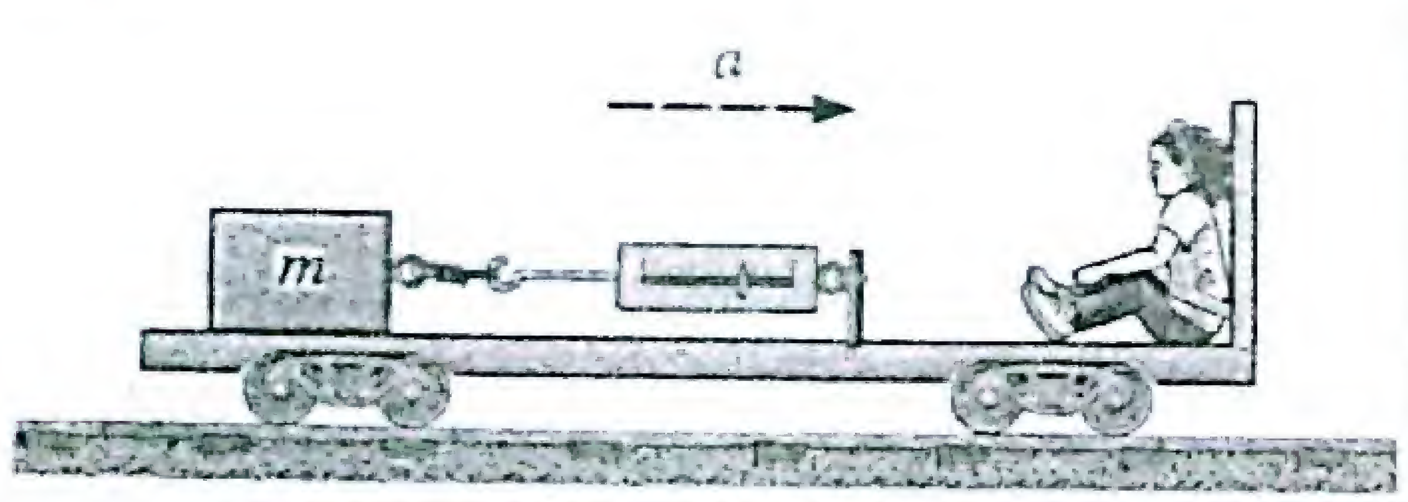
Una esferita está suspendida mediante una cuerda y se mantiene en posición de equilibrio a un ángulo $\theta = 60°$ respecto a la vertical. Si cortamos el hilo horizontal la esferita oscila en movimiento pendular. Si comparamos la tensión de la cuerda del péndulo cuando la esferita está en la posición B con aquella en la posición original, A, podemos decir que T_B / T_A es igual a:

a) 1, b) 1/2, c) 1/3, d) 1/4, e) 1/5



PE-2.11. *Midiendo la aceleración del vagón*

Un bloque de masa m = 40 kg descansa sobre el piso horizontal sin fricción de un vagón de masa M = 200 kg. El bloque está unido por un dinamómetro a la pared del vagón.

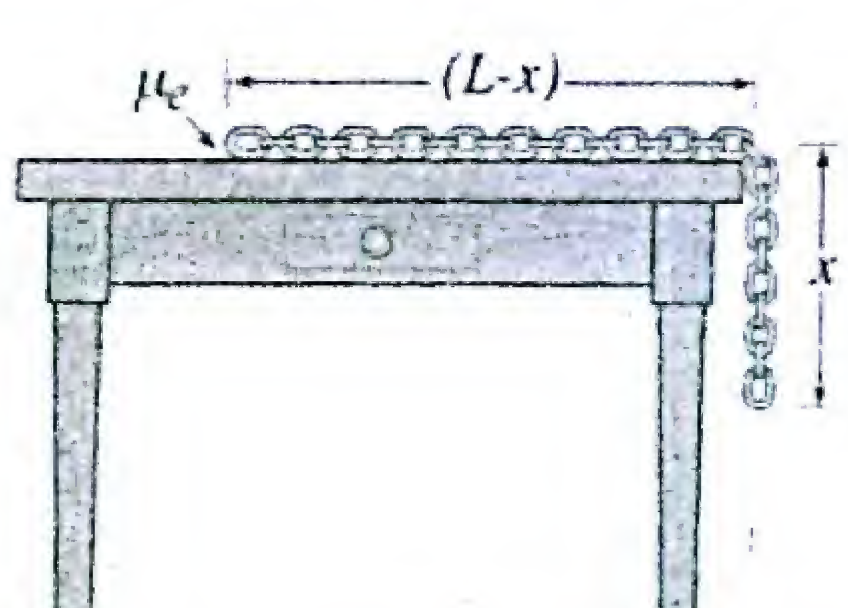


Cuando el vagón está en reposo el dinamómetro marca cero. Cuando el vagón esta acelerado el dinamómetro marca 120 N la aceleración del vagón es:

a) a = 3 m/s^2
b) a = 0,5 m/s^2
c) a = 0,6 m/s^2
d) a = 0,75 m/s^2
e) a = 9,8 m/s^2

PE-2.12. *La cadena suspendida de una mesa rugosa*

Una cadena de longitud L = 1 m y masa uniforme M = 3 kg, es colocada sobre la superficie horizontal rugosa de un mesa, de tal manera que una determinada fracción de ésta queda colgando, como indica la figura. Se encuentra que si, la parte que cuelga es mayor o igual a cierta distancia x = 0,75 m, la cuerda se resbala y cae al suelo.



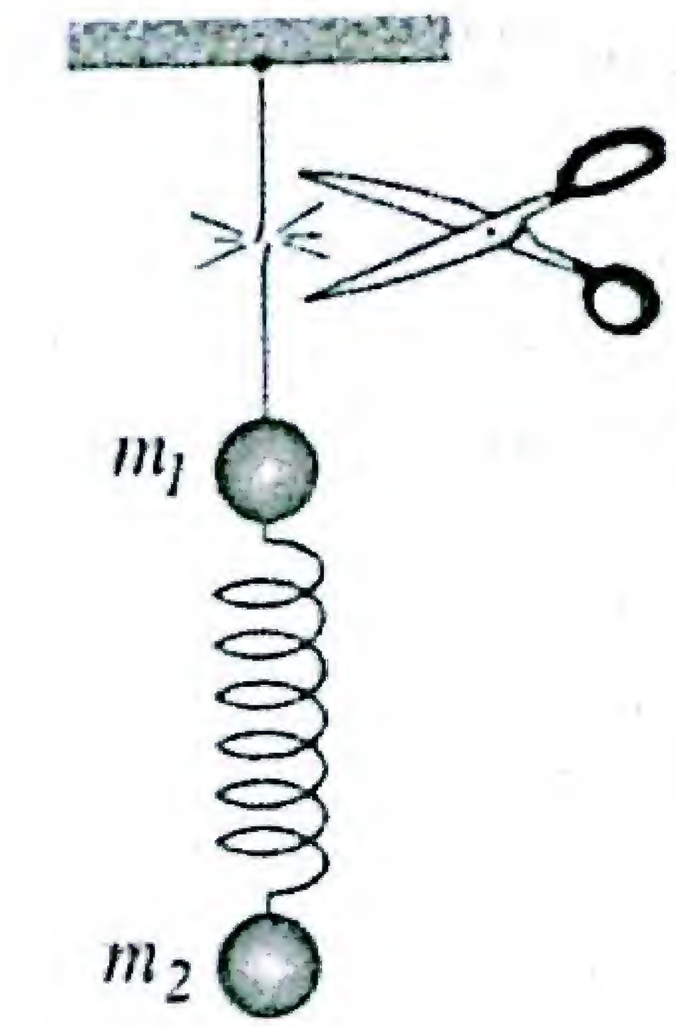
¿Cuál será el coeficiente de fricción estático, μ_e, entre la cuerda y la superficie de la mesa?

a) μ_e = 0,25,
b) μ_e = 0,75,
c) μ_e = 3,0
d) μ_e = 0,50,
e) μ_e = 1,50

PE-2.13. *¿Cuál será la aceleración al cortar el hilo?*

Dos esferas idénticas $m_1 = m_2$, están unidas mediante un resorte sin masa y el sistema se suspende por un hilo como indica la figura. Cuando el sistema está en equilibrio se corta el hilo, ¿cuál será la aceleración inicial de cada una de las esferas?

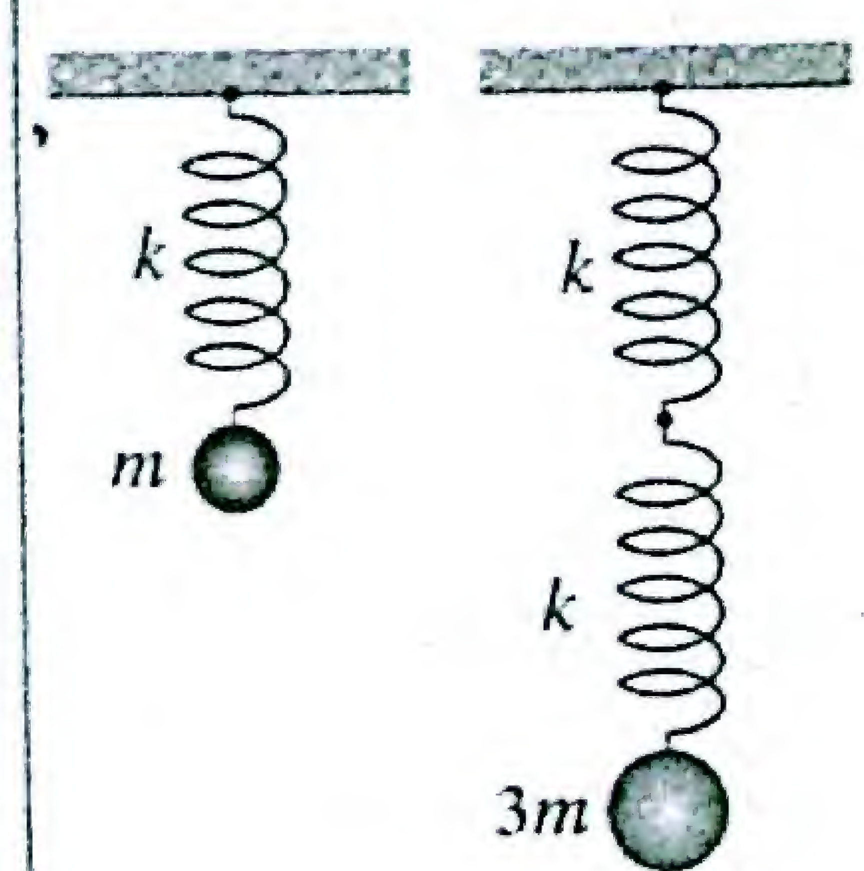
a) $a_1 = 0$, $a_2 = 2g$
b) $a_1 = 2g$, $a_2 = 0$
c) $a_1 = g$, $a_2 = 2g$
d) $a_1 = 2g$, $a_2 = g$
e) Depende de la constante elástica del resorte.



PE-2.14. *¿Cuanto desciende la pelota?*

Cuando una pelota de masa 1 kg se cuelga de un resorte, éste desciende 1 cm. Si se cuelga otra pelota de masa 3 kg de dos de estos resortes en serie, esta pelota descenderá:

a) 1 cm
b) 1,5 cm
c) 3 cm
d) 4,5 cm
e) 6 cm



PE-2.15. *¿Cuál será el nuevo estiramiento?*

De dos resortes idénticos de masa despreciable se cuelga una pelota de masa m y cuando el sistema está en equilibrio el estiramiento total de los dos resortes es Δx_o, (Fig. a). Del punto de unión entre los resortes se cuelga una pelota igual a la primera, (Fig. b). ¿Cuál será el nuevo estiramiento total que experimenta el sistema de los dos resortes?

a) Δx_0 b) $2\Delta x_0$ c) $\frac{\Delta x_0}{2}$ d) $3\frac{\Delta x_0}{2}$ e) $4\frac{\Delta x_0}{3}$

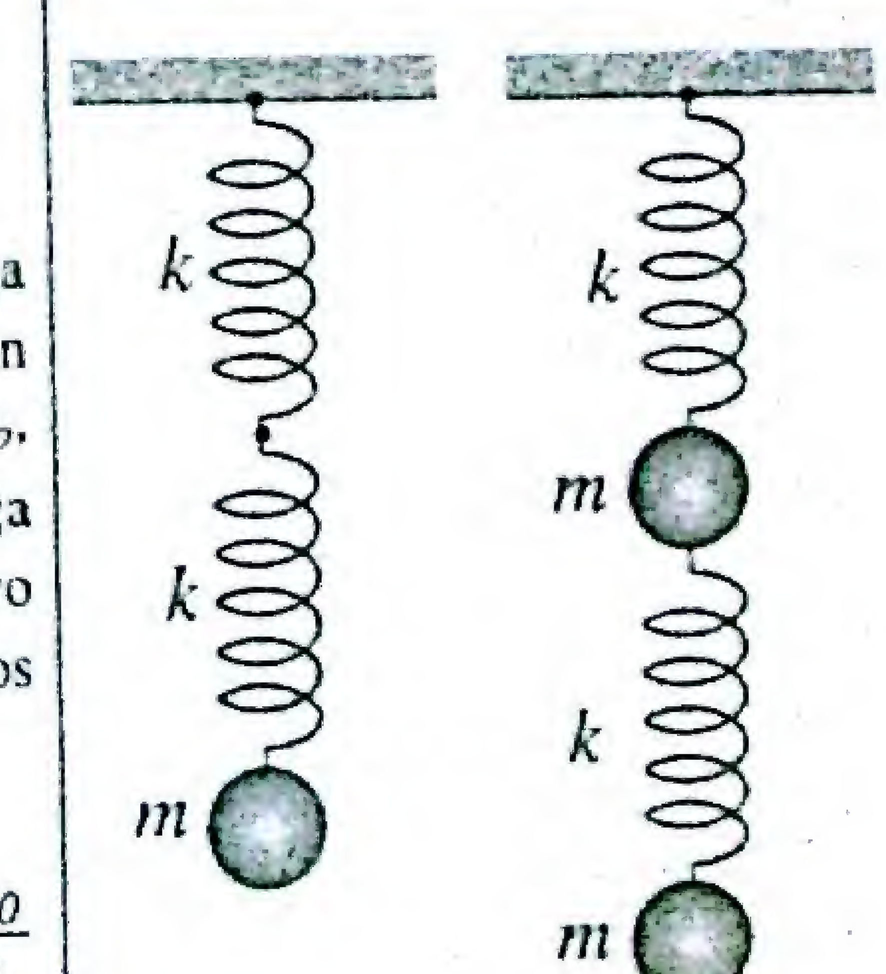


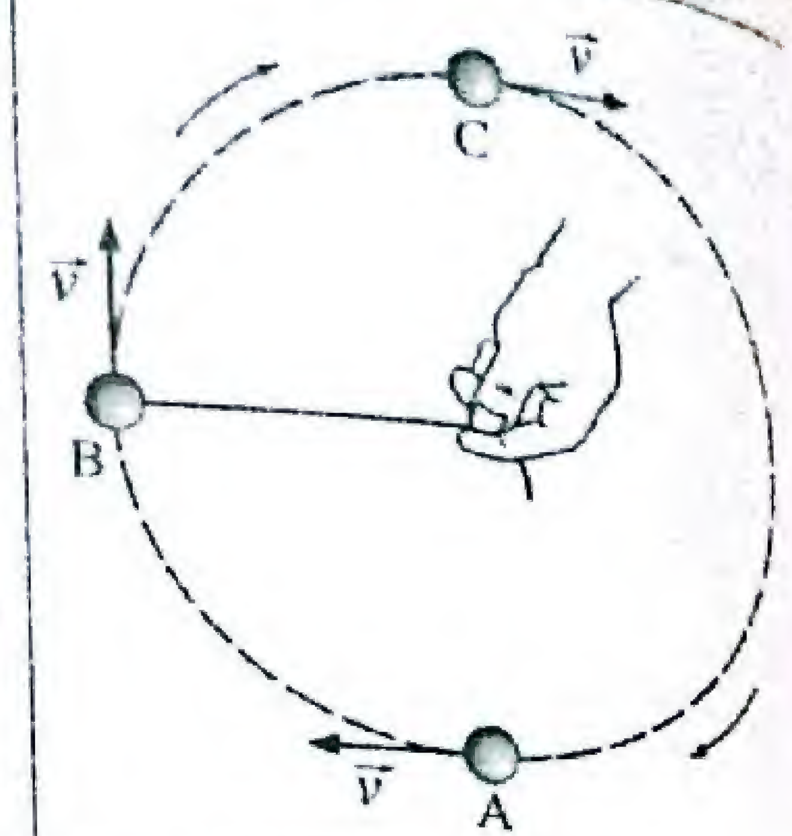
Fig. a Fig.b

PE-2.16. *¿Dónde será mayor la tensión de la cuerda?*

Una pelota amarrada de una cuerda se pone a girar en un círculo en el plano vertical con una *velocidad de módulo constante*. Si comparamos las magnitudes de la tensión de la cuerda en los tres puntos indicados, podemos afirmar que:

a) $T_A > T_B > T_C$ b) $T_A < T_B < T_C$ c) $T_A = T_B = T_C$

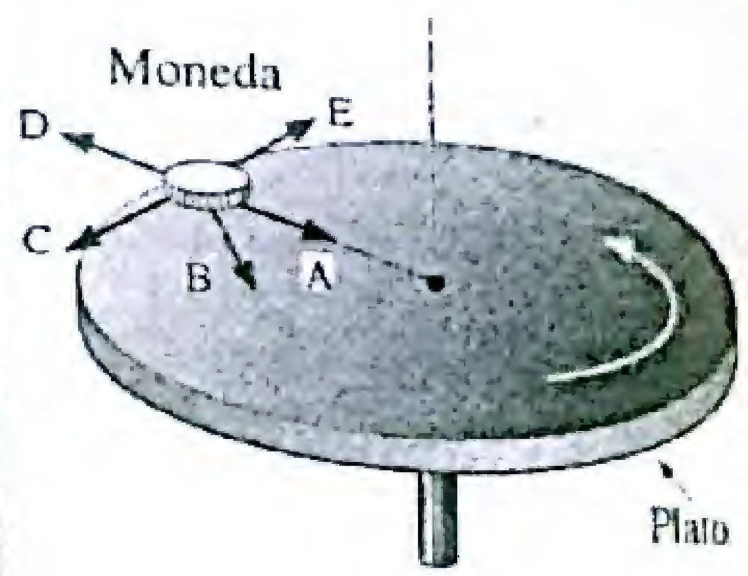
d) $T_A > T_C > T_B$ e) $T_C > T_A > T_B$



PE-2.17. *Moneda sobre un plato giratorio*

Una moneda está sobre un plato en un plano horizontal. El plato empieza a girar en el sentido indicado y va *aumentando su velocidad* de rotación. En el instante en que la moneda está en la posición indicada, ¿cuál de las flechas mostradas representaría mejor la dirección de la fuerza de fricción ejercida sobre la moneda?

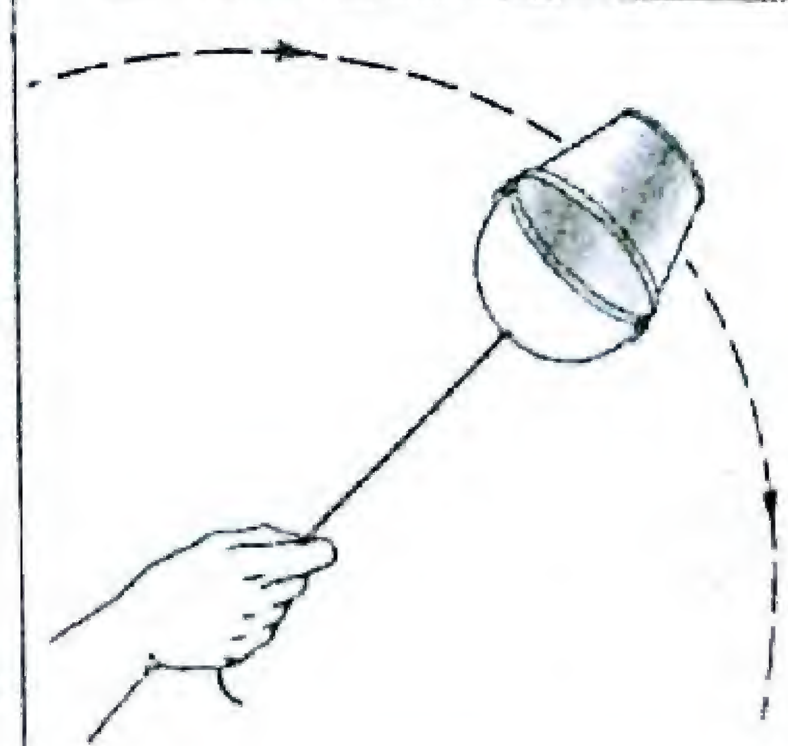
a) A b) B c) C d) D e) E



PE-2.18. *Centrifugando el agua para que no se derrame*

En una demostración de física se coloca una porción de agua en un recipiente y se pone en rotación en un círculo vertical de radio R = 0,92 m. Para que el agua no se derrame, la mínima velocidad de rotación debe ser:

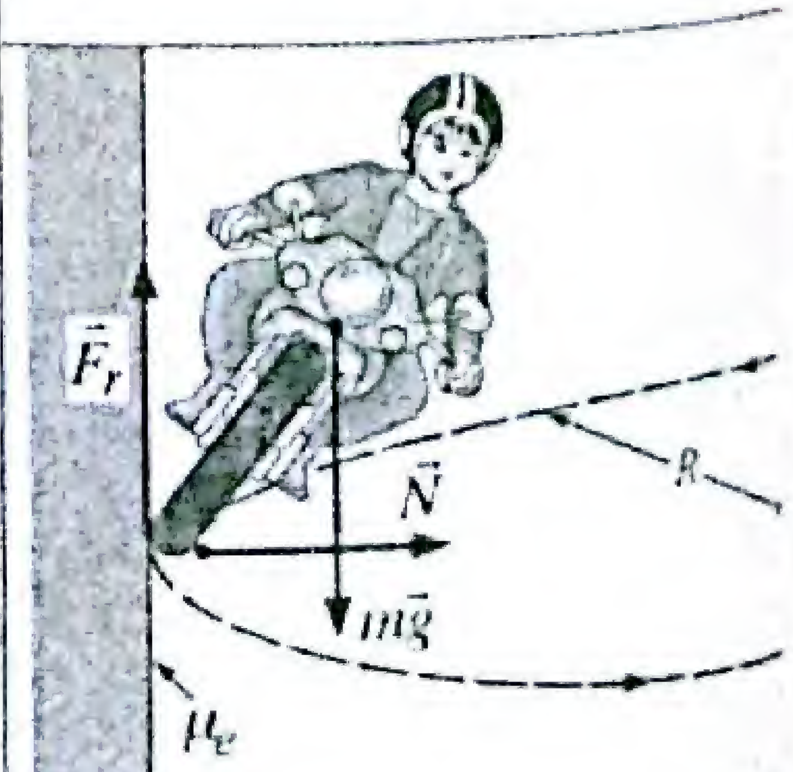
a) 3 m/s b) 5 m/s c) 6 m/s d) 8 m/s e) 9 m/s



PE-2.19. *Acrobacia en moto*

Un motociclista corre en el interior de un cilindro de radio R = 7,2 m. El coeficiente de fricción estática entre los neumáticos y la pared vertical es μ_e = 0,49. ¿Cuál será la velocidad mínima con la cual el ciclista puede realizar la acrobacia?

a) 6 m/s, b) 8 m/s, c) 12 m/s, d) 18 m/s e) 36 m/s

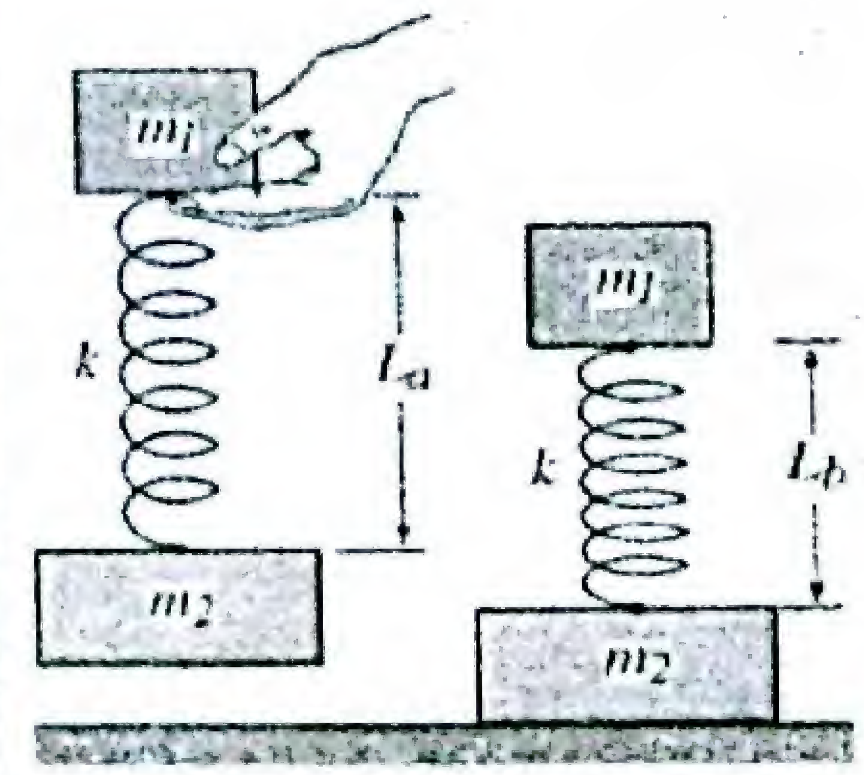


PE-2.20. *¿Cuál será la nueva longitud del resorte?*

Un resorte de constante elástica k = 4,9 N/m está entre dos bloques de masas respectivas m_1 = 0,1 kg y m_2 = 0,2 kg. Cuando se suspende el sistema sosteniéndolo por el bloque m_1, el resorte se estira hasta una longitud L_a = 1,0 m. Si se coloca el sistema con m_2 apoyado sobre una mesa, el resorte se comprime y su nueva longitud será....

a) L_b =0,25 m, b) L_b =0,40 m, c) L_b =0,50 m,

d) L_b =0,60 m, e) L_b = 0,75 m

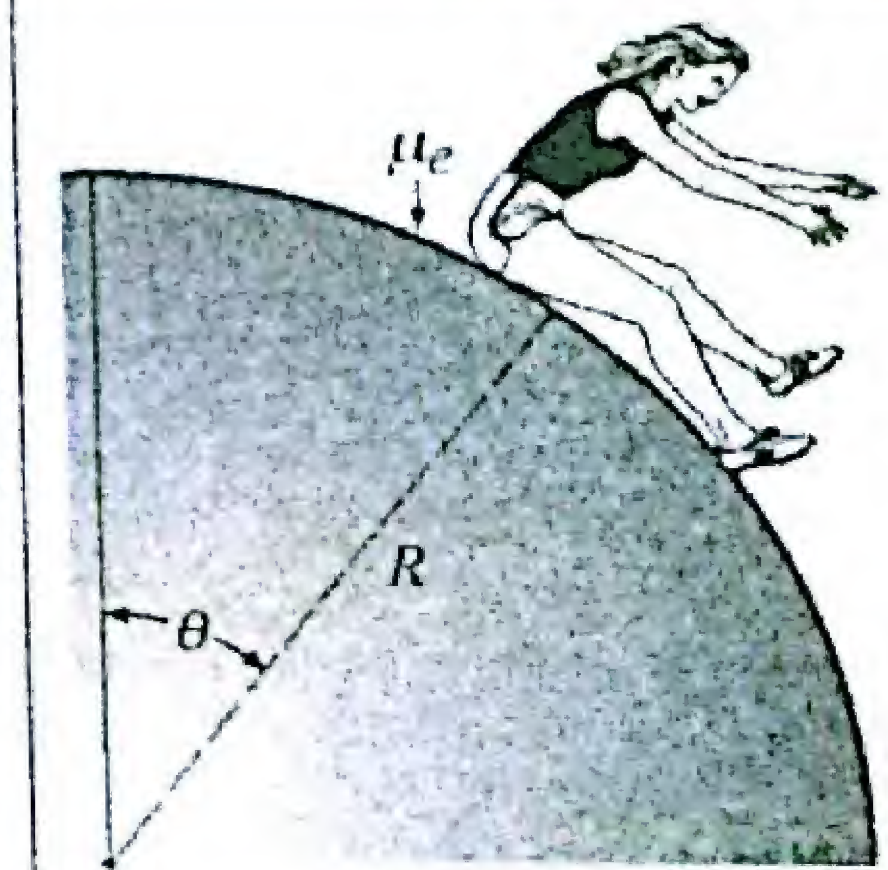


PE-2.21. *Tomando el Sol en una cúpula circular*

Una joven desea tomar el sol sentada sobre una cúpula circular de radio R = 5 m. Si el coeficiente de fricción estática entre ella y la superficie es μ_e = 0,75, hasta qué posición angular desde la parte superior de la cúpula se puede colocar sin que resbale?

a) θ_{max}=75°, b) θ_{max}=60°, c) θ_{max}=53,1°

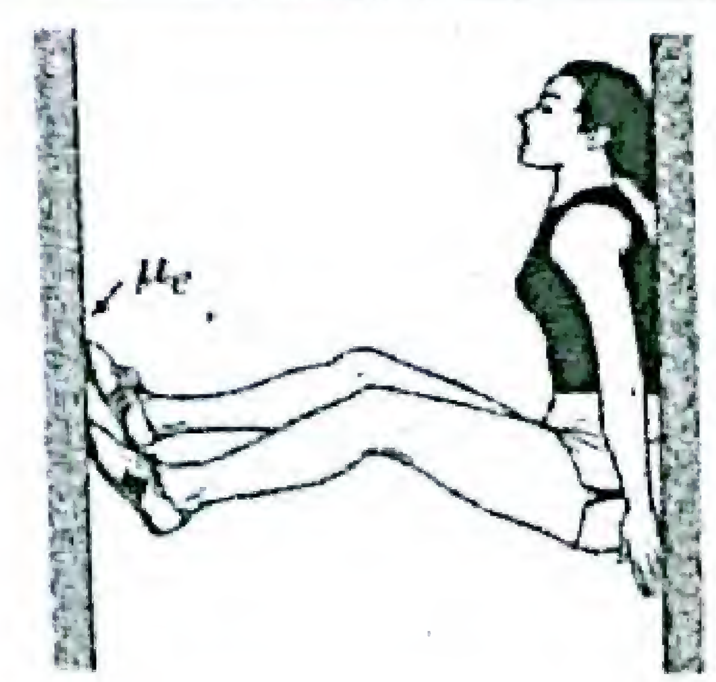
d) θ_{max}=45°, e) θ_{max}= 36,9°



PE-2.22. *Escalamiento con apoyo entre dos paredes*

Una escaladora de masa m = 60 kg está apoyada entre dos paredes verticales. Si el coeficiente de fricción efectivo entre ella y la superficie es μ_e = 2,45, ¿cuál debe ser la mínima fuerza con que debe apoyarse sobre cada una de las paredes?

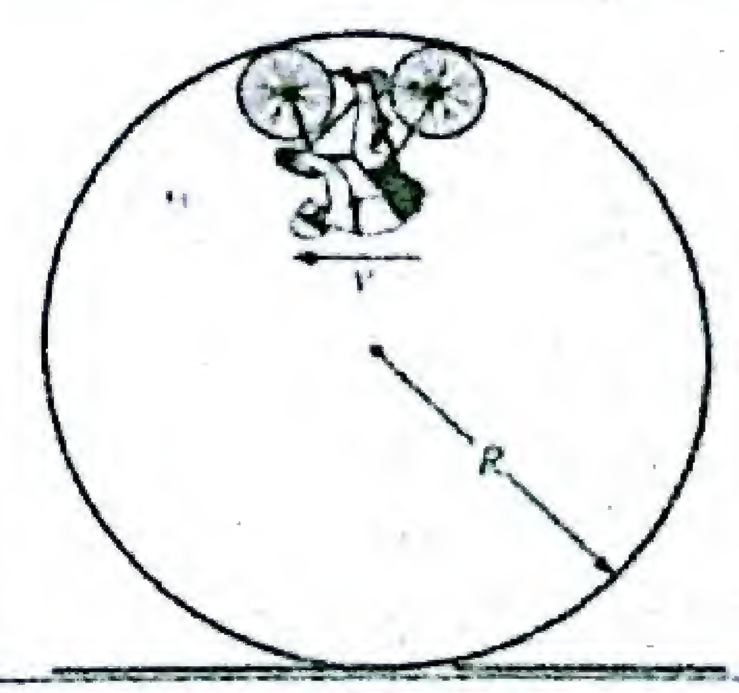
a) 120 N, b) 60 N, c) 720 N, d) 600 N, e) 180 N



PE-2.23. *Ciclista en el rizo de la muerte*

Un ciclista se traslada con rapidez constante dentro de una pista circular de radio R = 14,7 m. ¿Cuál debería ser su velocidad mínima cuando pasa por la parte superior a fin de evitar su caída.

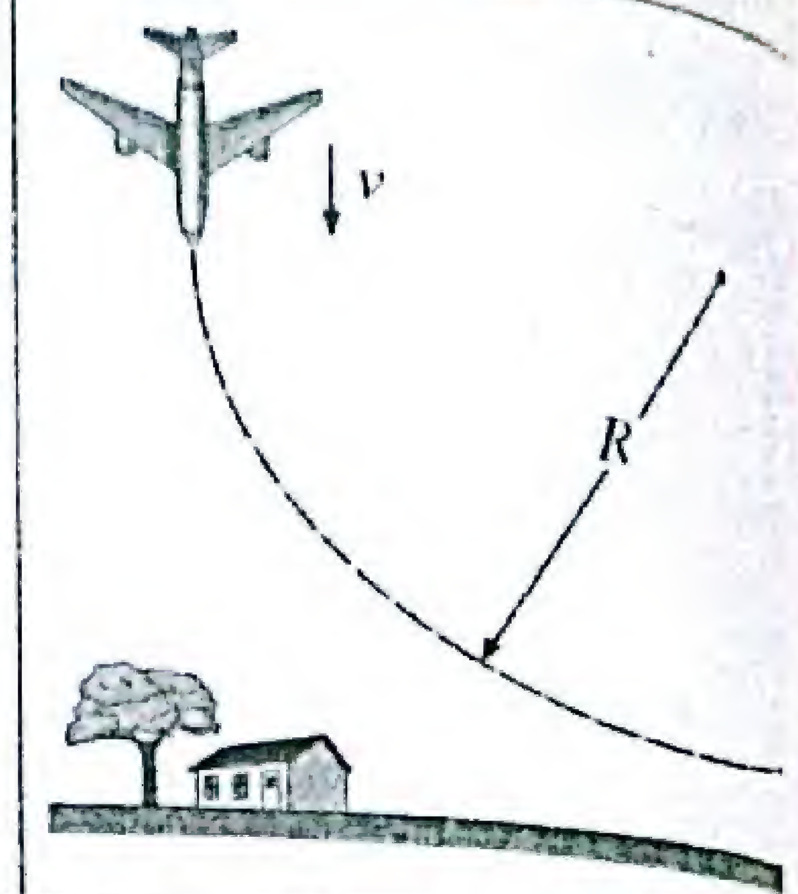
a) 10 m/s, b) 20 m/s, c) 16 m/s, d) 12 m/s e) 24 m/s



PE-2.24. *Al piloto le queda muy poco tiempo para girar*

Un avión desciende verticalmente en picada a una velocidad de 350 m/s. Se sabe que el piloto puede soportar una aceleración máxima de cinco veces la aceleración de la gravedad, antes de perder el conocimiento. ¿Que tan cerca del suelo puede el avión aproximarse para poder girar en un cuarto de vuelta?

a) 0,5 km, b) 0,75 km, c) 1,0 km, d) 1,5 km, e) 2,5 km



CAP. 2: *RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS*

	a	b	c	d	e
2.01			✓		
2.03		✓			
2.05		✓			
2.07			✓		
2.09				✓	
2.11	✓				
2.13		✓			
2.15				✓	
2.17		✓			
2.19			✓		
2.21					✓
2.23				✓	

	a	b	c	d	e
2.02		✓			
2.04					✓
2.06				✓	
2.08					✓
2.10				✓	
2.12			✓		
2.14					✓
2.16	✓				
2.18	✓				
2.20		✓			
2.22	✓				
2.24					✓

3

TRABAJO Y ENERGÍA

La energía juega un papel crucial en nuestra vida; constituye uno de los conceptos más importantes de la física y quizás el más difícil de definir. Decimos que un objeto posee energía si puede producir un cambio físico en sí mismo o en sus alrededores. La energía adopta muchas formas: gravitacional, electromagnética, química, nuclear, etc.., y lo mas importante es que estas diversas formas están relacionadas entre sí y pueden transformarse de una forma a otra, de tal manera que "la energía total siempre se conserva". Un concepto íntimamente ligado al de energía es el de *trabajo*. El trabajo es algo que se realiza sobre los objetos, mientras que energía es algo que los objetos poseen. Una persona es capaz de realizar trabajo gracias a la energía que le proporcionan los alimentos que ingiere. En el contexto de la vida diaria hablamos de trabajo con diversos significados, y algunas veces de una manera vaga e imprecisa. Usualmente el trabajo lo asociamos con hacer o llevar a cabo alguna cosa, "Pablo pasó mucho trabajo para aprobar la asignatura", "Rosa presentó su trabajo de tesis". Veremos que el concepto de trabajo en física, aunque guarda alguna relación con la idea intuitiva que poseemos, tiene un significado muy específico. Trabajo se refiere al producto de una fuerza y el desplazamiento paralelo a dicha fuerza, de modo que si no ocurre un desplazamiento, entonces no se ha realizado ningún trabajo. Una forma de energía que está asociada estrechamente con el trabajo es la "energía cinética" o de movimiento. El teorema de Trabajo-Energía, que estudiaremos en este capítulo, relaciona el cambio de energía cinética de un objeto con el trabajo efectuado sobre él. Veremos que este teorema, aunque es una forma indirecta de utilizar las leyes de Newton, constituye una herramienta poderosa que nos permitirá comprender muchos aspectos del movimiento, y resolver problemas que resultarían mas difíciles mediante la aplicación directa de las leyes de Newton.

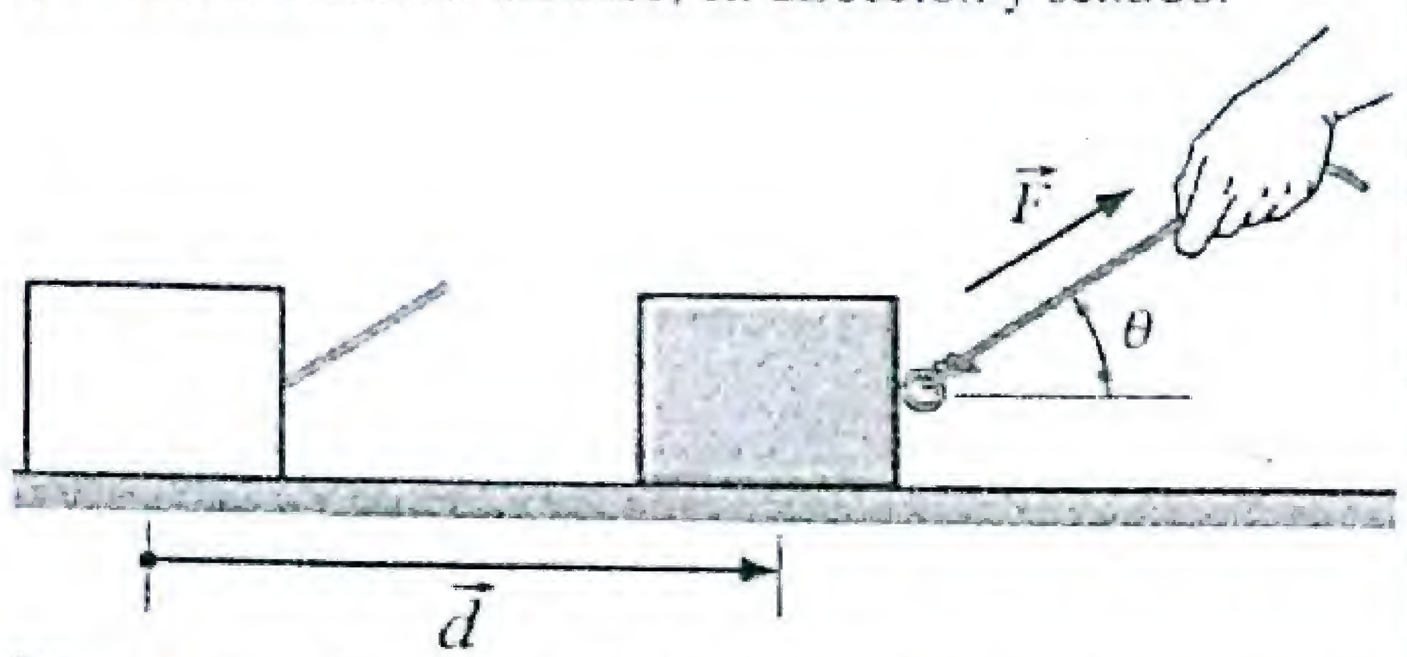
En este capítulo Ud. encontrará aspectos relacionados con:

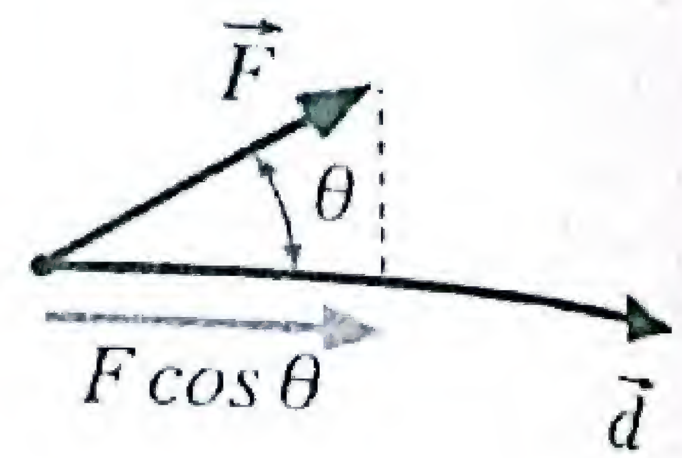
- Trabajo de una fuerza constante
- Trabajo de una fuerza variable
- Trabajo para estirar un resorte
- Energía cinética
- El teorema de Trabajo-Energía
- Potencia

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

TRABAJO DE UNA FUERZA CONSTANTE

Sea una partícula que experimenta un desplazamiento $\vec{d}$ a lo largo de una recta mientras actúa sobre él una fuerza $\vec{F}$ que es constante en módulo, en dirección y sentido.





El trabajo efectuado por la fuerza se define como el producto de la magnitud del desplazamiento d y la componente de la fuerza paralela al desplazamiento $(F\cos\theta)$:

$$W = (F\cos\theta)d$$

Esta relación equivale al *producto escalar*:

$$W = \vec{F}\bullet\vec{d} = Fd\cos\theta$$

Trabajo de fuerza constante

$$\boxed{W = \vec{F}\bullet\vec{d} = Fd\cos\theta}$$

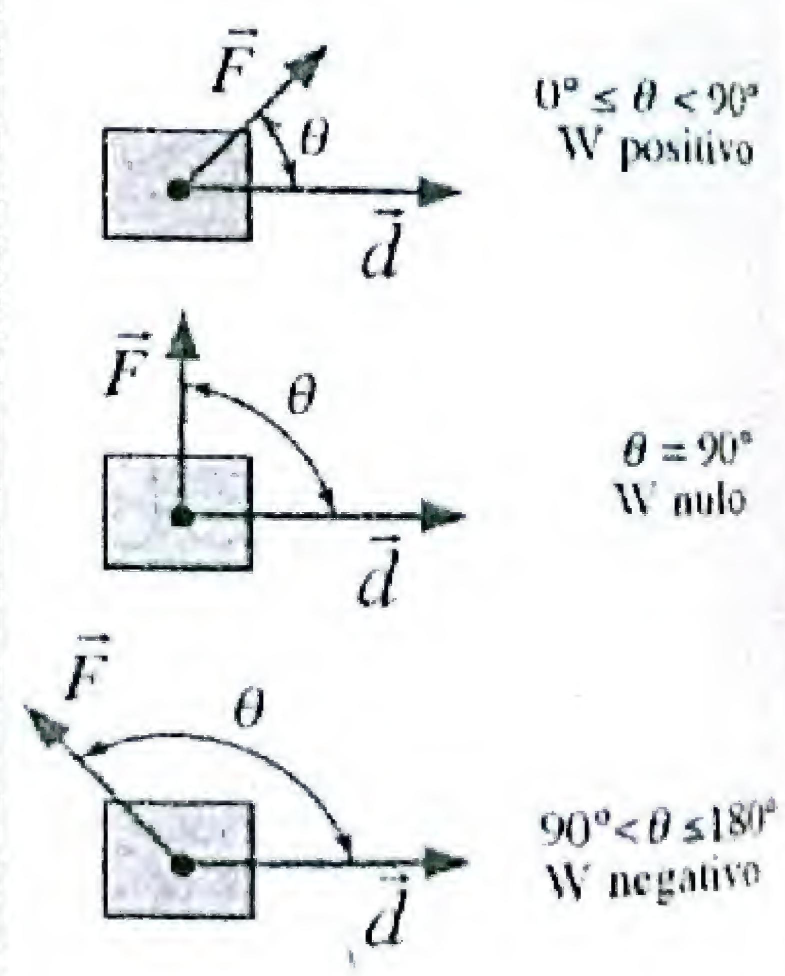
θ = ángulo entre $\vec{F}$ y $\vec{d}$

Según esta definición, una fuerza realiza trabajo sobre un objeto solamente si: 1) el objeto se desplaza, 2) la fuerza tiene una componente en la dirección del desplazamiento. Se pueden presentar tres casos:

a) Cuando θ queda entre 0° y 90°: $\vec{F}$ tiene una componente en la misma dirección y sentido del desplazamiento y el trabajo es *positivo*.

b) Cuando θ vale 90°: $\vec{F}$ es perpendicular al desplazamiento y el trabajo es *nulo*.

c) Cuando θ queda entre 90° y 180°: $\vec{F}$ tiene una componente en sentido opuesto al desplazamiento y el trabajo es *negativo*.



Pongamos el caso de un levantador de pesas, este efectúa un trabajo mientras está elevando las pesas desde el suelo, pero una vez que las mantiene levantadas a una cierta altura en reposo, no realiza ningún trabajo sobre las pesas durante ese tiempo*

Aun si la persona camina horizontalmente con las pesas a una altura dada y a velocidad constante, no realiza ningún trabajo sobre las pesas porque la fuerza que ejerce para sostenerlas es vertical hacia arriba mientras que el desplazamiento es horizontal.

* Desde el punto de vista fisiológico el hombre sí realiza un trabajo microscópico. Sus músculos se contraen y relajan repetidamente, el hombre transpira y respira agitadamente, se cansa y se agota y hay que suministrarle energía (comida) para mantenerse así.

Sin desplazamiento no hay trabajo

UNIDAD SI DE TRABAJO

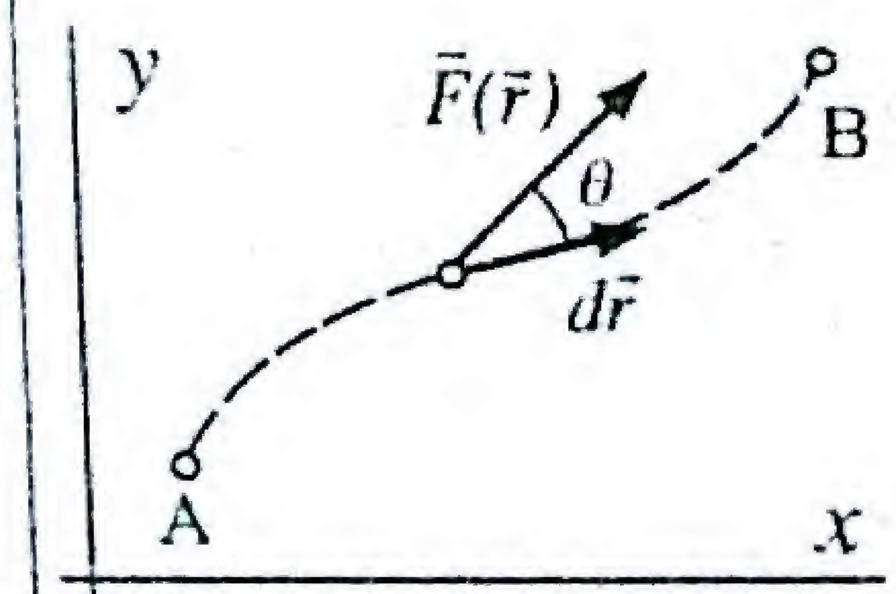
La unidad SI de trabajo es: 1 joule = 1 newton -metro.

El joule (J)
1 newton-metro

TRABAJO DE UNA FUERZA VARIABLE

Supongamos ahora un cuerpo que se desplaza desde A hasta B a lo largo de una trayectoria curva. Para un desplazamiento infinitesimal, el trabajo hecho por la fuerza variable $\vec{F}(\vec{r})$ es el producto escalar:

$$dW = \vec{F}(\vec{r})\bullet d\vec{r}.$$



El trabajo total desde A hasta B será la suma de los trabajos realizados en los sucesivos desplazamientos y es la integral de línea a lo largo de la trayectoria del movimiento:

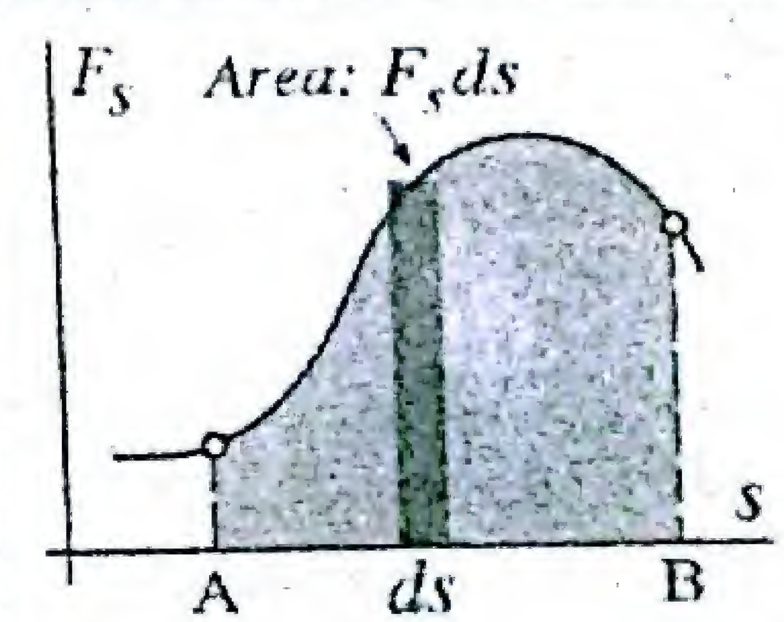
$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}(\vec{r})\bullet d\vec{r} = \int_A^B (F\cos\theta)dr$$

Trabajo de una fuerza variable

$$\boxed{W_{A\to B} = \int_A^B (F\cos\theta)dr}$$

TRABAJO COMO ÁREA BAJO LA CURVA

Conforme el cuerpo se mueve, varía la componente tangencial de la fuerza, $F_s = F\cos\theta$. Si graficamos F_S en función de la distancia s medida a lo largo de la trayectoria, vemos que el trabajo infinitesimal $dW = F_S ds$ corresponde al área del rectángulo elemental mostrado en la figura.



Por lo tanto, el trabajo total está dado por la suma de las áreas de los rectángulos, es decir, corresponde al área sombreada.

$$W_{A\to B} = \int_A^B F_x ds = \textit{Area bajo la curva}$$

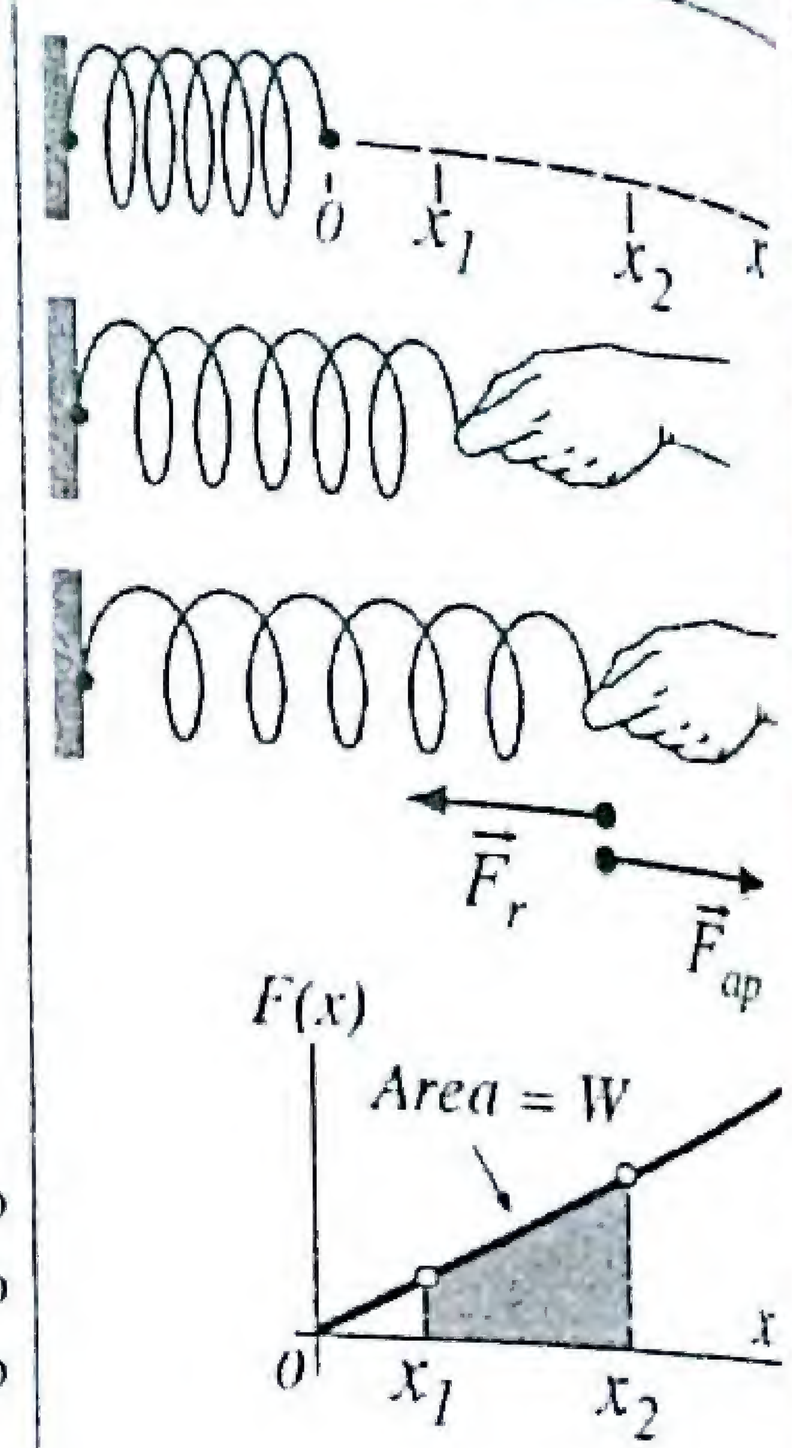
El trabajo es el área bajo la curva de $F(x)$ vs x

TRABAJO PARA ESTIRAR UN RESORTE

La fuerza ejercida por un resorte es una fuerza de restitución, es decir, tiene sentido contrario al desplazamiento, $F_r = -kx$. Cuando un agente externo trata de estirar un resorte debe aplicar una fuerza de igual magnitud y opuesta a la fuerza del resorte, $F_{ap} = -F_r = -(-kx) = kx$.

Si el desplazamiento desde equilibrio cambia desde x_1 hasta x_2, el trabajo realizado por el agente externo es:

$$W_{ext} = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx = \int_{x_1}^{x_2} (kx)dx = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2$$



El trabajo de la fuerza aplicada al resorte resulta positivo si $x_2^2 > x_1^2$, es decir, si la magnitud del desplazamiento final es mayor que la del desplazamiento inicial (esto ocurre al estirar o al comprimir el resorte).

El trabajo realizado por el resorte es el negativo del trabajo realizado por el agente externo ($W_{res} = -W_{ext}$).

$$\boxed{W_{1\to 2} = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2}$$

TEOREMA DE TRABAJO - ENERGÍA

Consideremos el trabajo elemental hecho por una fuerza sobre una partícula de masa m que tiene un desplazamiento infinitesimal $d\vec{r}$. De acuerdo a la segunda ley de Newton, tenemos: $\vec{F} = m\vec{a}$, $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$

$$dW = \vec{F} \bullet d\vec{r} = (m\frac{d\vec{v}}{dt}) \bullet d\vec{r}$$

Si tomamos en cuenta que $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, y que el producto escalar es conmutativo,

$$d(\vec{v} \bullet \vec{v}) = \vec{v} \bullet d\vec{v} + d\vec{v} \bullet \vec{v} = 2d\vec{v} \bullet \vec{v}$$

tenemos:

$$dW = m d\vec{v} \bullet \vec{v} = \frac{1}{2} m d(\vec{v} \bullet \vec{v}) = \frac{1}{2} m d(v^2)$$

Energía cinética

$$\boxed{K = \frac{1}{2}mv^2}$$

Para hallar el trabajo total durante el trayecto desde A hasta B, integramos esta expresión:

$$W_{A\to B} = \int_A^B dW = \frac{m}{2}\int_A^B d(v^2) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

La cantidad $K = mv^2/2$ se denomina energía cinética de la partícula de masa m que tiene una velocidad v. El resultado anterior se conoce como el teorema de Trabajo-Energía:

"*El trabajo realizado por la fuerza neta sobre una partícula es igual a la variación de su energía cinética*".

Teorema de Trabajo-Energía

$$\boxed{W_{A\to B} = K_B - K_A}$$

$$\boxed{W_{A\to B} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2}$$

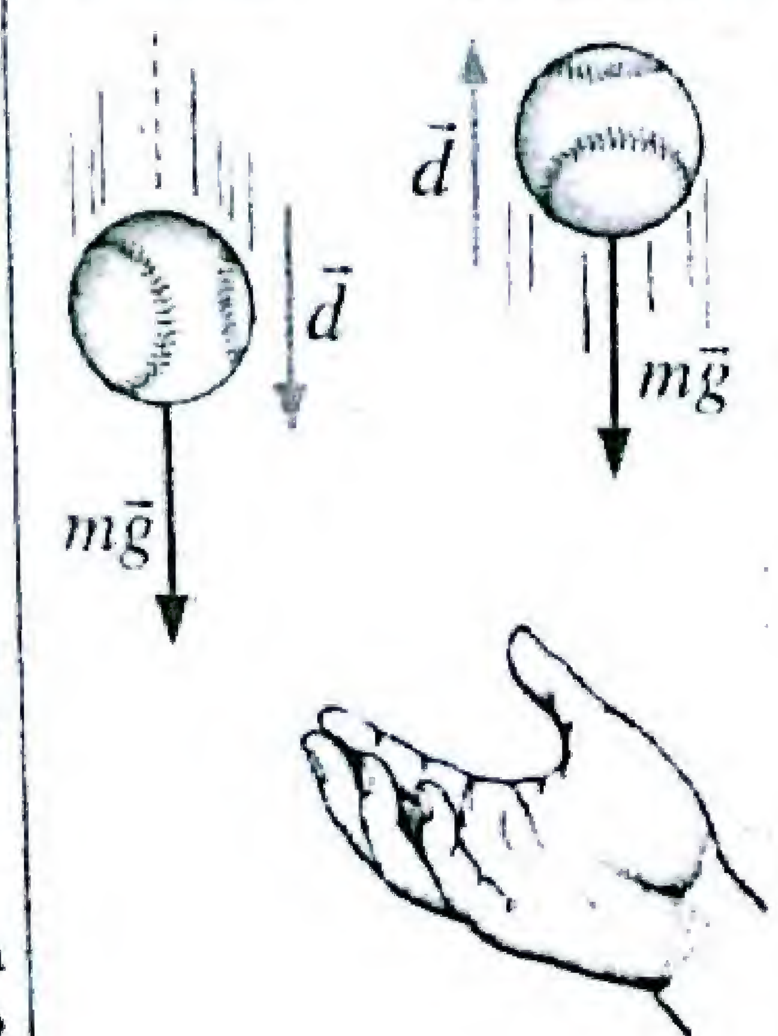
El teorema del trabajo y energía establece que la energía cinética de un cuerpo cambiará sólo si alguna fuerza externa realiza trabajo sobre él:

- Si el trabajo es *negativo* (la fuerza neta actúa en dirección opuesta al movimiento), la *energía cinética disminuye*.

Por ejemplo, si lanzamos una pelota al aire, a medida que se eleva, la fuerza de gravedad (el peso $m\vec{g}$) realiza trabajo negativo y su energía cinética va disminuyendo ($\Delta K < 0$), hasta que se detiene instantáneamente cuando alcanza la altura máxima.

Bajando
$W > 0$
K aumenta

Subiendo
$W < 0$
K disminuye



- Si el trabajo es *positivo* (la fuerza neta actúa en la misma dirección del movimiento), la *energía cinética aumenta*.

Por ejemplo, a medida que una pelota va cayendo bajo la acción de la gravedad, su peso $m\vec{g}$ realiza trabajo positivo y su energía cinética se va incrementando ($\Delta K > 0$).

El teorema de Trabajo Energía significa que cuando un trabajo es realizado hay un cambio o una transferencia de energía. En general, podemos decir que el trabajo es una medida de la transferencia de energía.

Trabajo y Energía

POTENCIA

En la práctica es importante conocer no sólo el trabajo realizado sobre un objeto, sino también la *potencia* o rapidez con la cual se realiza dicho trabajo:

$$P = \frac{dW}{dt}$$

El trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ en un desplazamiento infinitesimal $d\vec{r}$, es: $dW = \vec{F} \bullet d\vec{r}$, y como la velocidad es $\vec{v} = d\vec{r}/dt$, la potencia instantánea será:

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \bullet \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \bullet \vec{v}$$

El producto escalar de la fuerza que actúa sobre un objeto por la velocidad del objeto es la potencia que le suministra el agente que aplica dicha fuerza.

Potencia instantánea

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \bullet \vec{v}}$$

UNIDAD SI DE POTENCIA

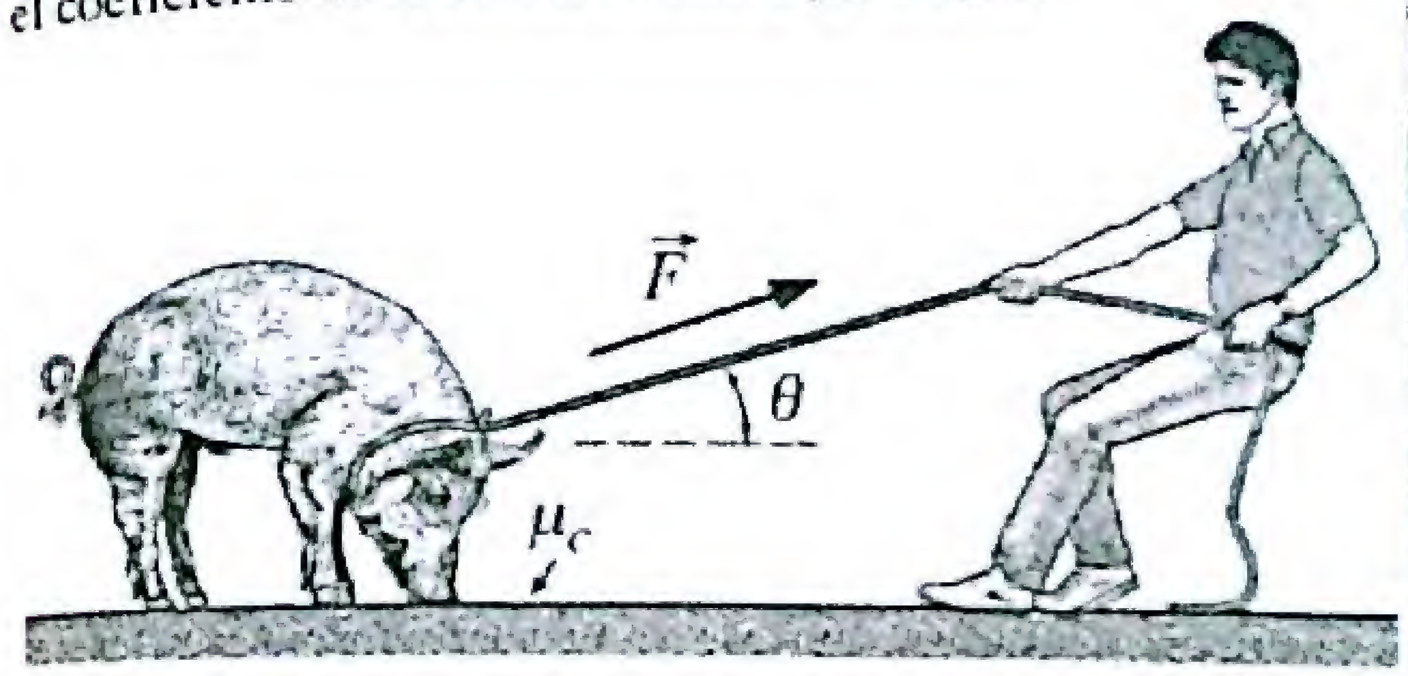
La unidad SI de potencia corresponde a la de trabajo o energía por unidad de tiempo, es decir, J/s.
Esta unidad se denomina watt (símbolo, *W*) y equivale a un joule de energía transferida en un segundo.

1 watt = 1 joule/segundo

PROBLEMAS RESUELTOS

PR-3.01. *Un cochino trabajoso*

Un hombre jala un cochino de masa m = 150 kg por una superficie horizontal, aplicando una fuerza $\vec{F}$ constante de 500 N, a un ángulo de θ = 36,9° con la horizontal. Suponga que el cochino se desplaza rígidamente, siendo el coeficiente de fricción cinética μ_c = 0,30.



Cuando el cochino ha sido arrastrado una distancia horizontal d = 20 m, determine:

a) el trabajo realizado por la fuerza aplicada por el hombre.

b) el trabajo realizado por la fuerza de fricción.

c) el trabajo realizado por la fuerza de gravedad.

d) el trabajo realizado por la fuerza normal.

e) ¿Cuál es el trabajo neto hecho sobre el cochino?

__Solución:__ a) El trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ aplicada por el hombre es:

$$W_F = Fd\cos\theta = (500\text{N})(20\text{m})\cos 36{,}9° = 7997\text{J}$$

b) La suma de todas las fuerzas verticales es cero:

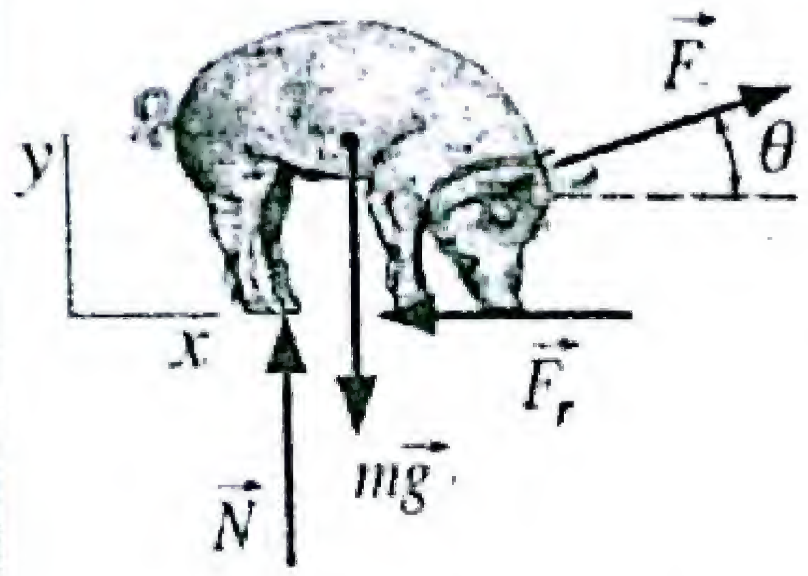
$$\sum F_y = N + F\operatorname{sen}\theta - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N = mg - F\operatorname{sen}\theta$$

La fuerza de fricción cinética:

$$F_r = \mu_c N = \mu_c(mg - F\operatorname{sen}\theta),$$

tiene sentido opuesto al desplazamiento, por lo tanto, el trabajo realizado por esta fuerza es negativo:

$$W_r = F_r d\cos 180° = \mu_c(mg - F\operatorname{sen}\theta)d\cos 180° = -7019\text{J}$$



c) El peso, $m\vec{g}$ es perpendicular al desplazamiento $\vec{d}$ y su trabajo es cero:

$$W_g = mgd\cos 90° = 0$$

d) Por la misma razón, el trabajo de la fuerza normal $\vec{N}$ es cero:

$$W_N = Nd\cos 90^o = 0$$

e) El trabajo neto realizado sobre el cochino es la suma:

$$W_{total} = W_F + W_r + W_g + W_N = 7997J - 7019J + 0 + 0 = 978J$$

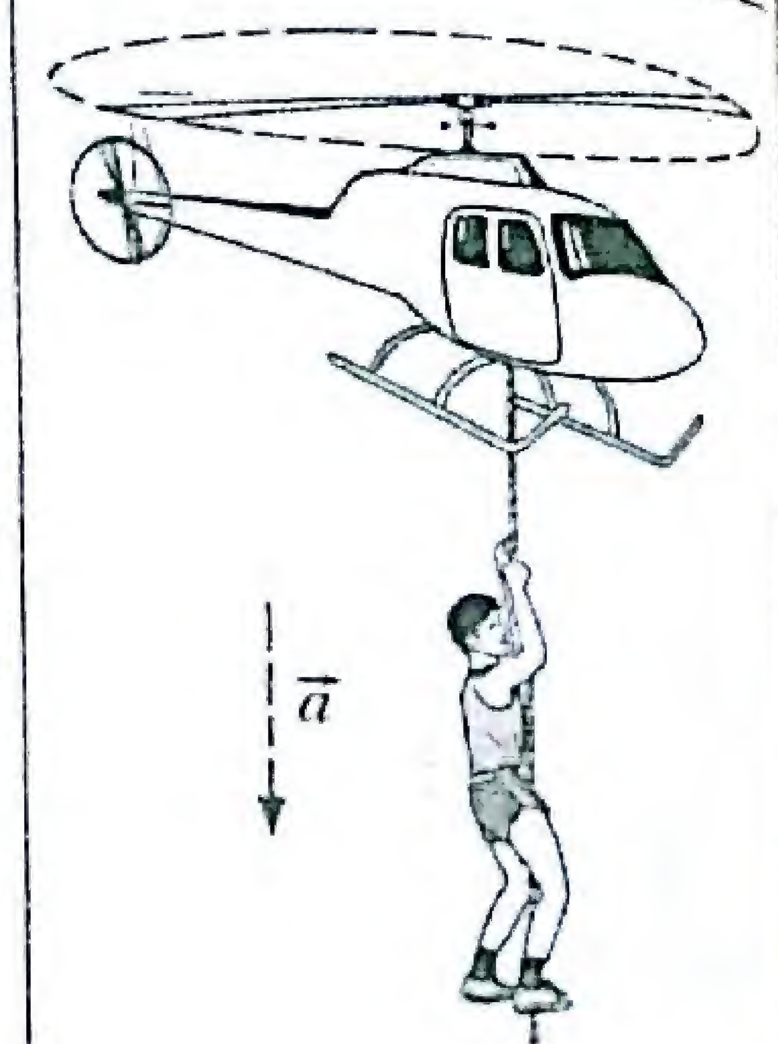
Respuesta:

a) $W_F = 7997$ J, b) $W_r = -7019$ J
c) $W_g = 0$ J, d) $W_N = 0$ J
e) $W_t = 978$ J

PR-3.02. *Descenso para operación rescate*

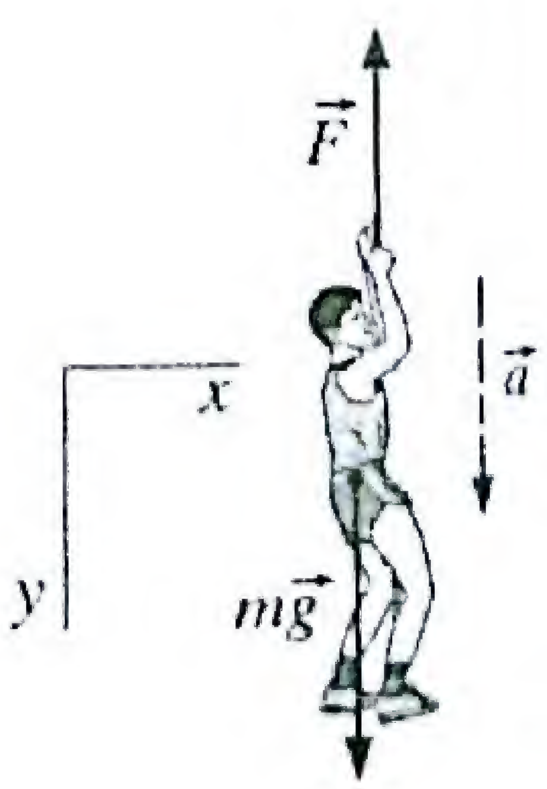
Un hombre de masa m, agarrado de una cuerda, baja a la azotea de un edificio desde un helicóptero. El hombre parte del reposo y desciende una altura h con una aceleración constante de magnitud, $a = g/4$.

a) Halle el trabajo hecho sobre el hombre por el helicóptero.
b) Halle el trabajo hecho sobre el hombre por la fuerza de la gravedad.
c) ¿Cual es la energía cinética final del hombre?
d) ¿Cual es la velocidad final del hombre?



Solución: a) Para hallar la fuerza $\vec{F}$ aplicada por el helicóptero sobre el hombre, aplicamos la segunda ley de Newton:

$$\sum F_y = mg - F = ma = m(\frac{g}{4}) \quad \Rightarrow \quad F = \frac{3}{4}mg$$



Como la fuerza tiene sentido opuesto al desplazamiento, el trabajo realizado por $\vec{F}$ es negativo:

$$W_F = -Fh = -\frac{3}{4}mgh$$

b) La fuerza de gravedad $m\vec{g}$ tiene el mismo sentido que el desplazamiento y el trabajo realizado es positivo:

$$W_g = mgh$$

c) El trabajo neto hecho sobre el hombre es la suma:

$$W_{neto} = W_F + W_g = -\frac{3}{4}mgh + mgh = \frac{1}{4}mgh$$

Aplicamos el teorema del trabajo y la energía: $W_{neto} = K_F - K_0$. Como el hombre parte del reposo, su energía cinética final es:

$$K_F = W_{neto} = \frac{1}{4}mgh$$

d) La velocidad final del hombre se obtiene a partir de la energía cinética:

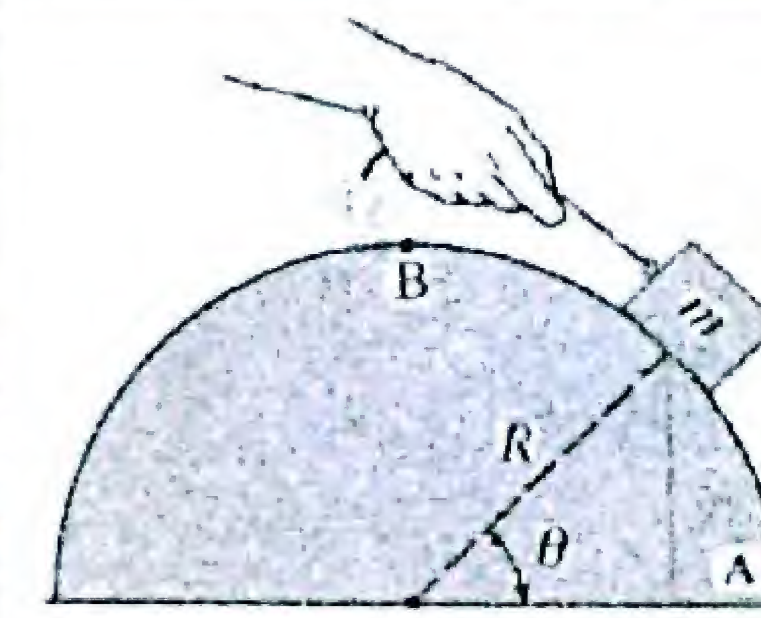
$$\frac{1}{2}mv_F^2 = \frac{1}{4}mgh \quad \Rightarrow \quad v_F = \sqrt{\frac{gh}{2}}$$

Respuesta:

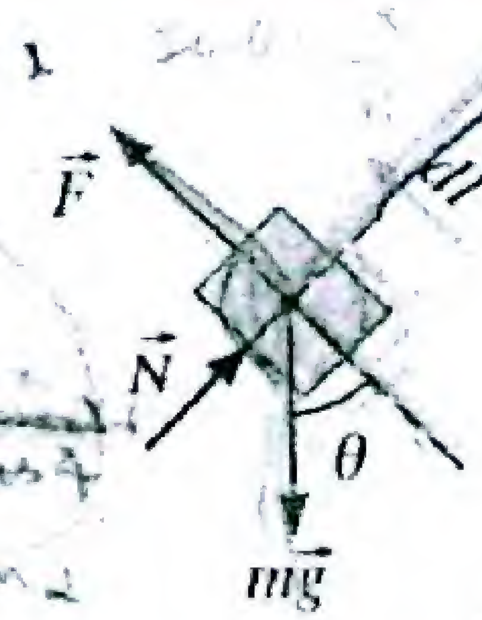
a) $W_F = \frac{3}{4}mgh$, b) $W_g = mgh$
c) $K_F = \frac{1}{4}mgh$, d) $v_F = \sqrt{\frac{gh}{2}}$

PR-3.03. *Desplaza el bloque por la superficie cilíndrica*

Un bloque pequeño de masa m se jala mediante una cuerda, por la superficie lisa de un medio cilindro de radio R. Calcule por integración directa, el trabajo realizado para deslizar el bloque a velocidad constante desde la base hasta la parte superior del medio cilindro.



Solución: Para desplazar el bloque sin aceleración la fuerza aplicada debe equilibrar la componente tangencial del peso:



$$\sum F_x = ma_x \quad \Rightarrow \quad F - mg\cos\theta = 0$$

Por lo tanto la magnitud de $\vec{F}$ debe ser: $F = mg\cos\theta$

La magnitud de un desplazamiento elemental a lo largo de un arco de circunferencia es $dl = Rd\theta$ y el trabajo total realizado por la fuerza aplicada desde A hasta B será:

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{l} = \int_0^{\pi/2} (mg\cos\theta)Rd\theta$$

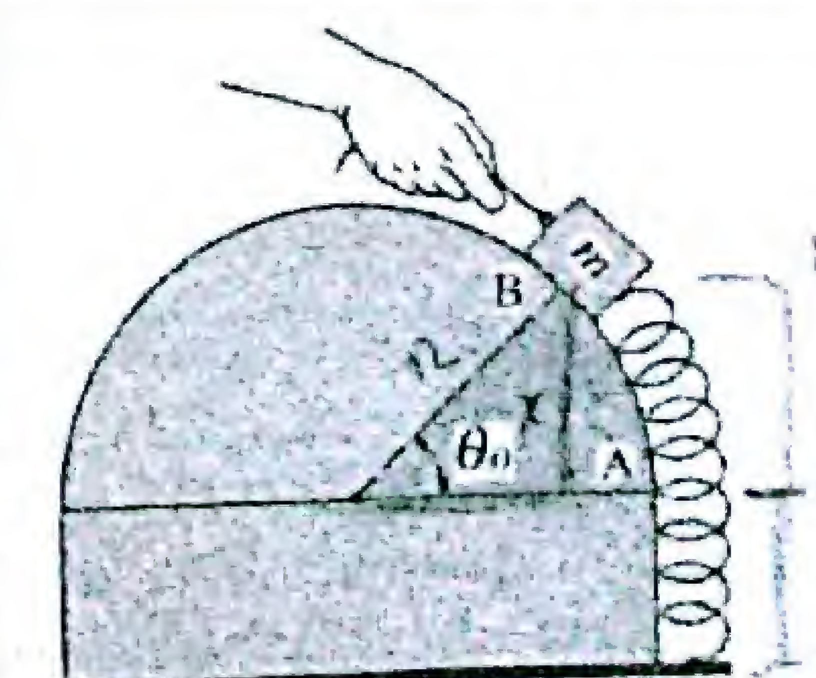
$$W_{AB} = mgR\,sen\theta\Big|_0^{\pi/2} = mgR(1-0) = mgR$$

Respuesta:

$$\boxed{W_{AB} = mgR}$$

PR-3.04. *Bloque atado a un resorte sobre un cilindro*

Un bloque de masa m atado a un resorte de constante elástica k, es deslizado por una superficie cilíndrica lisa de radio R. Se aplica una fuerza que se mantiene paralela a la superficie cilíndrica de magnitud variable para que el bloque sea deslizado lentamente desde la posición A, en que el resorte está sin deformar hasta la posición B en que el bloque se posiciona a un ángulo θ_0 sobre el cilindro. Calcule el trabajo realizado por la fuerza aplicada.



l = R

Solución: En un desplazamiento elemental $dl = Rd\theta$, el trabajo contra la fuerza de la gravedad es: $dW_g = (Mg\cos\theta)dl$ y el trabajo entre A y B es:

$$W_g = \int_A^B \vec{F}_g \bullet d\vec{l} = \int_0^{\theta_0} (mg\cos\theta)Rd\theta$$

$$W_g = mgR\,sen\,\theta\Big|_0^{\theta_0} = mg\,sen\,\theta_0 R$$

El trabajo elemental contra la fuerza del resorte es: $dW_r = (kl)dl$ y el trabajo entre A y B es:

$$W_r = \int_A^B \vec{F}_r \bullet d\vec{l} = \int_0^{l_0} (kl)dl = \frac{1}{2}kl^2\Big|_0^{R\theta_0} = \frac{1}{2}kR^2\theta_0^2$$

El trabajo total entre A y B es:

$$W_{AB} = mgR\,sen\,\theta_0 + \frac{1}{2}kR^2\theta_0^2$$

Respuesta:

$$\boxed{W_{AB} = mgR\,sen\,\theta_0 + \frac{1}{2}kR^2\theta_0^2}$$

PR-3.05. *Trabajo de la gravedad no depende de la ruta*

Un esquiador de masa m se desliza cuesta abajo por una colina sin fricción, que tiene una forma arbitraria.

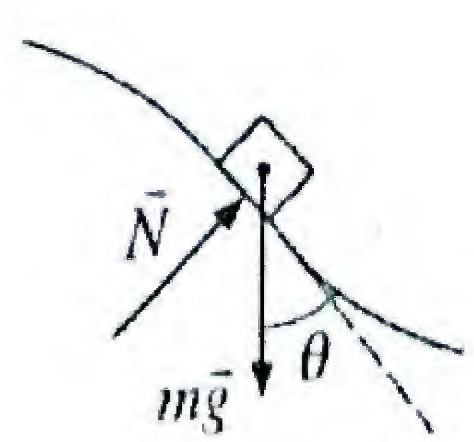
Demuestre que el trabajo hecho sobre la persona por la fuerza de gravedad depende solamente de la distancia vertical que desciende, h, pero no depende de la forma de la trayectoria seguida.

Solución: Si consideremos a la persona como una partícula puntual, un desplazamiento arbitrario finito tiene la expresión:

$$d\vec{r} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$$

El trabajo elemental de la fuerza de gravedad es:

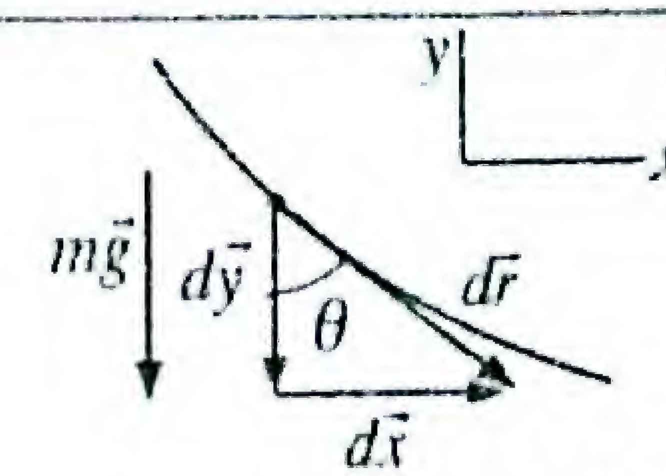
$$dW_g = m\vec{g} \bullet d\vec{r} = mg(-\hat{y}) \bullet (dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}) = -mgdy$$



Por lo tanto, el trabajo total realizado por la fuerza de gravedad en todo el trayecto será:

$$W_{A\to B} = \int_A^B m\vec{g} \bullet d\vec{r} = -\int_A^B mgdy = -mg(y_B - y_A) = +mgh$$

Queda demostrado que el trabajo de la fuerza de gravedad depende solamente del desplazamiento vertical, h.

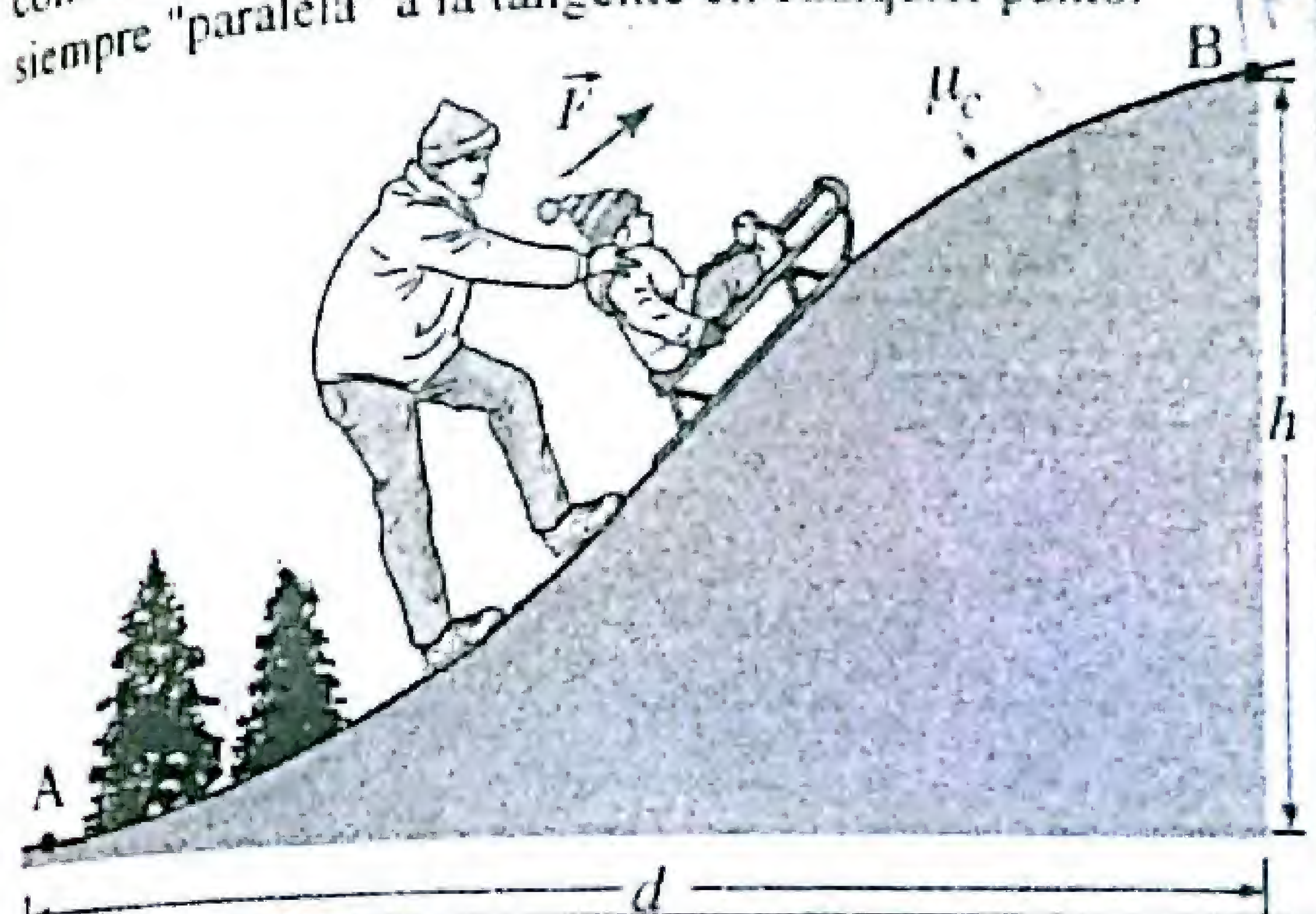


Respuesta:

$$\boxed{W_{A\to B} = mgh}$$

PR-3.06. *Trabajo contra la gravedad y la fricción*

Se arrastra un trineo de masa m, cuesta arriba por una colina cubierta de nieve, aplicando una fuerza que es siempre "paralela" a la tangente en cualquier punto.

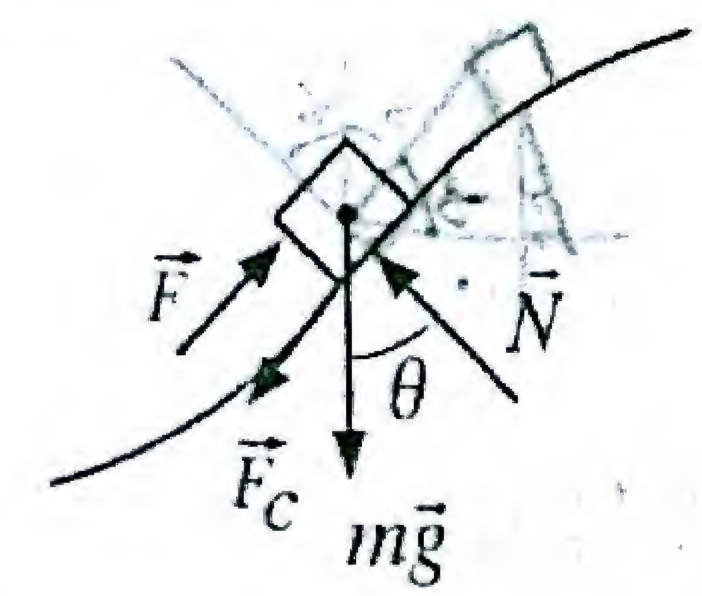


La cima de la colina se encuentra a una altura h y a una distancia horizontal d respecto a la base. El coeficiente de fricción cinética entre el trineo y la nieve es μ_c.

a) Halle el trabajo neto para llevar el trineo "lentamente" desde la base A hasta la cima B.

b) Demuestre que el trabajo no depende de la forma de la colina.

Solución: Podemos considerar la colina compuesta de una sucesión de pequeños planos inclinados de distintos ángulos de inclinación, θ. Un plano inclinado elemental de longitud Δl tiene una base Δx y una altura Δy. El trabajo elemental a lo largo del desplazamiento Δl será la suma del trabajo contra la fuerza de gravedad mas el trabajo contra la fuerza de fricción:



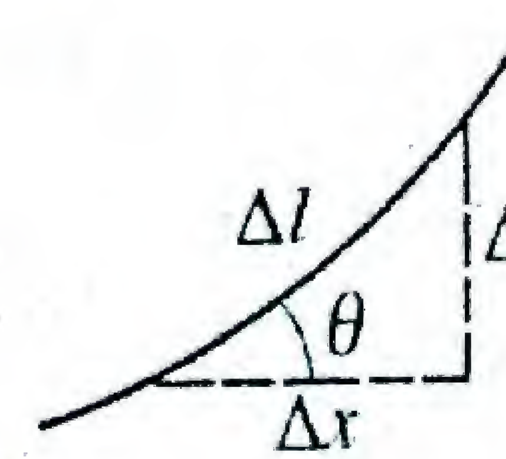
$$\Delta W = mg\Delta y + F_c\Delta l$$

Pero $\Delta l = \Delta x / \cos\theta$ y la fuerza de fricción cinética es:

$$F_c = \mu_c N = \mu_c mg\cos\theta$$

Por lo tanto, el trabajo elemental es:

$$\Delta W = mg(\Delta y + \mu_c\Delta x)$$



Sumando los trabajos sobre todos los planos elementales,

se obtiene el trabajo total desde A hasta B:

$$W_{A\to B} = \sum \Delta W = mg\sum(\Delta y + \mu_c \Delta x) = mg(h + \mu_c d)$$

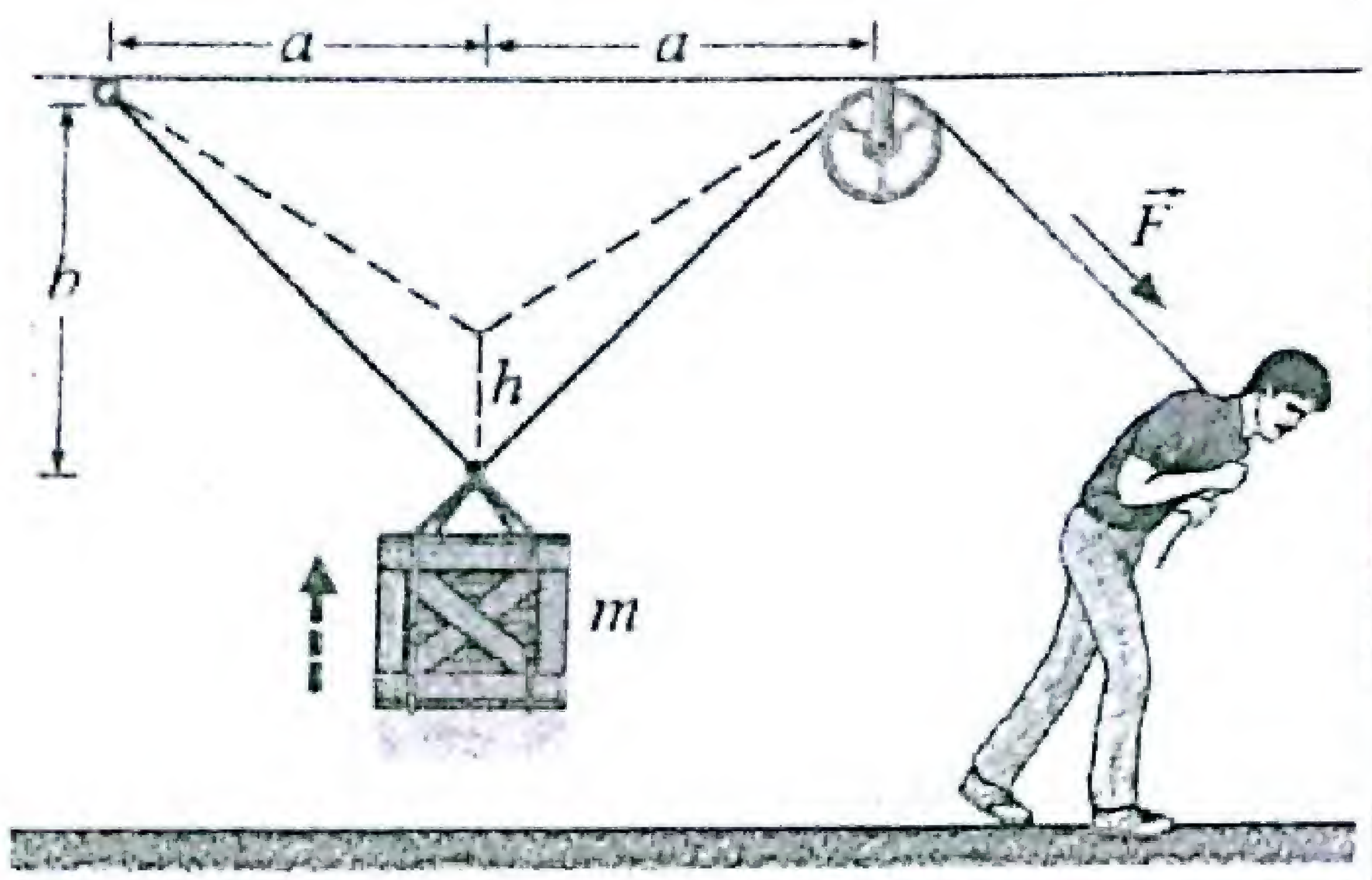
b) El trabajo resulta dependiente solamente de las distancias vertical, h y horizontal d, cualquiera sea la forma de la colina.

Respuesta:

$$\boxed{W_{A\to B} = mg(h + \mu_c d)}$$

PR-3.07. *Trabajo al elevar un cajón mediante una polea*

Un hombre aplica una fuerza de magnitud constante F = 500 N para elevar un cajón de masa m = 40 kg.



Inicialmente, en la posición mostrada, las distancias son: a = 3 m y b = 4 m. ¿Cuál será el trabajo hecho sobre el cajón para elevarlo en una altura h = 1,75m?
a) Por la fuerza de gravedad.
b) Por el hombre.
c) El trabajo total.

Solución: a) El trabajo de la fuerza de gravedad cuando el cajón es elevado en una altura h, es negativo:

$$W_g = -mgh = -(40\text{kg})(9{,}8\text{m/s}^2)(1{,}75\text{m}) = -686\text{J}$$

b) El trabajo que realiza el hombre al jalar una longitud ΔL de cuerda es:

$$W_h = F\Delta L = F(2L_1 - 2L_2)$$

$$W_h = 2F(\sqrt{a^2+b^2} - \sqrt{a^2+(b-h)^2})$$

$$W_h = 2(500\text{N})(\sqrt{3^2+4^2} - \sqrt{3^2+(4-1{,}75)^2}) = 1250\text{N}$$

c) El trabajo total hecho sobre el cajón es:

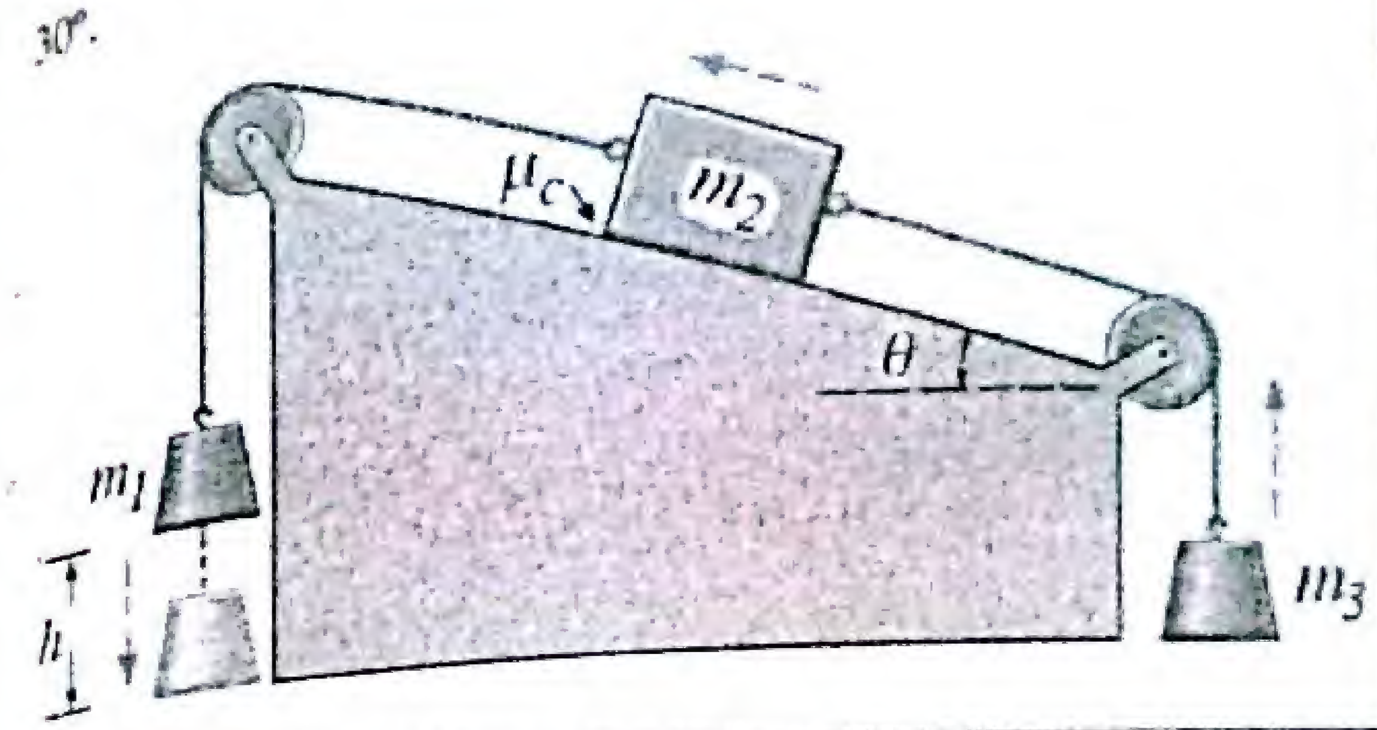
$$W_{total} = W_g + W_h = -686 + 1250\text{N} = 564\text{N}$$

Respuesta

a) $W_g = -686\text{J}$
b) $W_h = +1250\text{N}$
c) $W_t = +564\text{N}$

PR-3.08. *Pesas para desplazar un bloque en una rampa*

Dos pesas de masas respectivas m_1 = 2 kg, y m_3 = 1 kg, están conectados por una cuerda a un bloque de masa m_2 = 1 kg colocado sobre un plano inclinado a un ángulo θ = 30°.

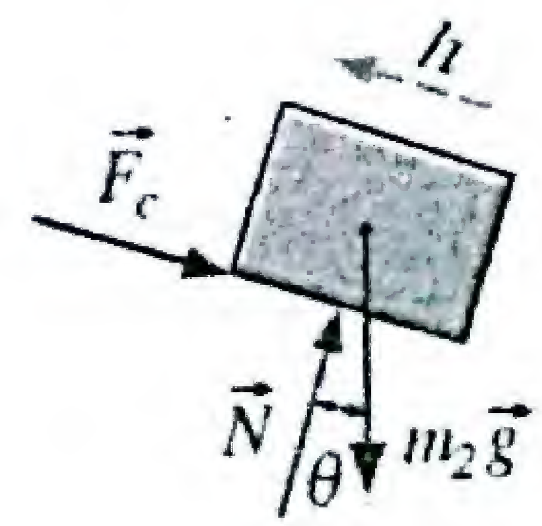


El coeficiente de fricción cinética entre el bloque m_2 y el plano inclinado es μ_c = 0,2. Cuando la pesa m_1 se suelta, el bloque m_2 y la pesa m_3 suben.
Determine la velocidad del sistema cuando la pesa m_1 haya descendido la altura h = 2 m.

Solución: El trabajo de la fuerza de gravedad es la suma de los trabajos realizados sobre cada una de las pesas:

$$W_g = W_1 + W_2 + W_3$$

$$W_g = m_1gh - m_3gh - m_2gh\,sen\theta \qquad (1)$$



La fuerza de rozamiento cinético sobre el bloque m_2 es opuesta al desplazamiento y el trabajo es negativo:

$$W_c = -\mu_c Nh = -\mu_c m_2 gh\cos\theta \qquad (2)$$

Aplicando el teorema del trabajo-energía, el trabajo neto es igual a la variación de energía cinética del sistema:

$$W_g + W_c = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)v^2$$

$$(m_1 - m_3 - m_2 sen\theta - \mu_c m_2\cos\theta)gh = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)v^2$$

La velocidad común de las pesas y el bloque es:

$$v = \sqrt{2gh\frac{m_1 - m_3 - m_2(sen\theta + \mu_c\cos\theta)}{m_1 + m_2 + m_3}}$$

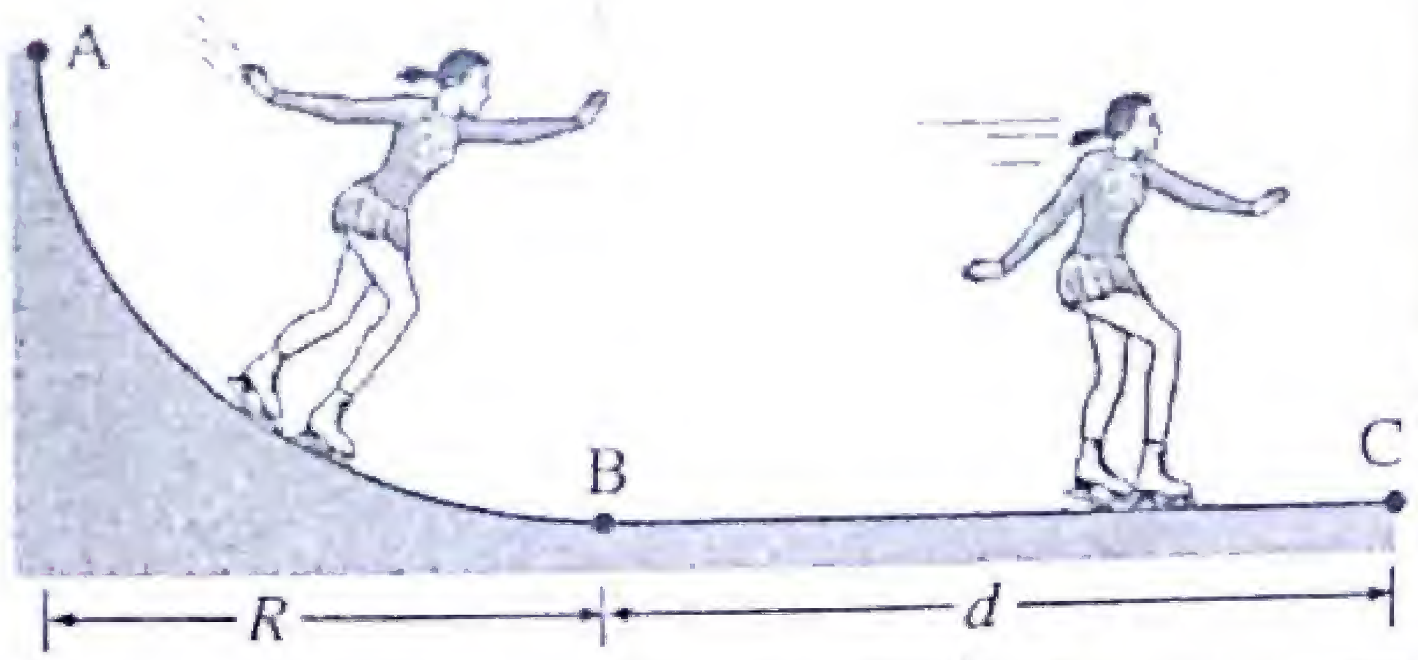
$$v = \sqrt{2(9{,}8)(2)\frac{2-1-1(\text{sen}30° + 0{,}2\cos30°)}{2+1+1}} = 1{,}79\text{m/s}$$

Respuesta:

$$\boxed{v = 1{,}79\text{m/s}}$$

PR-3.09. *Patinando en una pista circular con fricción*

Una patinadora de masa $m = 50$ kg desciende por una pista que tiene forma de un cuarto de circunferencia de radio $R = 10$ m.



Ella parte del reposo en el punto A, pasa por B con una velocidad de 12 m/s y, finalmente recorre una distancia horizontal $d = 32$ m, deteniéndose en el punto C.

a) ¿Cuál es el coeficiente de fricción cinética en la superficie horizontal?

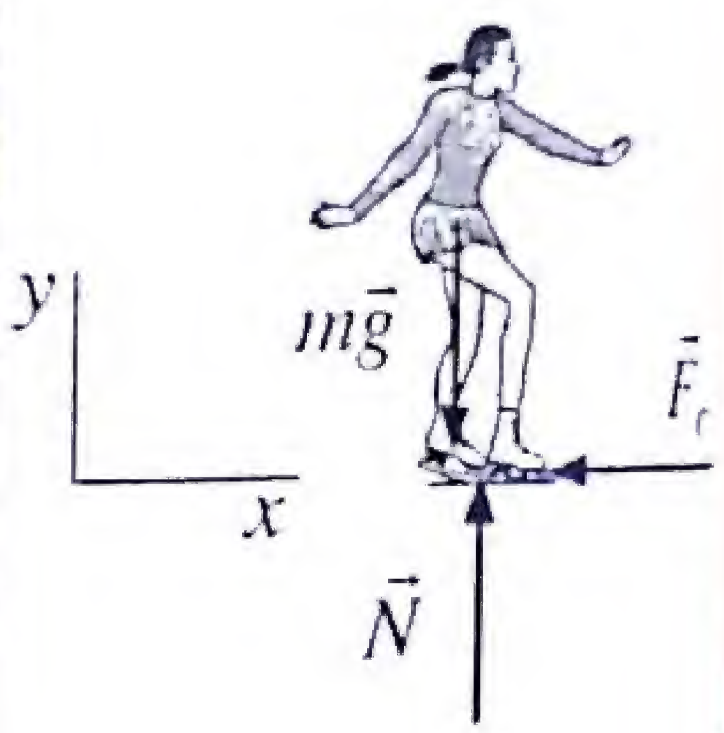
b) ¿Cuál es el trabajo hecho por la fuerza de fricción cuando la patinadora desciende por el arco circular AB?

Solución: a) En la región horizontal BC, la fuerza de gravedad es perpendicular al desplazamiento y por lo tanto, no realiza trabajo. La fuerza de fricción cinética es $F_c = \mu_c N = \mu_c mg$ y el trabajo de esta fuerza es:.

$$W_{BC} = \vec{F}_c \bullet \vec{d} = (\mu_c mg)d\cos\theta = -\mu_c mgd$$

De acuerdo al teorema del trabajo-energía, W_{BC} representa el cambio en la energía cinética de la persona:

$$W_{BC} = K_C - K_B \qquad \Rightarrow \qquad -\mu_c mgd = \frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_B^2$$



Como $v_C = 0$, el valor del coeficiente de fricción cinética es:

$$\mu_c = \frac{v_B^2}{2gd} = \frac{(12\text{m/s})^2}{2(9{,}8\text{m/s}^2)(32\text{m})} = 0{,}23$$

b) En el trayecto circular AB, el trabajo neto es la suma del trabajo de la fuerza de gravedad (mgR) mas el de la fuerza de fricción, W_c. Aplicando el teorema del trabajo-energía:

$$W_{AB} = W_g + W_c = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

Como $v_A = 0$, el trabajo de la fuerza de fricción es:

$$W_c = \frac{1}{2}mv_B^2 - W_g = \frac{1}{2}mv_B^2 - mgR$$

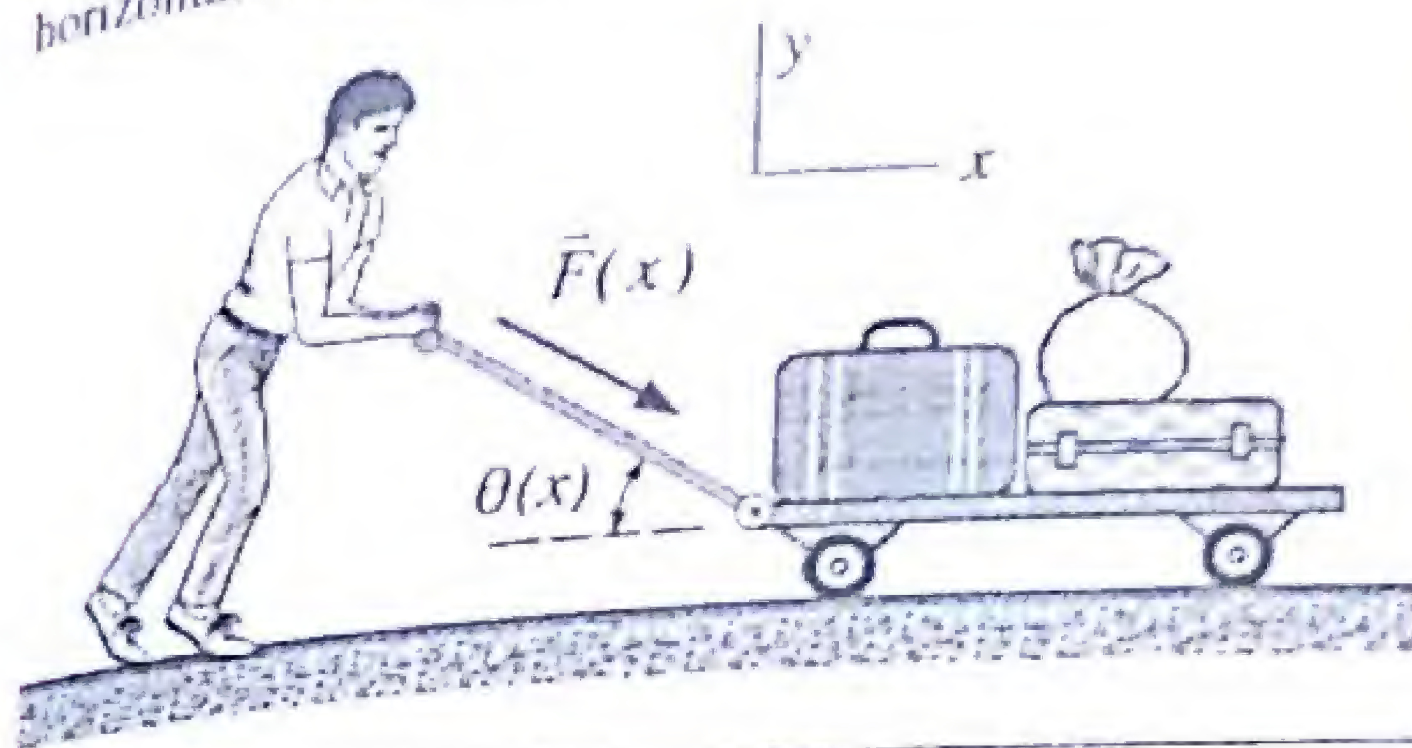
$$W_c = \frac{1}{2}(50\text{kg})(12\text{m/s})^2 - (50\text{kg})(9{,}8\text{m/s}^2)(10\text{m}) = -1300\text{J}$$

Respuesta:

a) $\mu_c = 0{,}23$
b) $W_c = -1300$ J

PR-3.10. *Fuerza variable en módulo y dirección*

Un hombre transporta una carga por una superficie horizontal mediante un carrito sin rozamiento.



En el trayecto desde $x = 5$ m hasta $x = 10$ m, aplica una fuerza de magnitud creciente:

$$F(x) = 50\,x$$

Formando un ángulo θ con la horizontal también creciente, según la relación:

$$\cos\theta(x) = 0{,}8 - 0{,}06x$$

Donde F se mide en newtons y x en metros. ¿Cuál es el trabajo que realiza el hombre en ese trayecto?

Solución: a) Para un desplazamiento elemental dx, el trabajo realizado por la fuerza es:

$$dW = \vec{F} \bullet d\vec{x} = Fdx\cos\theta = 50x(0{,}8 - 0{,}06x)dx$$

Integrando esta expresión entre los límites $x_1 = 5$ m y $x_2 = 10$ m, tenemos:

$$W = \int_5^{10} 50x(0{,}8 - 0{,}06x)dx = 40\int_5^{10} xdx - 3\int_5^{10} x^2dx$$

Por lo tanto:

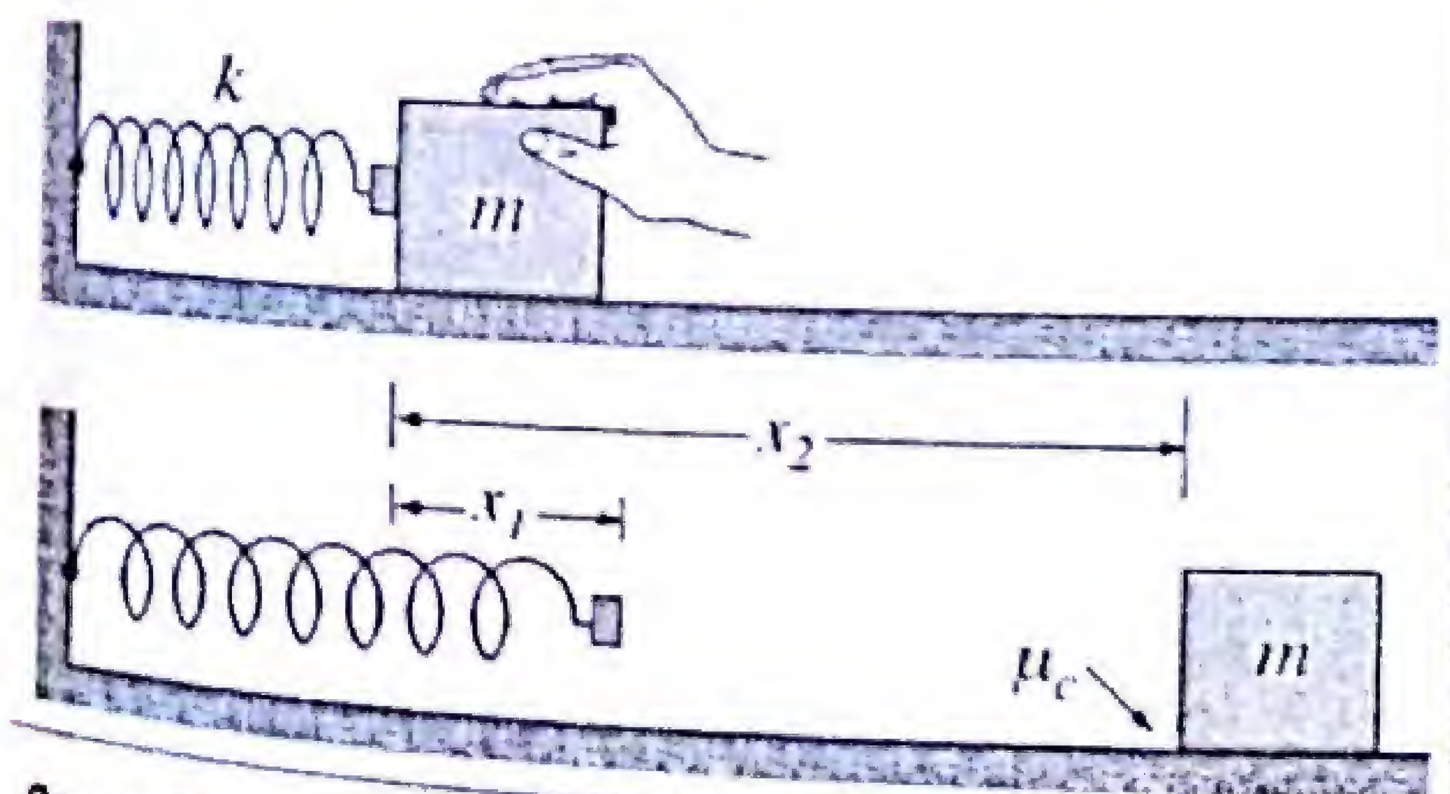
$$W = 40\left[\frac{x^2}{2}\right]_5^{10} - 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_5^{10} = 625\,J$$

Respuesta:

$W = 625$ J

PR-3.11. *Hallando el coeficiente de fricción cinética*

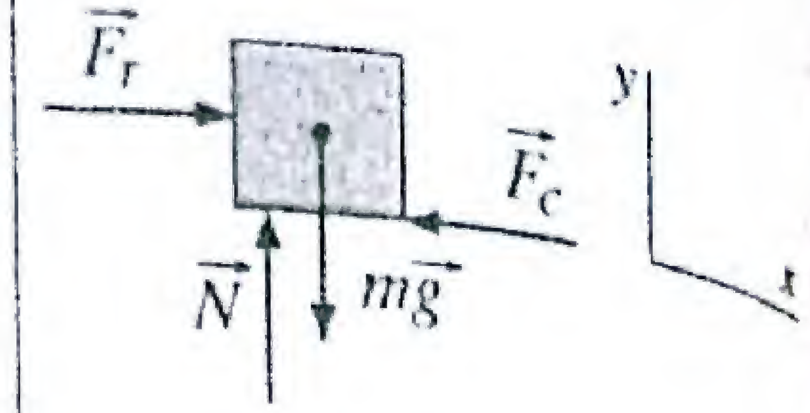
Un resorte de constante elástica $k = 98$ N/m es comprimido una distancia $x_1 = 30$ cm por un bloque de masa $m = 2$ kg sobre una superficie horizontal.



Después de que el bloque se suelta, recorre una distancia $x_2 = 90$ cm, antes de detenerse. ¿Cuál es el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie?

Solución: La fuerza del resorte, $F=-kx$, realiza un trabajo sobre el bloque, para ($x<0$) a lo largo de la distancia x_1:

$$W_r = \int_{-x_1}^{0}(-kx)dx = -k\frac{x^2}{2}\Big|_{x_1} = \frac{1}{2}kx_1^2$$



La fuerza de fricción cinética ($\mu_c mg$), apunta hacia la izquierda y realiza un trabajo a lo largo de la distancia x_2.

$$W_c = (-\mu_c mg)x_2$$

La energías cinética inicial y final del bloque son nulas ($K_i = K_f = 0$). Aplicando el teorema del trabajo y la energía:

$$W_{neto} = W_r + W_c = \frac{1}{2}kx_1^2 - \mu_c mgx_2 = \Delta K = 0$$

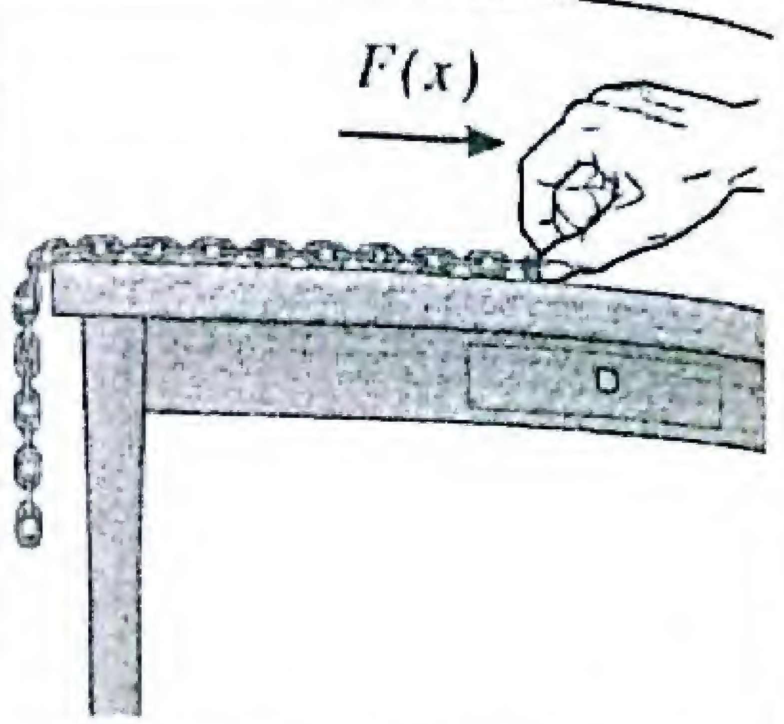
$$\mu_c = \frac{kx_1^2}{2mgx_2} = \frac{(98\text{N/m})(0,30\text{m})^2}{2(2\text{kg})(9,8\text{m/s}^2)(0,90\text{m})} = 0,25$$

Respuesta:

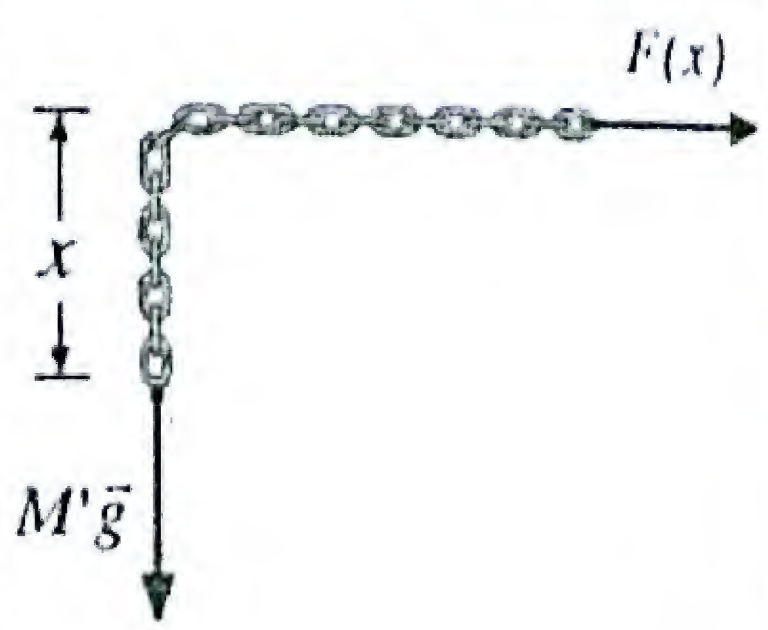
$$\boxed{\mu_c = \frac{kx_1^2}{2mgx_2} = 0,25}$$

PR-3.12. *Trabajo para jalar la cadena*

Una cadena de masa M está sobre una mesa sin fricción, sujeta de tal forma que cuelga un quinto de su longitud L, como se indica en la figura. ¿Cuánto trabajo se requiere para jalar la parte que cuelga hasta que quede totalmente sobre la mesa?



Solución: El mínimo trabajo requerido se realiza cuando la cadena no está acelerada, es decir, si se va variando la magnitud de la fuerza para justamente mantener equilibrado el peso de la parte que cuelga (trabajo cuasi-estático). Si en un instante dado cuelga un pedazo de cadena de longitud x, la fuerza aplicada sería:



$$F(x) = M'g = (M\frac{x}{L})g$$

Como la cadena se está trasladando en el sentido en que x decrece, el trabajo neto será:

$$W = \int \vec{F}\bullet d\vec{r} = -\int_{L/5}^{0}\frac{M}{L}gxdx = -\frac{Mg}{L}\frac{x^2}{2}\Big|_{L/5}^{0} = \frac{MgL}{50}$$

Respuesta:

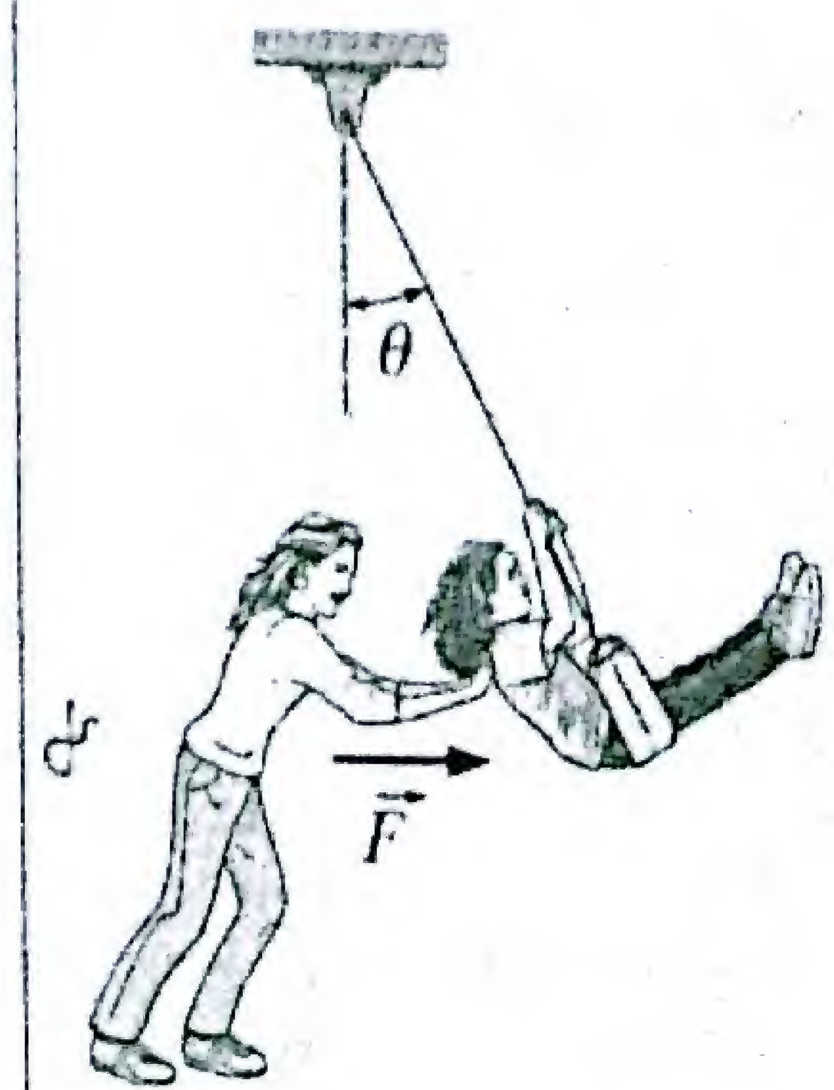
$$\boxed{W = \frac{MgL}{50}}$$

PR-3.13. *Trabajo para empujar un columpio*

Un mujer empuja a su hija de masa m, en un columpio suspendido de una cuerda de longitud L. Ella aplica una fuerza horizontal, $\vec{F}$, que va variando de manera que la niña se mueve lentamente a partir de la posición vertical hasta que la cuerda forma un ángulo θ_0 con la vertical.

a) Halle el trabajo realizado por la mujer.
b) Halle el trabajo realizado por la gravedad.
c) Halle el trabajo realizado por la tensión de la cuerda.
d) ¿Cuál es el trabajo neto realizado sobre la niña?

Solución: Las fuerzas que actúan sobre la niña son: su peso $m\vec{g}$, la tensión $\vec{T}$ de la cuerda y la fuerza aplicada, $\vec{F}$. Como la niña es desplazada sin aceleración (cuasi-estáticamente) las fuerzas se van equilibrando en todo momento:



$$\sum F_x = F - Tsen\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad F = Tsen\theta \qquad (1)$$

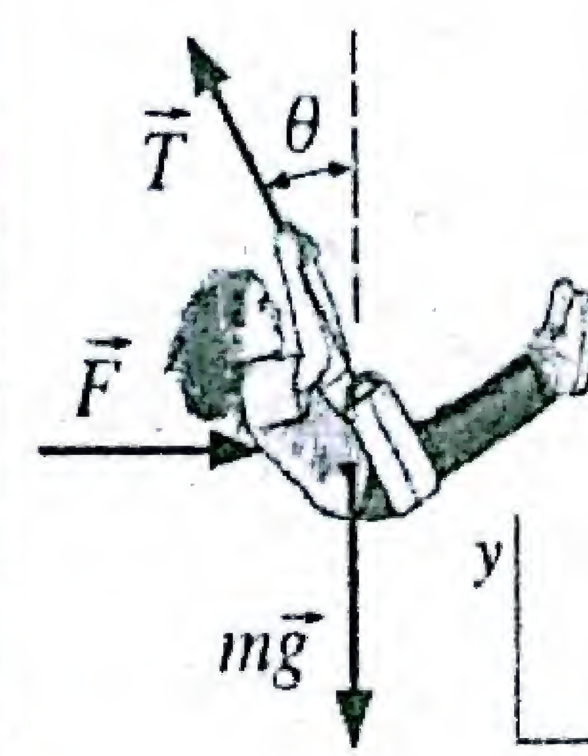
$$\sum F_y = T\cos\theta - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad mg = T\cos\theta \qquad (2)$$

Eliminando T de estas ecuaciones, se obtiene:

$$F(\theta) = mgtg\theta$$

El trabajo de la fuerza aplicada $\vec{F}$, actuando en la dirección $+\hat{x}$ es:

$$W_F = \int \vec{F}\bullet d\vec{r} = \int mgtg\theta\hat{x}\bullet(dx\hat{x}+dy\hat{y}) = \int mgtg\theta dx$$



Según el gráfico mostrado, la coordenada horizontal es:

$$x = Lsen\theta \quad \Rightarrow \quad dx = L\cos\theta d\theta$$

Por lo tanto, el trabajo efectuado por la fuerza $\vec{F}$ es:

$$W_F = \int_0^{\theta_0} mgtg\theta L\cos\theta d\theta = mgL\int_0^{\theta_0} sen\theta d\theta = -mgL\cos\theta\Big|_0^{\theta_0}$$

$$W_F = mgL(1-\cos\theta_0) = mgh$$

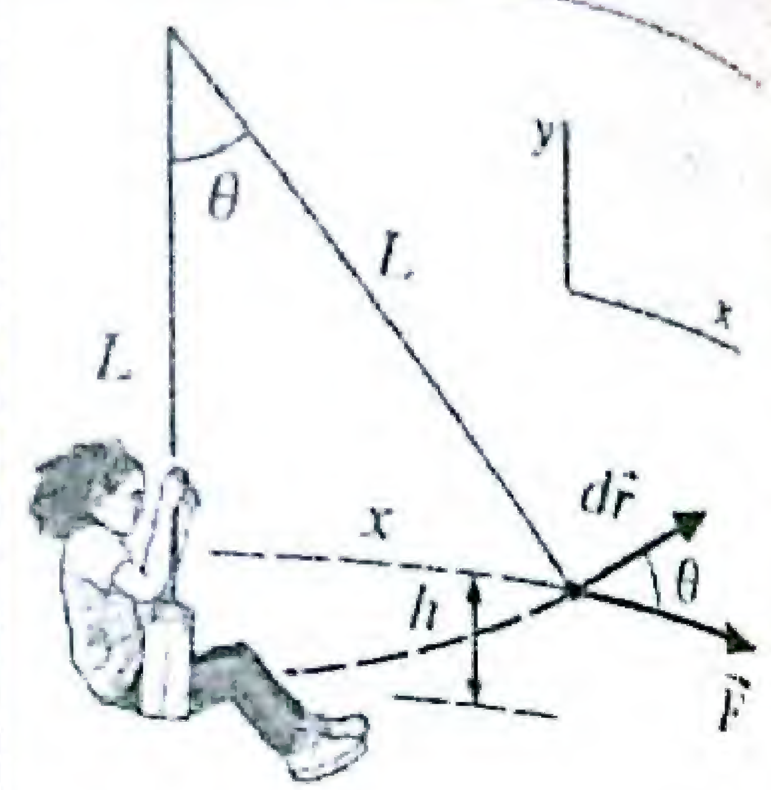
b) La fuerza de gravedad es $F_g = -mg\hat{y}$ (es constante) y la coordenada vertical es:

$$y = L\cos\theta \quad \Rightarrow \quad dy = -L sen\theta d\theta$$

Por lo tanto, el trabajo efectuado por la fuerza de gravedad es:

$$W_g = \int_0^{\theta_0} mg(-\hat{y})\bullet d\vec{r} = mg\int_0^{\theta_0} dy = -mgL\int_0^{\theta_0} sen\theta d\theta$$

$$W_g = mgL\cos\theta\Big|_0^{\theta_0} = -mgL(1-\cos\theta_0) = -mgh$$



c) El trabajo W_T efectuado por la tensión es nulo ya que en cada punto, $\vec{T}$ es perpendicular al desplazamiento $d\vec{r}$.

d) El trabajo neto realizado por todas las fuerzas sobre la niña es cero:

$$W_{neto} = W_F + W_g + W_T = mgh - mgh + 0 = 0$$

Este resultado es congruente con el hecho de que la fuerza neta es cero.

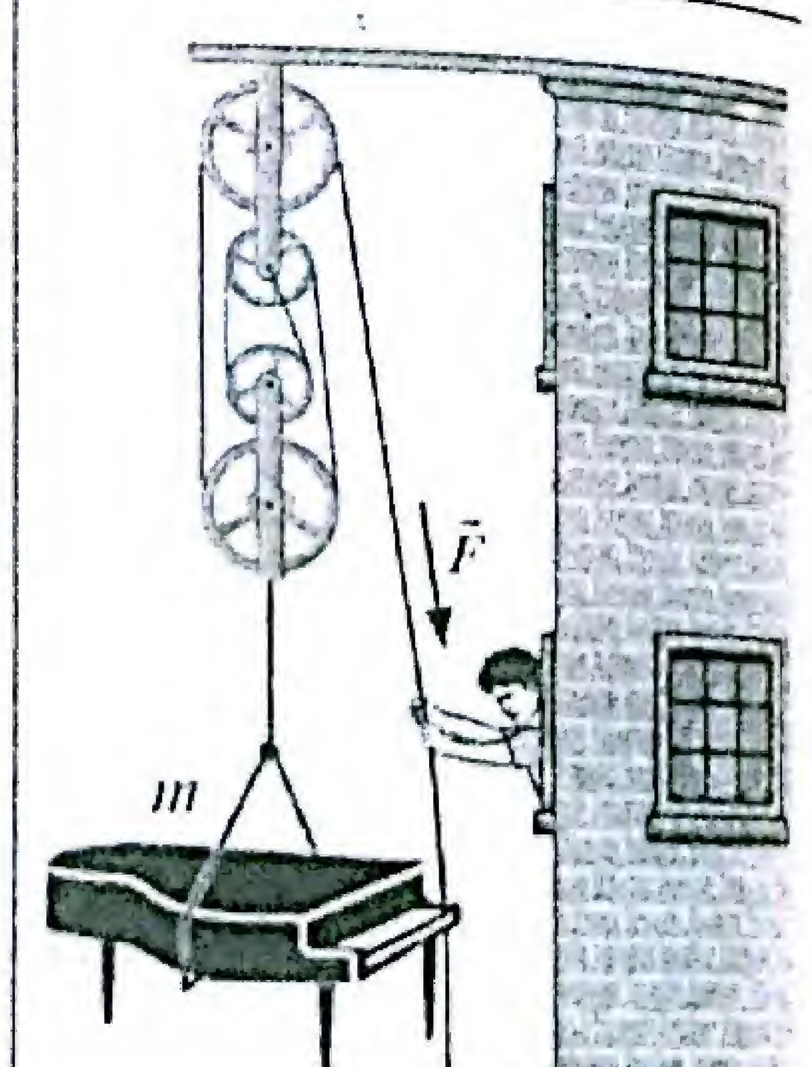
Respuesta:

a) $W_F = +mgh$
b) $W_g = -mgh$
c) $W_T = 0$, d) $W_{neto} = 0$

PR-3.14. *Sacando ventaja mecánica con cuatro poleas*

Durante una mudanza, un piano de masa m = 190 kg no cabe ni por el ascensor ni por la escalera del edificio. Para poder subirlo hasta su apartamento ubicado a una altura h = 18 m, un estudiante emplea el sistema de poleas mostrado. Se desprecia la masa de las poleas y la cuerda y también el rozamiento en las poleas.

a) ¿Cuál es la mínima fuerza que debe aplicar?
b) ¿Cuál es el trabajo hecho por la cuerda sobre el piano?
c) ¿Qué longitud de cuerda debe jalar el estudiante?
d) ¿Cuál es el trabajo que realiza el estudiante?
e) ¿Cuál es la ventaja mecánica de este mecanismo?



Solución: La tensión de la cuerda es la misma a lo largo de toda su extensión y cuando se jala con una fuerza F, la cuerda jala hacia arriba al sistema inferior de poleas con la misma fuerza en cuatro puntos, por lo tanto, la fuerza neta que se le aplica es $4F$. Esta fuerza debe justamente equilibrar el peso del piano para elevarlo a velocidad constante.

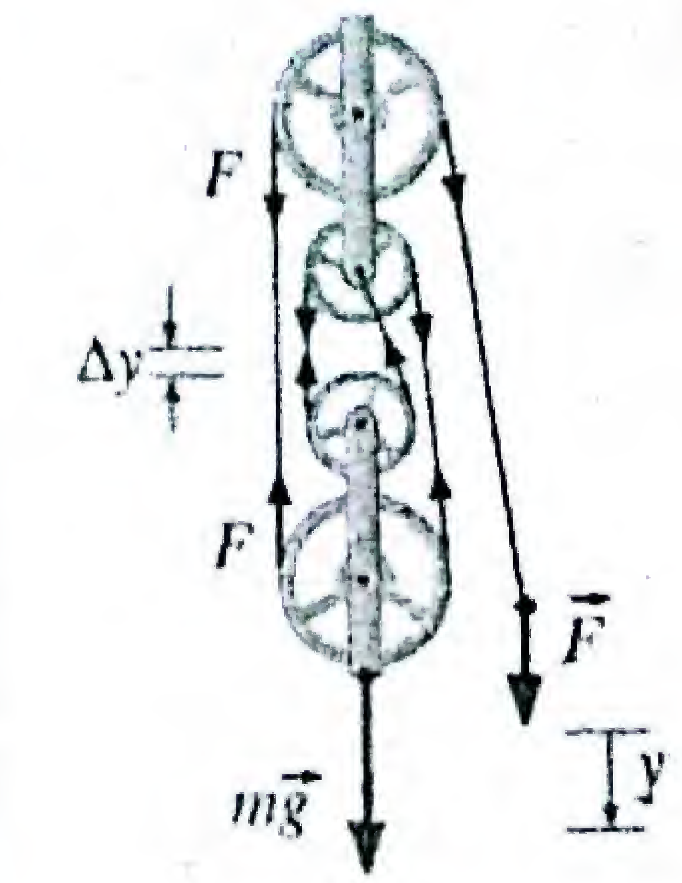
$$4F = Mg \quad \Rightarrow \quad F = Mg/4 = (190\text{kg})(9{,}8\text{m/s}^2)/4 = 465{,}5 \text{ N}$$

b) El trabajo que realiza la cuerda sobre el piano es:

$$W = 4Fh = mgh = (190\text{kg})(9{,}8\text{m/s}^2)(18\text{m}) = 33516 \text{ J}$$

c) Para cada desplazamiento Δy del piano hacia arriba, cada cuerda que sostiene el juego inferior de poleas se acorta en Δy y así el extremo libre de la cuerda ha sido desplazado en $4\Delta y$. Por lo tanto, hay que jalar la cuerda una longitud total:

$$L = 4(18\text{m}) = 72 \text{ m}$$



d) El trabajo hecho por el estudiante cuando jala la cuerda es:

$$W = FL = (465{,}5 \text{ N})(72\text{m}) = 33516 \text{ J}$$

e) El sistema de poleas permite levantar un peso, aplicando una fuerza cuatro veces menor que la que tuviésemos que aplicar para levantarlo directamente. Como el trabajo de entrada coincide con el de salida, el precio que se paga por la reducción de la fuerza es el aumento de la distancia en que se debe aplicar dicha fuerza.

Recibe el nombre de *ventaja mecánica teórica (VMT)* la relación entre el peso levantado y la fuerza aplicada. En este caso, tenemos:

$$VMT = Mg/F = 4$$

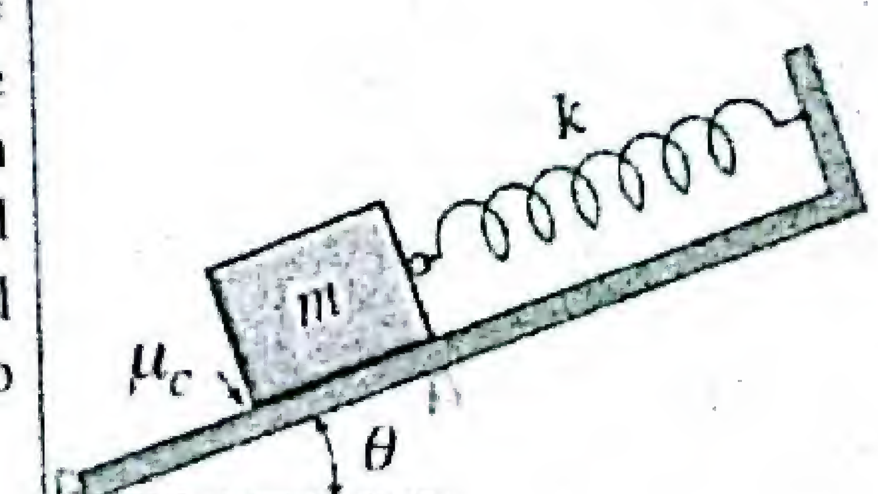
Respuesta:

a) F = 465,5 N
b) W = 33516 J
c) L = 72 m
d) W = 33516 J
e) VMT = 4

PR-3.15. *Bloque que desliza atado a un resorte*

Un bloque de masa m está atado a un resorte de constante elástica k, el cual está fijo en lo alto de un plano de ángulo de inclinación θ. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano inclinado es μ_c. El bloque parte del reposo desde la posición en que el resorte tiene su longitud normal, y desliza por el plano inclinado. Determine:

a) La velocidad del bloque al deslizar una distancia d.
b) La máxima extensión que alcanza el resorte.



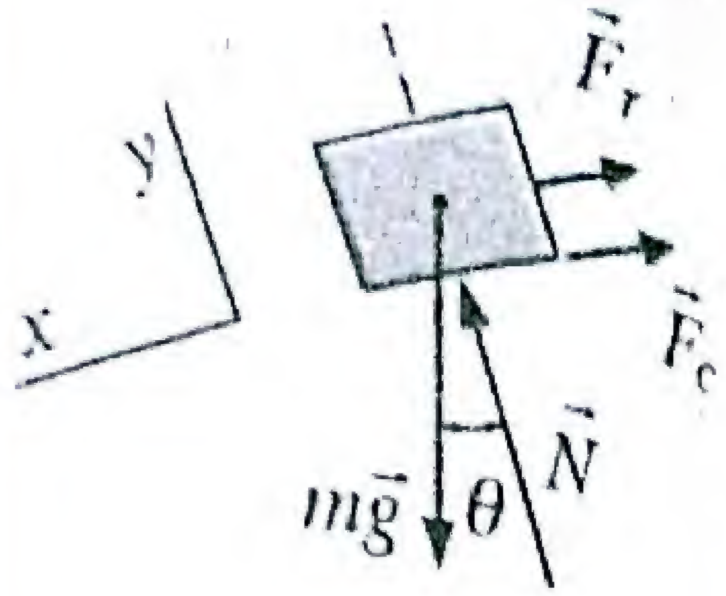
Solución: a) En la figura se muestran las fuerzas que se ejercen sobre el bloque en movimiento. Los trabajos efectuados por cada una de las diferentes fuerzas son:

Para la fuerza normal: $W_N = \vec{N} \bullet \vec{d} = 0$

Para la fuerza del resorte: $W_r = \vec{F}_r \bullet \vec{d} = -\frac{1}{2}kd^2$

Para la fricción: $W_c = \vec{F}_c \bullet \vec{d} = -\mu_c mgd\cos\theta$

Para la gravedad: $W_g = m\vec{g} \bullet \vec{d} = +mgd\,sen\theta$



El trabajo neto efectuado sobre el bloque es:

$$W_{neto} = W_N + W_r + W_c + W_g$$

$$W_{neto} = mgd(sen\theta - \mu_c \cos\theta) - \frac{1}{2}kd^2$$

Por el teorema del trabajo-energía: $W_{neto} = K - K_i$, tenemos:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = mgd(sen\theta - \mu_c\cos\theta) - \frac{1}{2}kd^2$$

por lo tanto, la velocidad del bloque es:

$$v = \sqrt{2gd(sen\theta - \mu_c\cos\theta) - \frac{kd^2}{m}}$$

b) El bloque se detiene (v = 0) cuando el resorte alcanza su máximo estiramiento, el cual se obtiene de la expresión anterior:

$$d_{max} = \frac{2mg}{k}(sen\theta - \mu_c\cos\theta)$$

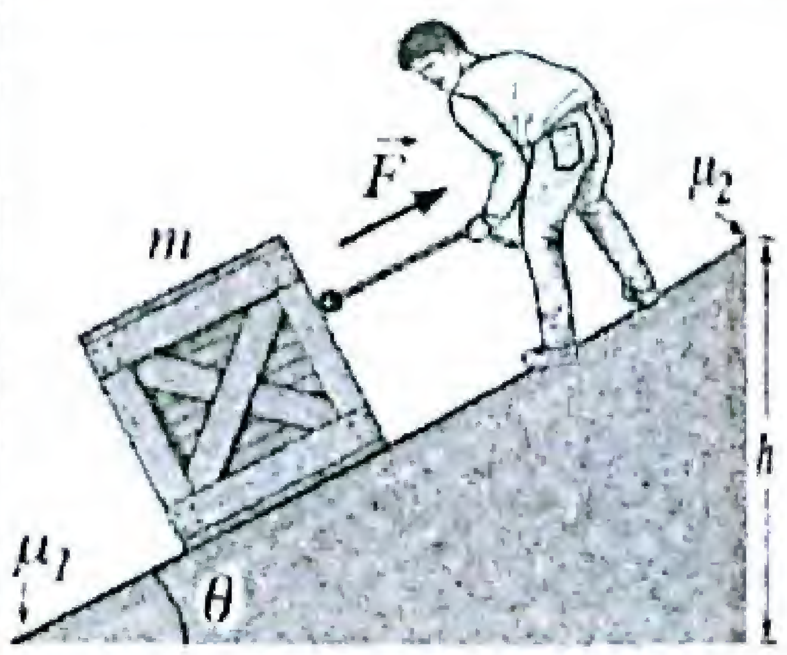
Respuesta:

a) $v = \sqrt{2gd(sen\theta - \mu_c\cos\theta) - \frac{kd^2}{m}}$

b) $d_{max} = \frac{2mg}{k}(sen\theta - \mu_c\cos\theta)$

PR-3.16. *Trabajo en pendiente de rozamiento variable*

Se sube lentamente un bloque de masa m = 2 kg por una pendiente de ángulo θ = 36,9° y altura h = 5 m.
El coeficiente de fricción cinética entre el objeto y la superficie aumenta linealmente desde un valor μ_1 = 0,25 hasta un valor μ_2 = 0,50. Halle el trabajo realizado.

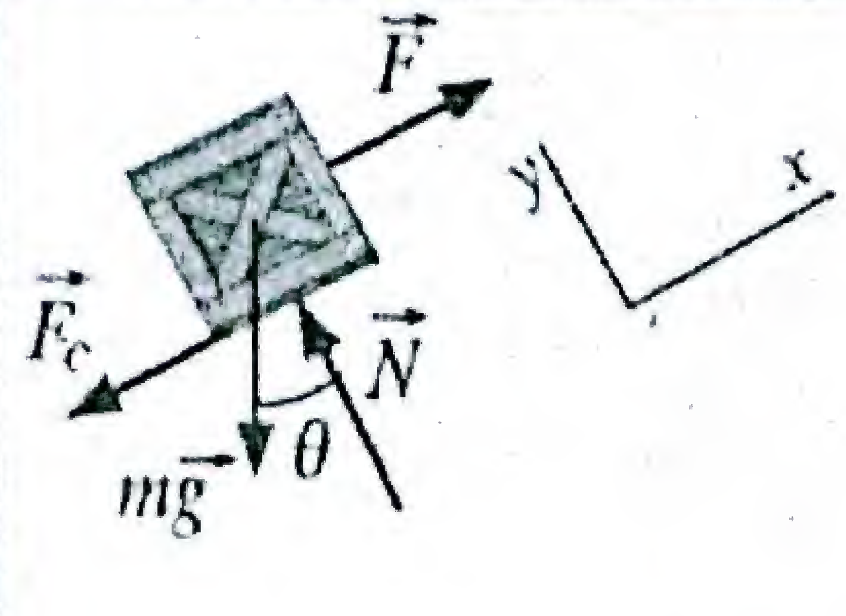


Solución: Como el bloque sube a velocidad constante, las ecuaciones de equilibrio son:

$$\sum F_x = F - mg\,sen\theta - \mu_c N = 0 \Rightarrow F = mg\,sen\theta + \mu_c N$$

$$\sum F_y = N - mg\cos\theta = 0 \Rightarrow N = mg\cos\theta$$

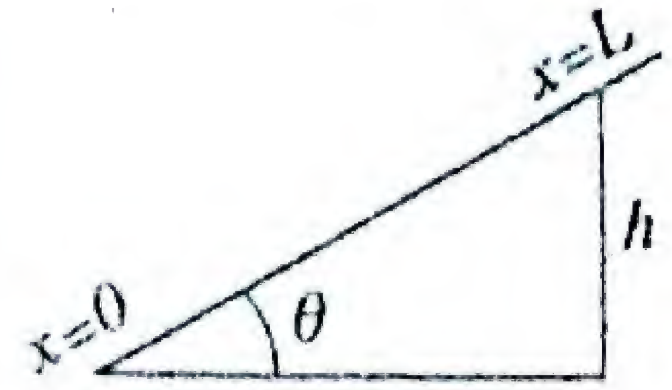
Combinando estas ecuaciones, hallamos la fuerza aplicada: $F = mg\,sen\theta + \mu_c(x)mg\cos\theta$



El coeficiente de fricción cinética está dado por la expresión:

$$\mu_c(x) = \mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)\frac{x}{L}$$

Usando esta expresión, calculamos el trabajo realizado:



$$W = \int \vec{F} \bullet d\vec{x} = \int F dx$$

$$W = \int_0^L [mg\,sen\theta + (\mu_1 + (\mu_2 - \mu_1)\frac{x}{L})mg\cos\theta]dx$$

$$W = [mg(sen\theta + \mu_1\cos\theta)x + mg(\mu_2 - \mu_1)\cos\theta\frac{x^2}{2L}]_0^L$$

$$W = mgL[(sen\theta + \mu_1\cos\theta) + \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1)\cos\theta]$$

Como $L\,sen\theta = h$, obtenemos la expresión para el trabajo:

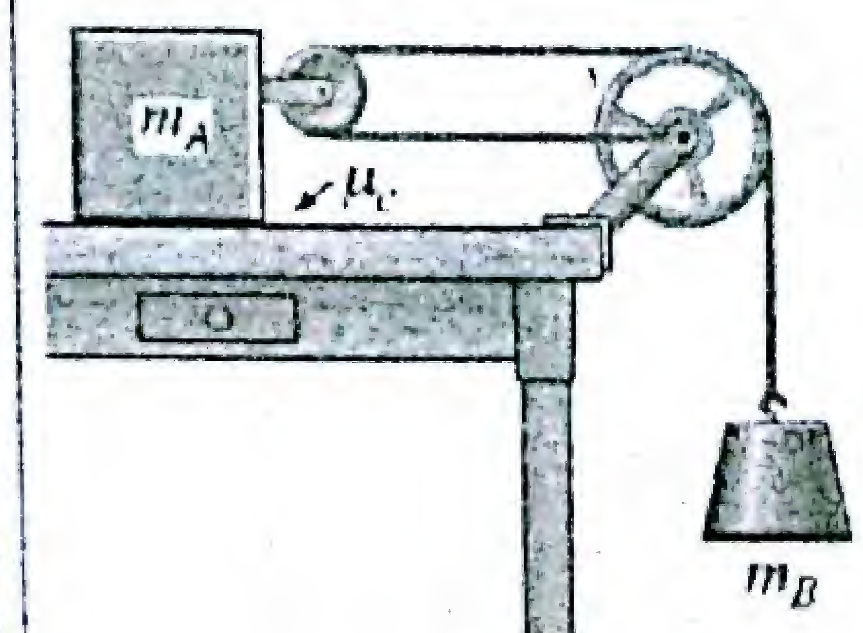
$$W = mgh[1 + \frac{\mu_2 + \mu_1}{2}ctg\theta] = 147 \text{ J}$$

Respuesta:

$W = mgh[1 + \frac{\mu_2 + \mu_1}{2}ctg\theta]$

PR-3.17. *Velocidad de descenso a partir de la energía*

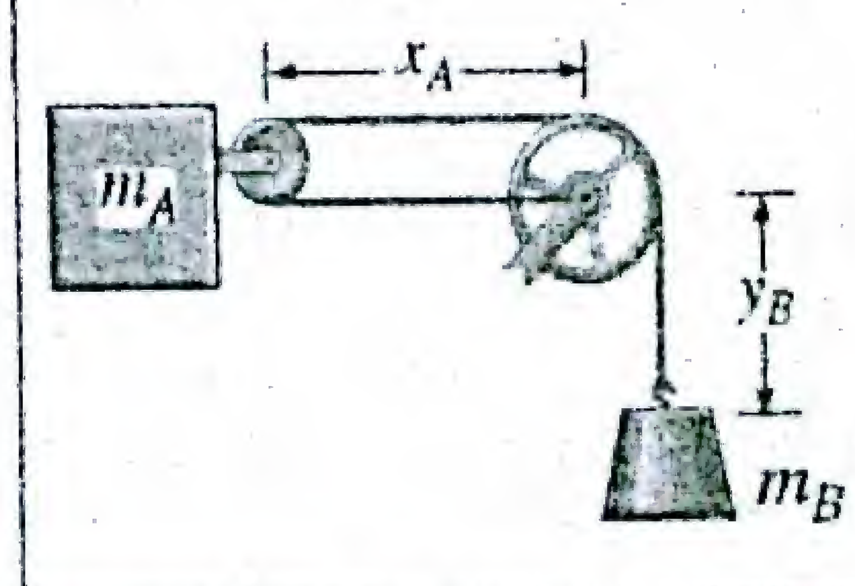
En una superficie horizontal se encuentra un bloque de masa m_A = 4 kg acoplado a una pesa de masa m_B = 2 kg, la cual está suspendida mediante el sistema de poleas mostrado. Las poleas son de masas despreciables y el coeficiente de fricción cinética entre el bloque m_A y la superficie es μ_c = 0,2. Si el sistema parte del reposo, determine la velocidad de la pesa m_B cuando ésta ha descendido una distancia de 15 cm.



Solución: Como la cuerda tiene una longitud constante:

$$2x_A + y_B = L \quad \Rightarrow \quad 2\Delta x_A + \Delta y_B = 0$$

Por lo tanto, $2|x_A| = |y_B|$ y las velocidades guardan la relación: $2|v_A| = |v_B|$. El trabajo efectuado sobre el bloque es:



$$W_A = \vec{F}_A \bullet \vec{d}_A = (2T - F_c)d_A = (2T - \mu_c m_A g)d_A$$

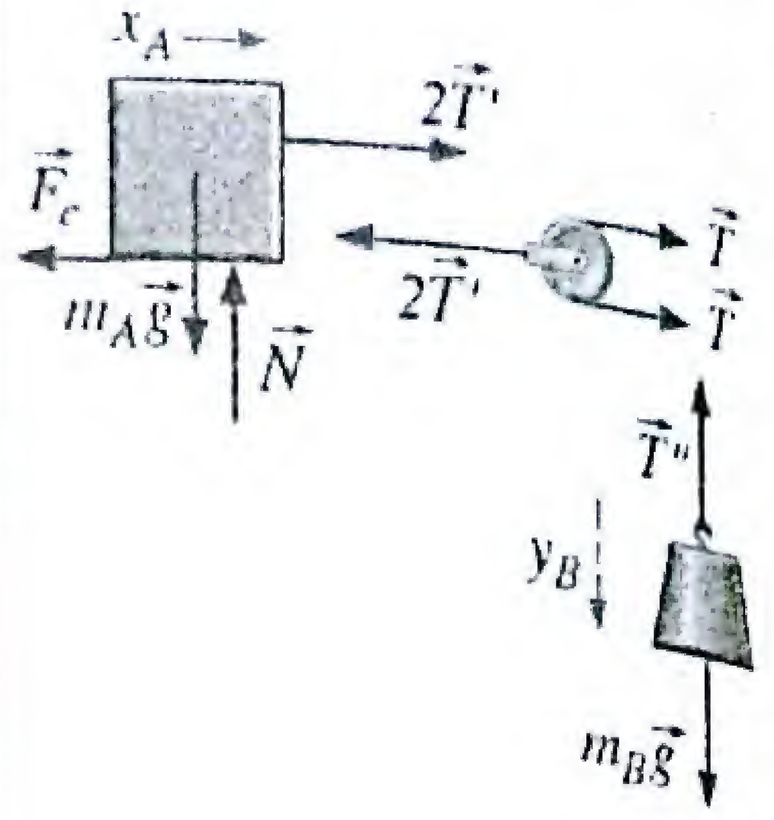
y el trabajo efectuado sobre la pesa:

$$W_B = \vec{F}_B \bullet \vec{d}_B = (m_B g - T)d_B$$

Tomando en cuenta que $d_B = 2d_A$, el trabajo neto es:

$$W_{neto} = W_A + W_B = (2T - \mu_c m_A g)\frac{d_B}{2} + (m_B g - T)d_B$$

$$W_{neto} = (m_B g - \frac{1}{2}\mu_c m_A g)d_B$$



Por el teorema del trabajo y la energía ($W_{neto} = K_f - K_i$), y tomando en cuenta que el sistema parte del reposo, tenemos:

$$(m_B g - \frac{1}{2}\mu_c m_A g)d_B = K_f = \frac{1}{2}m_A v_A^2 + \frac{1}{2}m_B v_B^2$$

$$(m_B g - \frac{1}{2}\mu_c m_A g)d_B = \frac{v_B^2}{8}(m_A + 4m_B)$$

Despejando y sustituyendo los valores numéricos, se obtiene la velocidad de la pesa m_B.

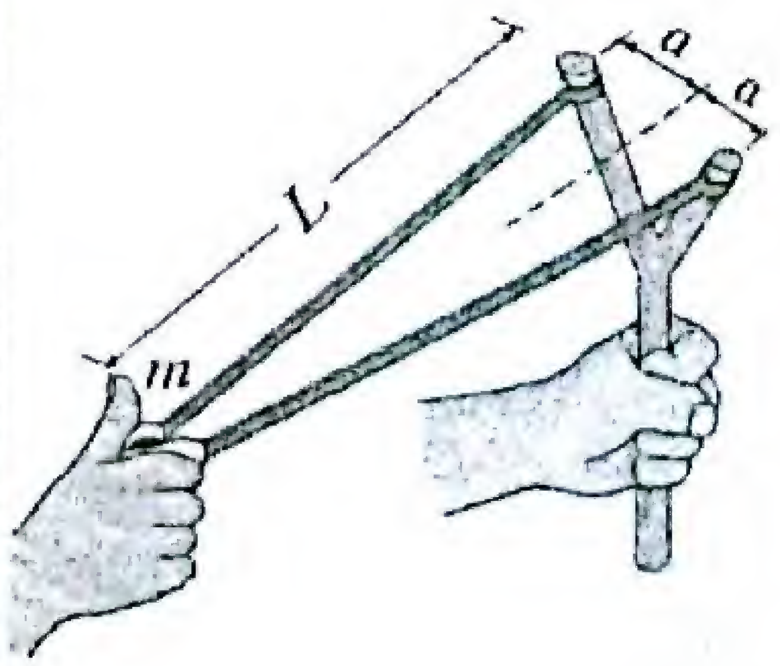
$$v_B = \sqrt{\frac{(8m_B - 4\mu_c m_A)gd_B}{m_A + 4m_B}} = 1{,}25\text{m/s}$$

Respuesta:

$$\boxed{v_B = 1{,}25\text{m/s}}$$

PR-3.18. *Lanzando una piedra con una honda*

La honda (o china) es un dispositivo sencillo que en épocas pasadas era el favorito de los niños para lanzar proyectiles. Consiste de un par de bandas de goma que van amarradas a una horqueta de palo y a una funda de cuero; en esta última va colocado el proyectil. La longitud natural de cada goma es L_o y la distancia entre las puntas de los palos es $2a$. Suponga que la tensión de la goma es proporcional a su estiramiento, siendo k la constante de proporcionalidad (ley de Hooke). Halle la velocidad de lanzamiento de una piedra de masa m si la honda es estirada una distancia b.



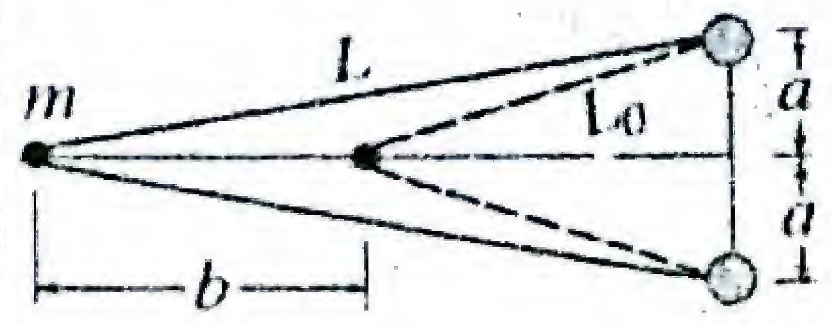
Solución: Para cada banda de goma la fuerza elástica es: $F_e = k(L - L_0)$ y el trabajo total realizado por las dos es:

$$W_e = 2[\frac{1}{2}k(L - L_0)^2]$$

Si despreciamos las masas de las bandas de goma, este trabajo será igual a la energía cinética que adquiere la piedra ($W_e = \Delta K$).

$$k(L - L_0)^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

Despejando la velocidad: $$v = \sqrt{\frac{2k}{m}}(L - L_0)$$



De los triángulos dibujados en la figura se obtiene:

$$L^2 = (b + \sqrt{L_0^2 - a^2})^2 + a^2 = L_0^2 + b^2 + 2b\sqrt{L_0^2 - a^2}$$

$$(L - L_0) = \sqrt{L_0^2 + b^2 + 2b\sqrt{L_0^2 - a^2}} - L_0$$

Por lo tanto, la velocidad de la piedra es:

$$v = \sqrt{\frac{2k}{m}}[\sqrt{L_0^2 + b^2 + 2b\sqrt{L_0^2 - a^2}} - L_0]$$

Respuesta

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{2k}{m}} \times [\sqrt{L_0^2 + b^2 + 2b\sqrt{L_0^2 - a^2}} - L_0]}$$

PR-3.19. *Cuidado que la pistola está armada*

Una pistola de juguete que usa un resorte de masa despreciable y constante elástica k = 500 N/m, permite disparar proyectiles de masa m = 0,010 kg. El resorte es comprimido en una distancia x_0 = 4 cm y cuando se libera el gatillo, el proyectil recorre esta misma distancia en el cañón, encontrando una fuerza de fricción constante F = 5 N, antes de perder contacto con el resorte.

a) Determine la velocidad de salida del proyectil.

b) ¿En qué posición alcanzará el proyectil la máxima velocidad mientras es impulsado por el resorte?

c) ¿Cual será la máxima velocidad del proyectil?

Solución: a) La fuerza que aplica el resorte disminuye linealmente a cero desde su valor máximo: $kx_0 = (500)(0{,}04) = 20\text{N}$ realizando un trabajo positivo. La fuerza de fricción cinética constante F_c = 5N realiza un trabajo negativo. Si aplicamos el teorema del trabajo y la energía:

$$W_r + W_c = \frac{1}{2}kx_0^2 - F_c x_0 = \frac{1}{2}mv^2$$

La velocidad de salida del proyectil es:

$$v = \sqrt{\frac{kx_0^2 - 2F_c x_0}{m}} = \sqrt{\frac{500(0{,}04)^2 - 2(5\text{N})(0{,}04)}{0{,}01}} = 6{,}32\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

b) La velocidad máxima se alcanza cuando su energía cinética es máxima:

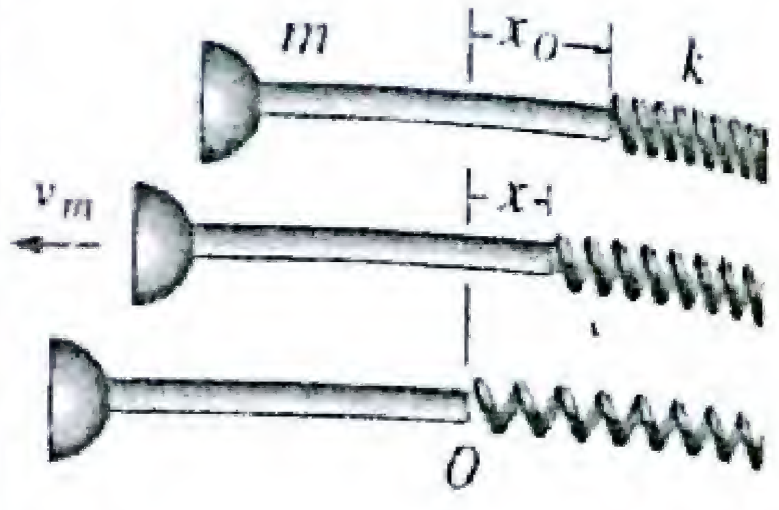
$$K(x)=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}kx^2-F_c x$$

El máximo de esta función ocurre cuando su derivada es cero:

$$\frac{d}{dx}K(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}kx^2-F_c x\right)=kx-F_c=0$$

Es decir, en la posición en que la fuerza neta sobre el proyectil se anula:

$$kx=F_c \qquad \Rightarrow \qquad x=\frac{5\text{N}}{500\text{N/m}}=0{,}01\text{m}$$



c) Aplicando el teorema del trabajo-energía entre las posiciones inicial: $x_0=0{,}04$m e intermedia: $x=0{,}01$m:

$$W_r+W_c=\frac{1}{2}k(x_0^2-x^2)-F_c(x_0-x)=\frac{1}{2}mv_m^2$$

La velocidad máxima en ese punto del recorrido es:

$$v_m=\sqrt{\frac{k(x_0^2-x^2)-2F(x_0-x)}{m}}=6{,}71\text{ m/s}$$

Respuesta

a) $v=6{,}32$ m/s
b) $x=0{,}01$ m.
c) $v_m=6{,}71$ m/s

PP-3.20. *Si la potencia del motor fuera constante*

Un carro de masa m parte del reposo y se acelera en línea recta de forma tal que la potencia que suministra el motor a las ruedas es mantenida en un valor constante, P. Determine en función del tiempo:
a) su velocidad, b) su aceleración y c) la distancia recorrida.

Solución: a) La expresión para la potencia es:

$$P=Fv=(ma)v=m\left(\frac{dv}{dt}\right)v$$

$$Pdt=mvdv$$

Integrando, se obtiene:

$$\int Pdt=\int mvdv \qquad \Rightarrow \qquad Pt=\frac{1}{2}mv^2+C$$

Como $v=0$ en el instante inicial $t=0$, la constante C es cero y por lo tanto la velocidad del carro es:

$$v=\sqrt{\frac{2P}{m}t}$$

b) La aceleración es la derivada de la velocidad:

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\sqrt{\frac{2P}{m}t}=\sqrt{\frac{2P}{m}}\frac{d}{dt}t^{1/2}=\sqrt{\frac{P}{2mt}}$$

c) La posición se obtiene de la integral de la velocidad:

$$v=\frac{dx}{dt}=\sqrt{\frac{2P}{m}t}$$

$$x=\sqrt{\frac{2P}{m}}\int t^{1/2}dt+C=\sqrt{\frac{2P}{m}}\frac{2}{3}t^{3/2}+C$$

Si en el instante inicial $t=0$, la posición es $x=x_0$, por lo tanto, la constante de integración es $C=x_0$ y se obtiene:

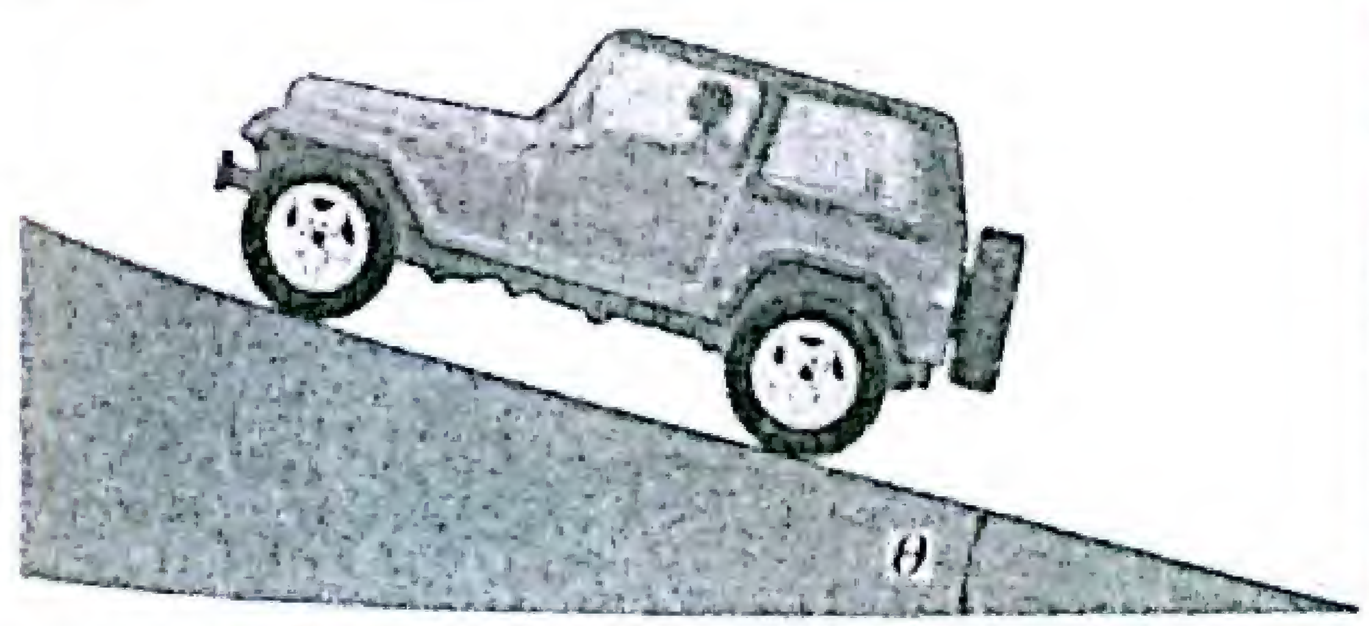
$$x(t)=x_0+\sqrt{\frac{8P}{9m}}t^{3/2}$$

Respuesta

a) $v=\sqrt{\frac{2P}{m}t}$,
b) $a=\sqrt{\frac{P}{2mt}}$,
c) $x=x_0+\sqrt{\frac{8P}{9m}}t^{3/2}$

PR-3.21. *Para subir la cuesta se necesita mas potencia*

En una carretera horizontal, un carro de masa m = 1000 kg requiere desarrollar una potencia de 10 hp (P = 7460 J/s) para marchar a la velocidad constante de 72 km/h (v = 20 m/s).



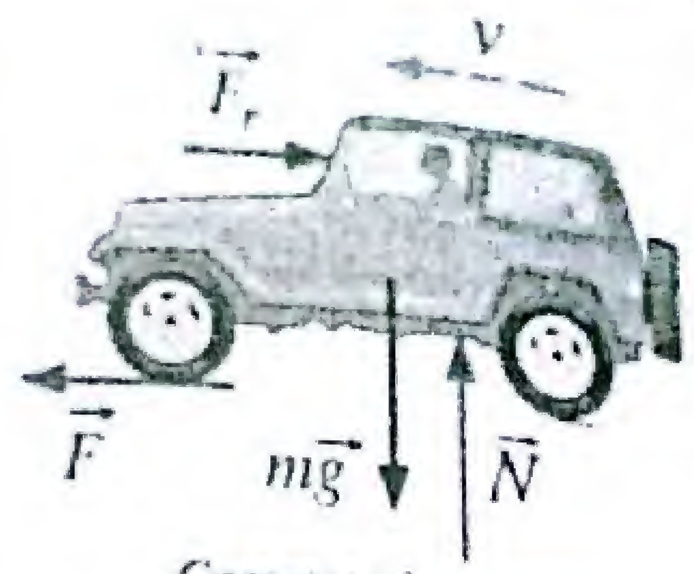
¿Qué potencia debe desarrollar el motor del carro para subir con igual velocidad una cuesta con una pendiente del 18 %?

Suponga que en ambos casos se mantienen las mismas fuerzas de resistencia de rodadura y de fricción con el aire.

10 hp — 7460 J/s

Solución: Lo que impulsa al carro hacia adelante es la fuerza de fricción, $\vec{F}$, que ejerce el suelo como reacción a la fuerza que las ruedas aplican sobre éste, cuando el motor las hace girar.

Si el carro se traslada en una carretera horizontal a velocidad constante la fuerza neta es cero, y $\vec{F}$ justamente equilibra a la fuerza total de rozamiento, $\vec{F}_r$, que es la suma de la fuerza de la resistencia de rodadura por achatamiento de las ruedas y la resistencia que ofrece el aire.



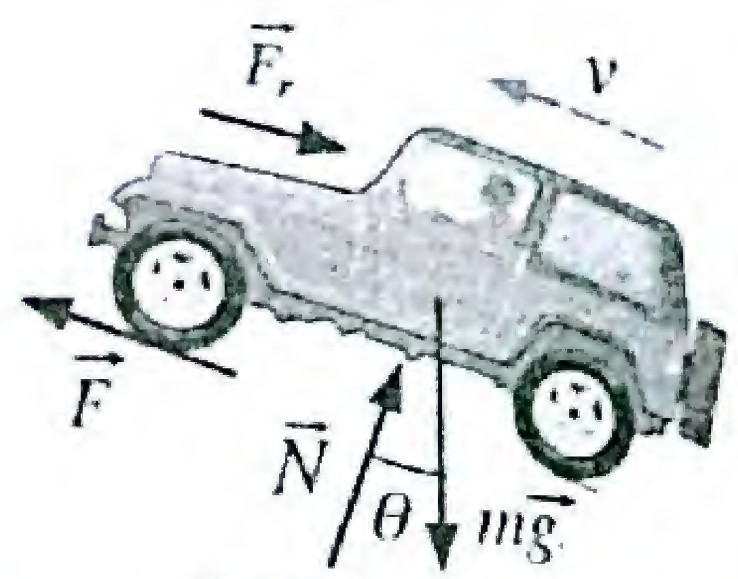
Carretera horizontal

La fuerza total de rozamiento se obtiene a partir de la potencia suministrada a las ruedas:

$$P_r = \vec{F}_r \bullet \vec{v} = F_r v \quad \Rightarrow \quad F_r = \frac{P_r}{v} = \frac{7460J}{20m/s} = 373N$$

En el segundo caso, el carro debe subir la cuesta a una velocidad constante, v y la fuerza de tracción, $\vec{F}$ tiene que vencer a la fuerza resultante del rozamiento $\vec{F}_r$ (igual que en el caso anterior) mas la componente del peso paralela a la carretera:

$$F = F_r + mgsen\theta$$

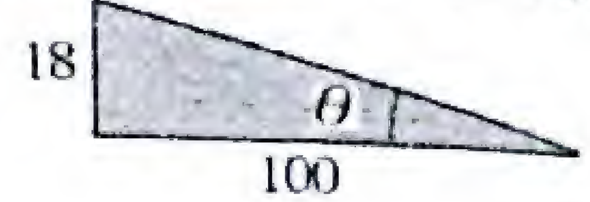


Carretera inclinada

La potencia que hay que suministrar a las ruedas será:

$$P = \vec{F} \bullet \vec{v} = (F_r + mgsen\theta)v$$

$tg\theta = 18/100 \quad \Rightarrow \quad \theta = 10,2°$



Siendo el ángulo de inclinación: $\theta = arct(18/100) = 10,2°$. Reemplazando los valores numéricos, se obtiene:

$$P = 4,22x10^4\,W = \frac{4,22x10^4\,W}{746W/hp} = 56,5hp$$

La potencia requerida para subir la cuesta es 5,65 veces mayor que en la carretera plana.

Respuesta:

$$\boxed{P = 5,65P_o = 56,5hp}$$

PR-3.22. *Ciclista desciende por pendiente sin pedalear*

a) Un ciclista, cuya masa (incluida la bicicleta) es m = 60 kg corre por una carretera plana, y a su movimiento se opone una fuerza de rozamiento (fricción del aire, etc,..) que depende del cuadrado de la velocidad:

$$F_r = 0,15v^2$$

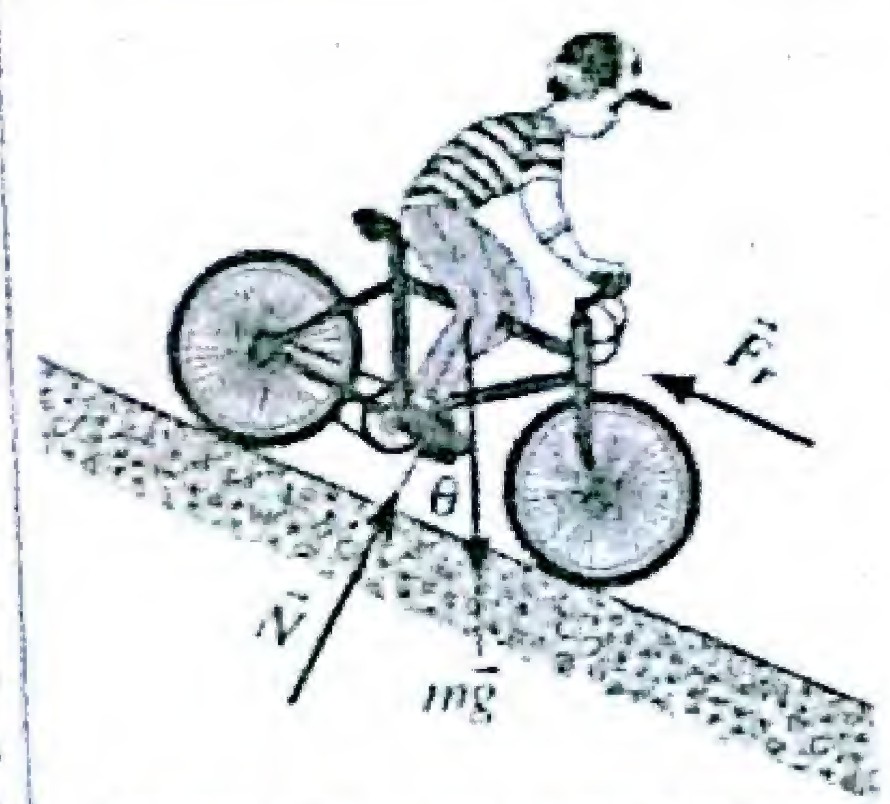
Determine la potencia que debe desarrollar el ciclista para moverse a una velocidad v = 36 km/h (10 m/s).

b) Suponga ahora que el ciclista desciende sin pedalear una pendiente tal que por cada 100 metros de carretera hay un desnivel de 8 m, ¿cuál será la velocidad límite que alcanza?

Solución: a) Para moverse a velocidad constante la fuerza neta debe ser cero, y por lo tanto la fuerza de tracción debe ser de igual magnitud que la fuerza de rozamiento. La potencia requerida es:

$$p = \vec{F} \bullet \vec{v} = F_r v = (0.15v^2)v = 0.15v^3 = 0.15(10)^3 = 150W$$

b) A medida que el ciclista desciende sin pedalear, su velocidad se va incrementando debido a la componente del peso en la dirección del plano inclinado, y con ello aumenta la fuerza de resistencia que tiende a frenarlo. La velocidad límite se alcanza cuando la fuerza de resistencia es igual a la componente del peso:



Bajando la cuesta sin pedalear

$$F_r = 0,15v^2 = mgsen\theta$$

La velocidad límite será:

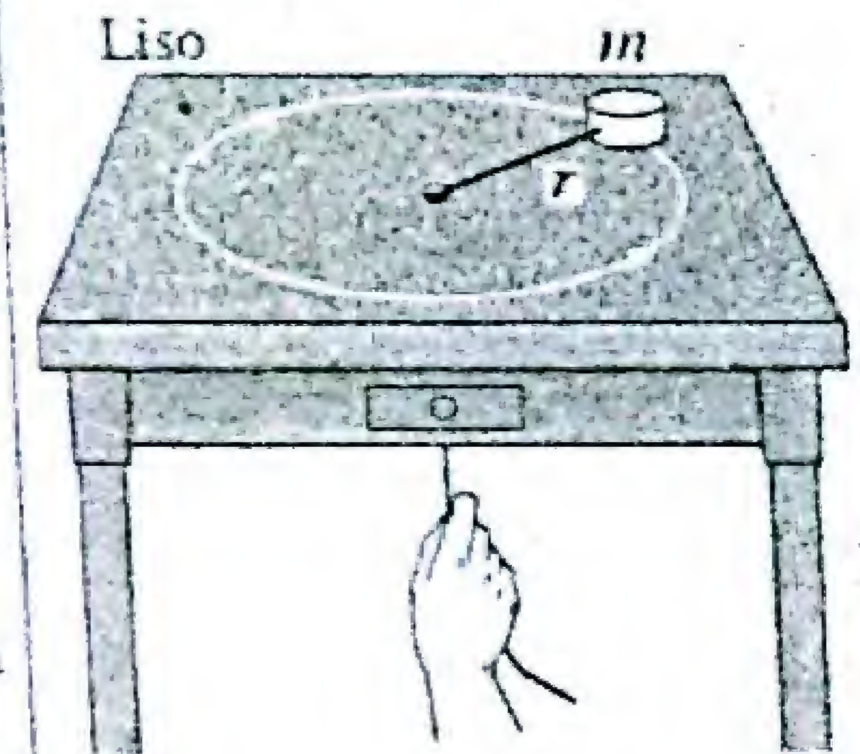
$$v = \sqrt{\frac{mgsen\theta}{0,15}} = \sqrt{\frac{(60kg)(9,8m/s^2)8}{0,15(100)}} = v = 17,7m/s$$

Respuesta:

a) $P = 150W$ (0,2 hp)
b) $v = 17,7m/s$ (64 km/h)

PR-3.23. *Disco girando sobre una mesa sin fricción*

Un disco de masa m = 1,2 kg está sujeto a un hilo que pasa por un agujero en una mesa horizontal sin fricción. El disco está inicialmente girando una distancia r_i = 0,60 m del agujero con una rapidez v_i = 1 m/s. Luego se jala la cuerda acortando el radio del círculo a una distancia r_2 = 0,20 m, en la cual el disco gira a una rapidez v_2= 3 m/s.
a) ¿Cuál es la tensión de la cuerda en la situación inicial?
b) ¿Cuál es la tensión de la cuerda en la situación final?
c) Halle el trabajo realizado por la persona que jala la cuerda.



Solución: a) La tensión T de la cuerda suministra la aceleración centrípeta del disco. En la situación inicial:

$$T_1 = ma_1 = \frac{mv_1^2}{r_1} = \frac{(1,2kg)(1m/s)^2}{(0,6m)} = 2N$$

b) En la situación final:

$$T_2 = ma_2 = \frac{mv_2^2}{r_2} = \frac{(1,2kg)(3m/s)^2}{(0,2m)} = 54N$$

c) Como la superficie es horizontal, el trabajo realizado tanto por la fuerza de gravedad como por la fuerza normal, son nulos. Además, la superficie es lisa y por lo tanto la fuerza de fricción tampoco realiza trabajo. De manera que la variación de la energía cinética del disco es debida al trabajo de la tensión de la cuerda, es decir, al trabajo realizado por la persona que jala la cuerda:

$$W_{12} = K_2 - K_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$W_{12} = \frac{1}{2}(1{,}2\text{kg})(3\text{m/s})^2 - \frac{1}{2}(1{,}2\text{kg})(1\text{m/s})^2 = 4{,}80\text{J}$$

Observe que durante la transición del estado inicial al estado final, la tensión de la cuerda no puede permanecer perpendicular a la velocidad del bloque. Para que el radio de la circunferencia cambie, el disco debe tener una componente no nula de su velocidad en la dirección radial y su trayectoria es una espiral.

Respuesta:

a) $T_1 = 2$ N
b) $T_2 = 54$ N
c) $W = 4{,}80$ J

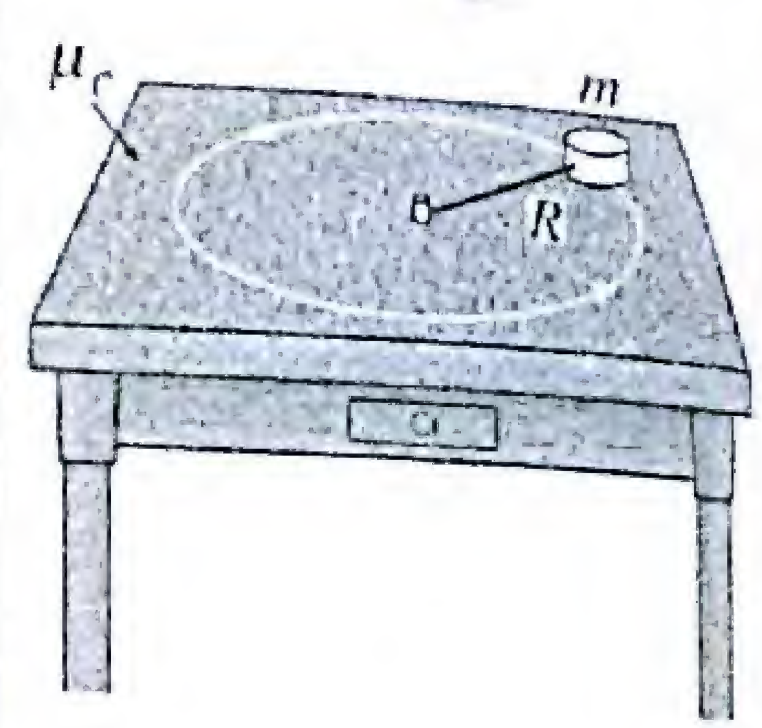
PR-3.24. *Disco dando vueltas en una mesa rugosa*

Una disco pequeño de masa m = 1 kg se mueve en un círculo horizontal de radio R = 0,5 m sobre una mesa rugosa. El disco está sujeto a una cuerda fija en el centro del círculo. Inicialmente su velocidad es 4 m/s y después de haber completado una vuelta su velocidad se ha reducido a 2 m/s.

a) ¿Cuál es el trabajo realizado por la fuerza de fricción durante una vuelta?

b) Determine el coeficiente de fricción cinética μ_c.

c) ¿Cuántas vueltas adicionales dará antes de detenerse?



Solución: a) El trabajo realizado por la fuerza de fricción cinética durante una vuelta se obtiene aplicando el teorema del trabajo y la energía:

$$W_c = \Delta K = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$W_c = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) = \frac{1}{2}1\text{kg}[(2\text{m/s})^2 - (4\text{m/s})^2] = -6\text{J}$$

b) La fuerza de fricción es tangencial al camino circular del disco y la magnitud del trabajo realizado es: $W_c = F_c\, 2\pi R = (\mu_c mg)2\pi R$, y el coeficiente de fricción cinética es:

del disco y la magnitud del trabajo realizado es: $W_c = F_c 2\pi R = (\mu_c mg)2\pi R$, y el coeficiente de fricción cinética es:

$$\mu_c = \frac{W_c}{2\pi mgR} = \frac{6\text{J}}{2\pi(1\text{kg})(9{,}8\text{m/s}^2)(0{,}5\text{m})} = 0{,}195$$

c) El número N de vueltas adicionales que dará el disco antes de detenerse, se obtiene de:

$$N(\mu_c mg)2\pi R = \frac{1}{2}mv_2^2$$

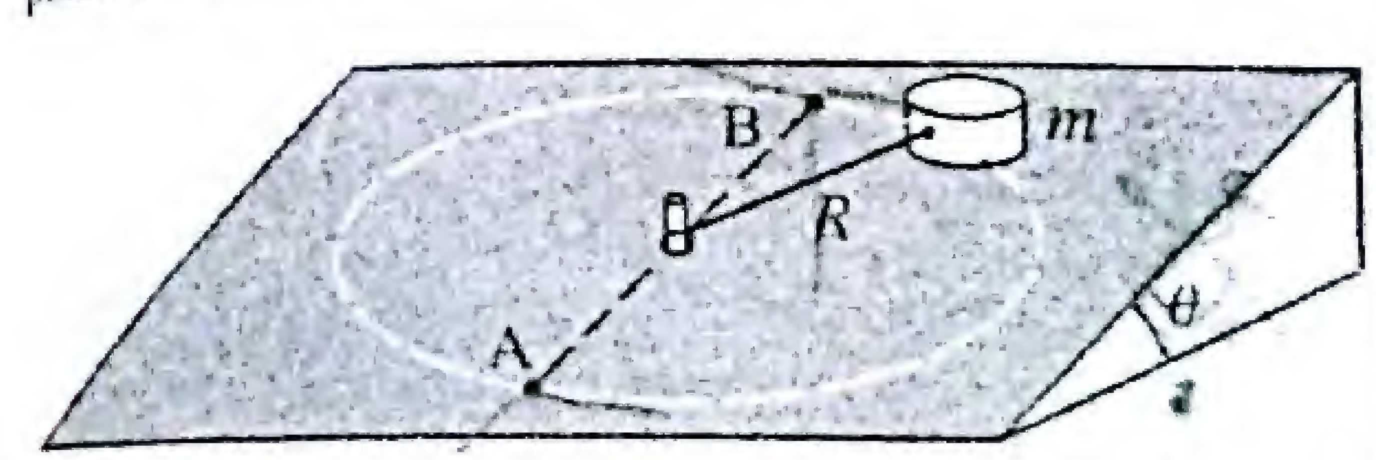
$$N = \frac{v_2^2}{4\pi R\mu_c g} = \frac{(2\text{m/s})^2}{4\pi(0{,}5\text{m})(0{,}195)(9{,}8\text{m/s}^2)} = 0{,}33$$

Respuesta

a) $W_c = -6$J, b) $\mu_c = 0{,}19$
c) $N = 0{,}33$ vueltas

PR-3.25. *Girando en un plano inclinado con rozamiento*

Un disco de masa m = 3 kg está amarrado a una cuerda de longitud R = 1 m y gira alrededor de un clavo, sobre un plano inclinado a un ángulo $\theta = 36{,}9°$.



El coeficiente de fricción cinética entre el disco y el plano es μ_c = 0,20. En un cierto instante el disco pasa por el punto A con una velocidad v_A = 10 m/s. Halle:

a) la velocidad con que el disco pasará por el punto B.

b) la velocidad con que el disco pasará de nuevo por el punto A.

Solución: a) La fuerza de rozamiento cinético es tangencial a la trayectoria circular y el trabajo que realiza entre A y B es:

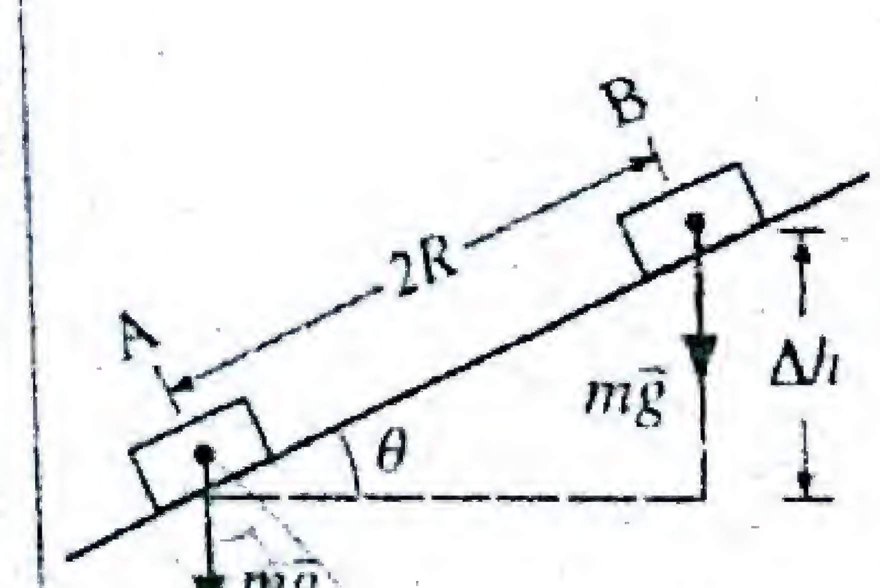
$$W_c = -F_c d = -(\mu_c N)(\pi R) = -\mu_c mg\pi R\cos\theta$$

El incremento de altura desde A hasta B es: $\Delta h = h_2 - h_1 = 2R sen\theta$, y la fuerza de gravedad realiza un trabajo negativo:

$$W_g = -mg\Delta h = -2mgR sen\theta$$

Aplicando el teorema del trabajo y la energía ($W_{neto} = \Delta K$), tenemos:

$$W_{AB} = -\mu_c mg\pi R\cos\theta - 2mgR sen\theta = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$



Por lo tanto el disco pasa por el Punto B con una velocidad:

$$v_B = \sqrt{v_A^2 - 2Rg(\mu_c \pi \cos\theta + 2 sen\theta)} = 8,16 \text{ m/s}$$

b) Si el disco regresa al mismo punto A, la gravedad no realiza trabajo neto ($W_g = 0$). El trabajo de la fuerza de rozamiento cinético será:

$$W_c = -F_c d = -(\mu_c mg \cos\theta)(2\pi R)$$

Aplicando el teorema del trabajo y la energía:

$$W_{ABA'} = -(\mu_c mg\cos\theta)(2\pi R) = \frac{1}{2}mv_{A'}^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

Por consiguiente, el disco vuelve a pasar por el punto A con una velocidad:

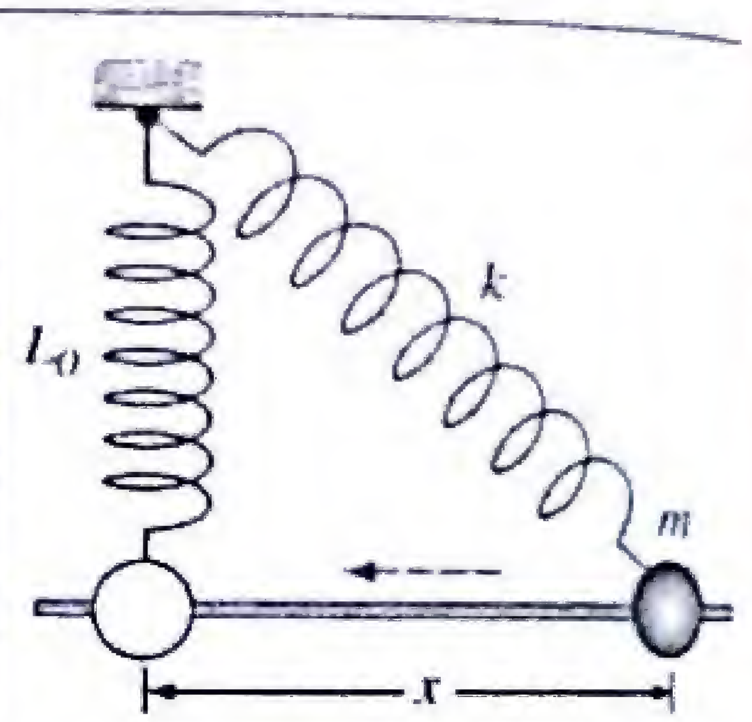
$$v_{A'} = \sqrt{v_A^2 - 4Rg\mu_c \pi \cos\theta} = 8,96 \text{ m/s}$$

Respuesta

a) $v_B = 8,16$ m/s
b) $v_{A'} = 8,96$ m/s

PR-3.26. *Sistema oscilante masa-resorte*

Un resorte de constante elástica k y longitud normal L_0 tiene un extremo fijo y el otro extremo está unido a una pelota de masa m que tiene un agujero, de modo que puede deslizar a lo largo de una guía horizontal sin rozamiento. La pelota es apartada a una distancia x y luego se suelta. Determine la velocidad que tendrá la pelota cuando pase por la posición de equilibrio.



Solución: Sobre la pelota actúan tres fuerzas: el peso, $m\bar{g}$ la normal $\bar{N}$ a la guía y la fuerza elástica del resorte. La fuerza elástica del resorte $\bar{F}_r$, es la única que realiza trabajo. Aplicando el teorema del trabajo y la energía:

$$W_r = \Delta K = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

Con la velocidad inicial $v_1 = 0$, y siendo d el estiramiento del resorte:

$$\frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}k[\sqrt{(L_0^2 + x^2)} - L_0]^2 = \frac{1}{2}mv_2^2$$

Despejando v_2, tenemos:

$$v_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}[\sqrt{(L_0^2 + x^2)} - L_0]$$

Respuesta:

$$v_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}[\sqrt{(L_0^2 + x^2)} - L_0]$$

PR-3.27. *¿Cuál será la velocidad máxima de la pesa?*

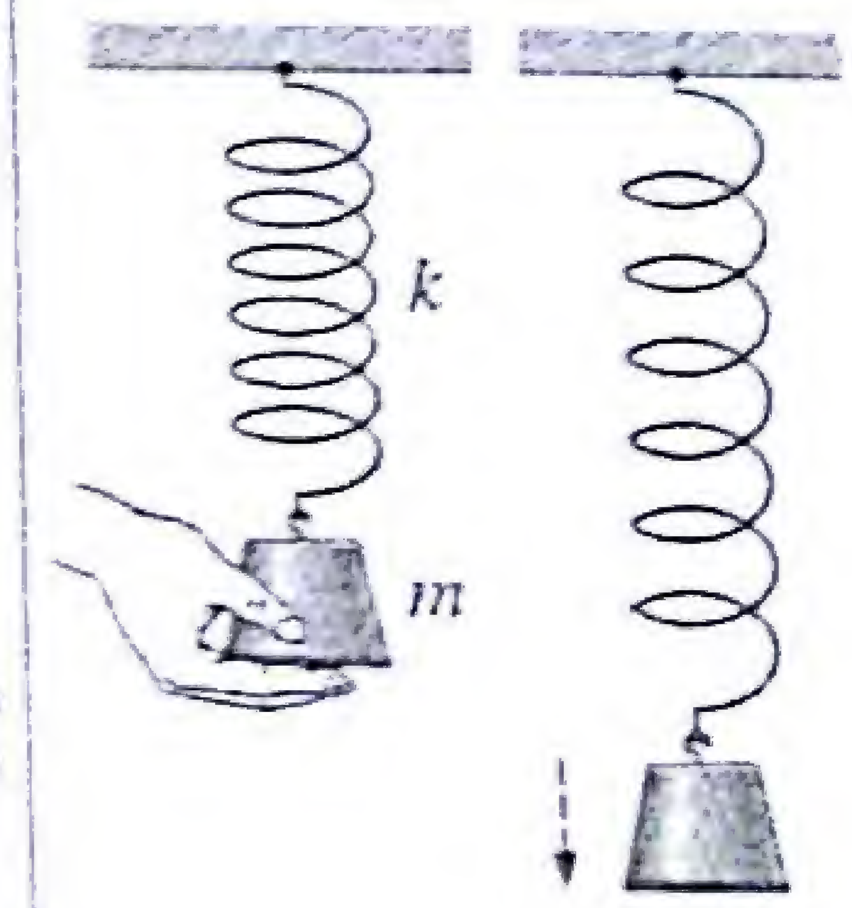
Un bloque de masa m se encuentra suspendido de un resorte de constante elástica k y por debajo se le sostiene de manera tal que el resorte no resulta deformado. A continuación se deja el bloque en libertad.

a) Determine el alargamiento máximo del resorte
b) Determine la velocidad máxima que alcanza el bloque

Solución: a) El alargamiento máximo del resorte se alcanza cuando el bloque se detiene. Aplicando el teorema del trabajo-energía:

$$W_g + W_r = mgx - \frac{1}{2}kx^2 = \Delta K = 0$$

El alargamiento máximo es: $$x_{max} = \frac{2mg}{k}$$



b) Cuando el bloque adquiere su velocidad máxima también lo es su energía cinética. Esta función tiene un máximo para:

$$\frac{\partial K(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(mgx - \frac{1}{2}kx^2) = mg - kx = 0$$

Es decir, $mg = kx$. Esto corresponde a cuando la fuerza neta es cero y cambia de sentido. Aplicando el teorema del trabajo–energía:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgx - \frac{1}{2}kx^2$$

La velocidad máxima es:

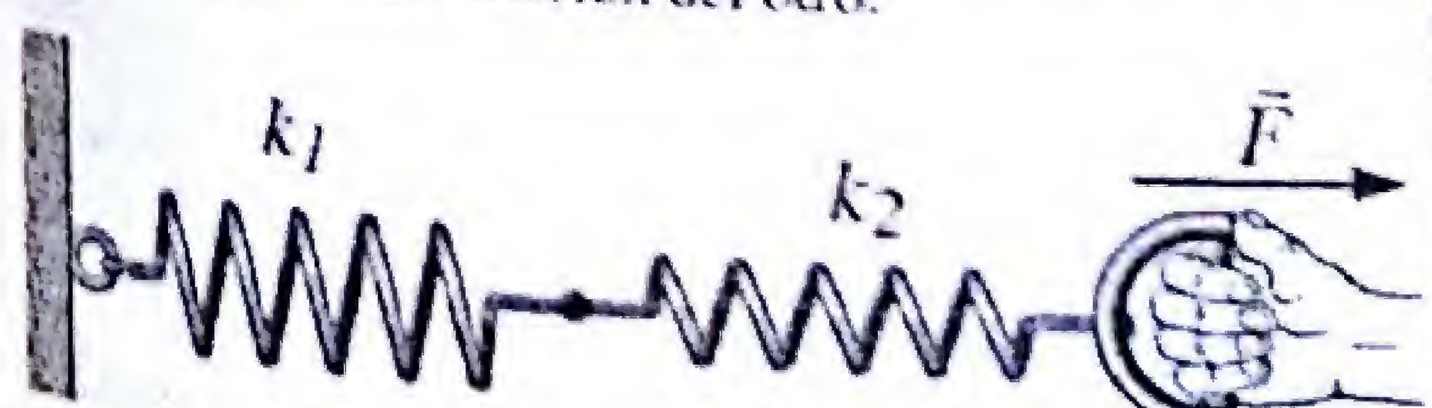
$$v_m = \sqrt{2gx - kx^2/m} = g\sqrt{m/k}$$

Respuesta

a) $x_{max} = \dfrac{2mg}{k}$,
b) $v_{max} = g\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

PR-3.28. *Resortes conectados en Serie*

Dos resortes de distintas constantes elásticas, $k_1 > k_2$, se conectan uno a continuación del otro.



a) Demuestre que la combinación se comporta como un solo resorte de constante elástica equivalente:

$$k_{eq} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

b) ¿Cuál resorte almacena la mayor energía?

Solución: a) Como los dos resortes son de masa despreciable, la fuerza aplicada, F, es transmitida sin cambio a cada resorte Aplicando la ley de Hooke, los estiramientos respectivos de los dos resortes resultan diferentes:

$$\Delta x_1 = F/k_1 \qquad \Delta x_2 = F/k_2$$

El estiramiento total es:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = \frac{F}{k_1} + \frac{F}{k_2} = F(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}) = F(\frac{k_2 + k_2}{k_1 k_2})$$

$$k_{eq} = \frac{F}{\Delta x} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

b) Las fracciones de la energía total almacenada son respectivamente:

$$\frac{E_1}{E_t} = \frac{\frac{1}{2}k_1 \Delta x_1^2}{\frac{1}{2}k_{eq}\Delta x^2} = \frac{k_1(\frac{F}{k_1})^2}{k_{eq}(\frac{F}{k_{eq}})^2} = \frac{k_{eq}}{k_1} = \frac{k_2}{k_1 + k_2}$$

$$\frac{E_2}{E_t} = \frac{\frac{1}{2}k_2 \Delta x_2^2}{\frac{1}{2}k_{eq}\Delta x^2} = \frac{k_2(\frac{F}{k_2})^2}{k_{eq}(\frac{F}{k_{eq}})^2} = \frac{k_{eq}}{k_2} = \frac{k_1}{k_1 + k_2}$$

Como $k_1 > k_2$, esto significa que $E_2 > E_1$. Es decir, para resortes en serie la mayor energía queda almacenada en el resorte que tiene la menor constante elástica porque es el que se estira más.

Respuesta:

a) $k_{eq} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$

b) $E_2 > E_1$

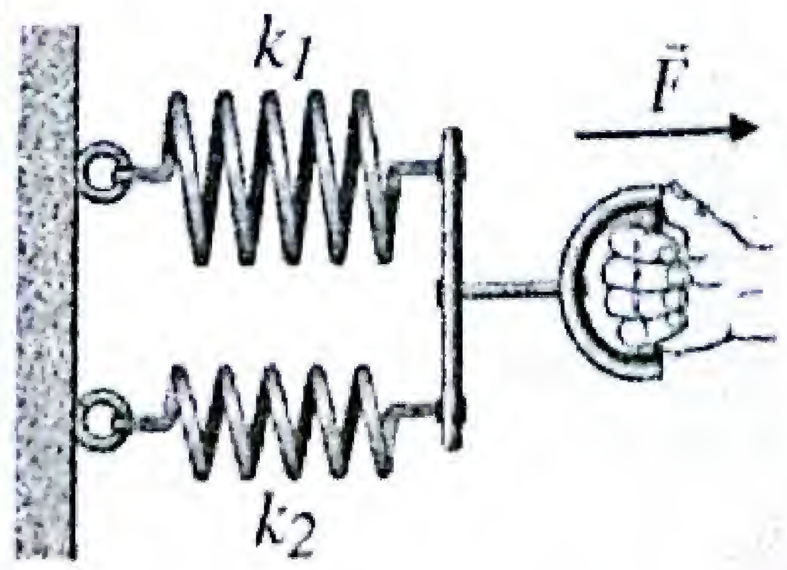
PR-3.29. *Resortes conectados en Paralelo*

Dos resortes de distintas constantes elásticas, $k_1 > k_2$, se conectan en paralelo.

a) Demuestre que la combinación se comporta como un solo resorte de constante elástica equivalente:

$$k_{eq} = k_1 + k_2$$

b) ¿Cuál resorte almacena la mayor energía?



Solución: a) Para producir el mismo estiramiento Δx, las fuerzas respectivas sobre los dos resortes son diferentes. De acuerdo a la ley de Hooke:

$$F_1 = k_1 \Delta x \qquad F_2 = k_2 \Delta x$$

La fuerza total queda repartida entre los dos resortes:

$$F = F_1 + F_2 = k_1 \Delta x + k_2 \Delta x = (k_1 + k_2)\Delta x$$

Por lo tanto, la constante elástica equivalente de los dos resortes en paralelo es:

$$k_{eq} = \frac{F}{\Delta x} = \frac{(k_1 + k_2)\Delta x}{\Delta x} = k_1 + k_2$$

b) Las fracciones de la energía total almacenada son respectivamente:

$$\frac{E_1}{E_t} = \frac{\frac{1}{2}k_1 \Delta x^2}{\frac{1}{2}k_{eq}\Delta x^2} = \frac{k_1}{k_{eq}} = \frac{k_1}{k_1 + k_2}$$

$$\frac{E_2}{E_t} = \frac{\frac{1}{2}k_2 \Delta x^2}{\frac{1}{2}k_{eq}\Delta x^2} = \frac{k_2}{k_{eq}} = \frac{k_2}{k_1 + k_2}$$

Como $k_1 > k_2$, esto significa que $E_1 > E_2$. Es decir, como los resortes tienen igual estiramiento la mayor energía queda almacenada en el resorte que tiene la mayor constante elástica porque es al que se le aplica la fuerza mayor.

Respuesta:

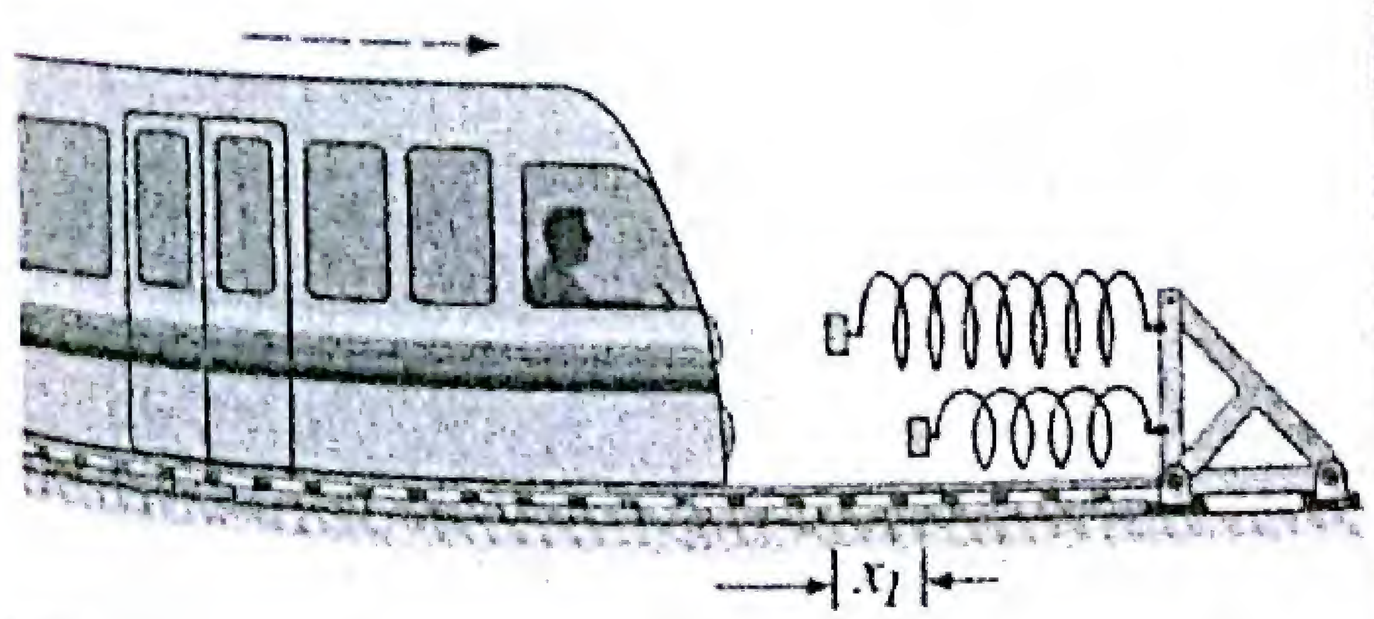
a) $k_{eq} = k_1 + k_2$

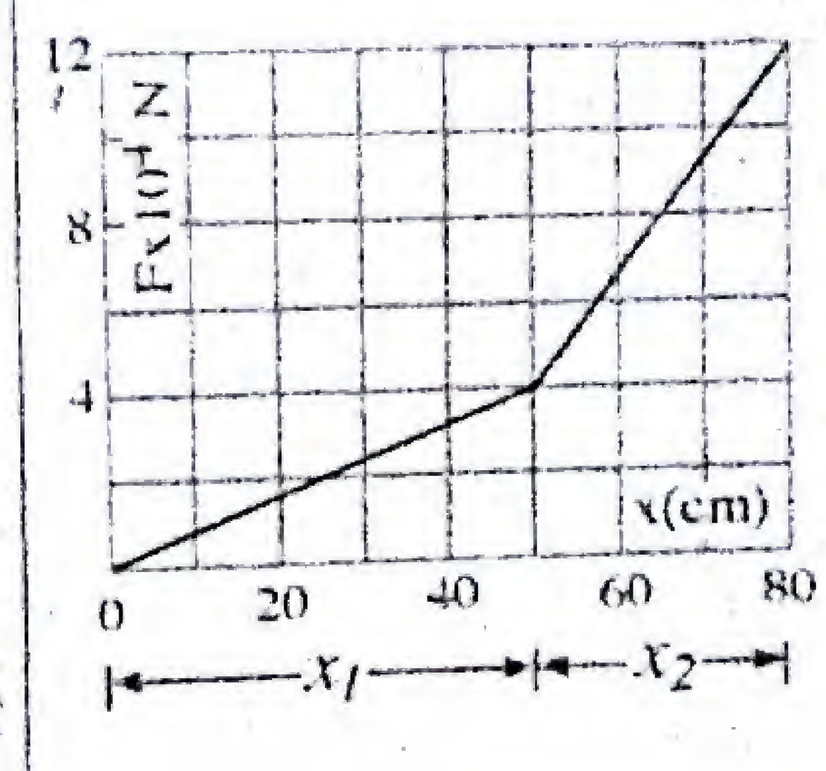
b) $E_1 > E_2$

PR-3.30. *Frenado de emergencia en el metro*

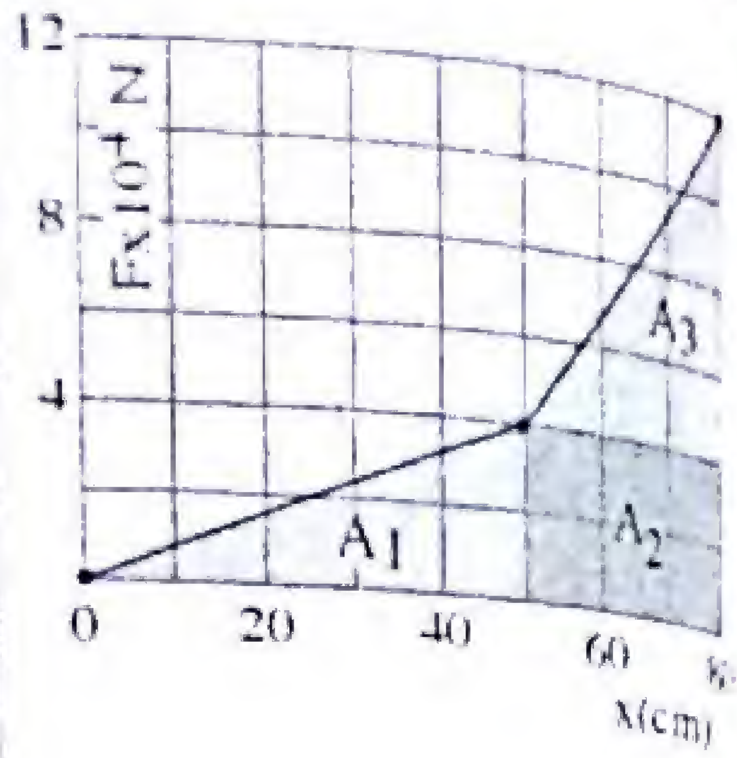
En la estación terminal del metro, un vagón de 4250 kg, queda sin frenos y es detenido mediante la acción de dos resortes. El primer resorte se comprime una distancia x_1 = 50 cm, seguidamente el otro resorte actúa junto con el primero y hay una compresión adicional x_2 = 30 cm.

Si la fuerza de los resortes varía con la distancia como indica el siguiente gráfico, ¿cuál era la velocidad del vagón?





Solución: El trabajo W_r realizado por el sistema de resortes para detener el vagón es numéricamente igual al área bajo la curva de la gráfica de la fuerza F en función de la distancia de compresión, x.



$$W_r = A_1 + A_2 + A_3$$

$$W_r = -[\frac{0,5x40000}{2} + \frac{0,3x80000}{2} + 0,3x40000] = -34000J$$

Aplicando el teorema del trabajo y la energía con $K_f = 0$:

$$W_r = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = -\frac{1}{2}mv_i^2$$

Obtenemos para la velocidad justo antes de la colisión:

$$v_i = \sqrt{\frac{-2W_r}{m}} = \sqrt{\frac{2x34000J}{4250kg}} = 4m/s$$

Respuesta:

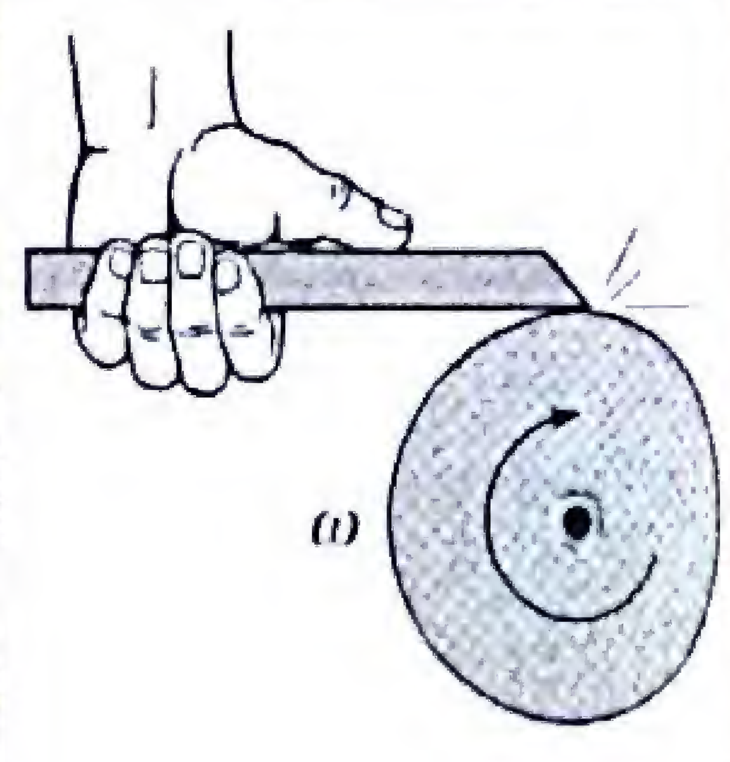
$v_i = 4m/s = 14,4km/h$

PR-3.31. *La piedra de amolar*

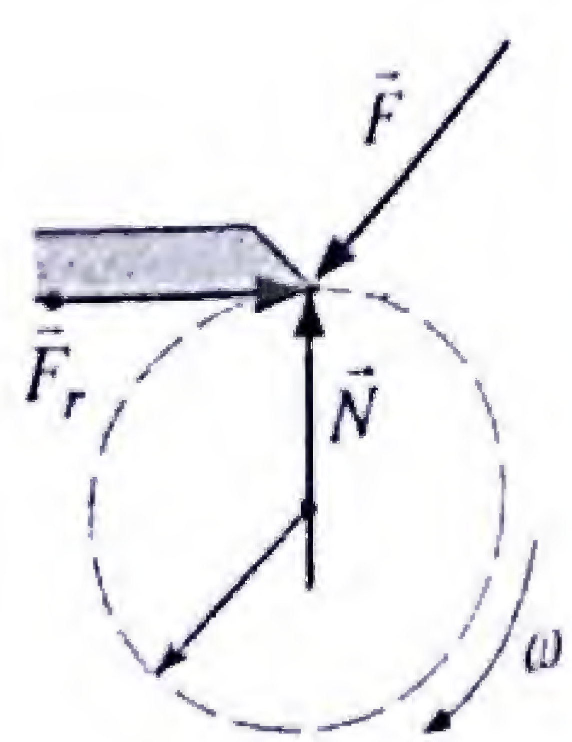
Una herramienta está siendo afilada con una piedra circular de esmeril de radio r = 5 cm, que gira a una velocidad angular ω = 150 rpm. La herramienta es presionada contra la piedra con una fuerza $\vec{F}$ de 80 N y el coeficiente de fricción cinética con la piedra es $\mu_c = 0,4$.

a) ¿Qué trabajo habrá realizado la piedra sobre la herramienta cuando ha completado 20 revoluciones?

b) ¿Qué potencia desarrolla el motor?



Solución: a) La fuerza $\vec{F}$ debe aplicarse a la herramienta a un cierto ángulo con la dirección tangencial. La componente radial, presiona la herramienta contra la rueda y tiene una magnitud de 80 N. La componente tangencial equilibra la fuerza de fricción para mantener la herramienta en su sitio y su magnitud es $F_r = \mu_c N$. Cuando la rueda ha completado 20 vueltas, un punto sobre su periferia habrá recorrido una distancia:



$$d = N(2\pi r) = (20)2\pi(0,05m) = 6,28 \text{ m}$$

El trabajo realizado por la rueda será:

$$W = F_r d = \mu_c N d = (0,4)(80 \text{ N})(6,28 \text{ m}) = 201 \text{ J}$$

b) El tiempo transcurrido para completar las 20 vueltas es:

$$t = \frac{20 \text{ vueltas}}{150 \text{ vueltas/min}} = (0,1333 \text{ min})(60s/min) = 8 \text{ s}$$

Por lo tanto la potencia que aplica el motor a la rueda es:

$$P = W/t = 201J / 8s = 25,1W$$

Respuesta:

a) W = 201 J
b) P = 25,1 W

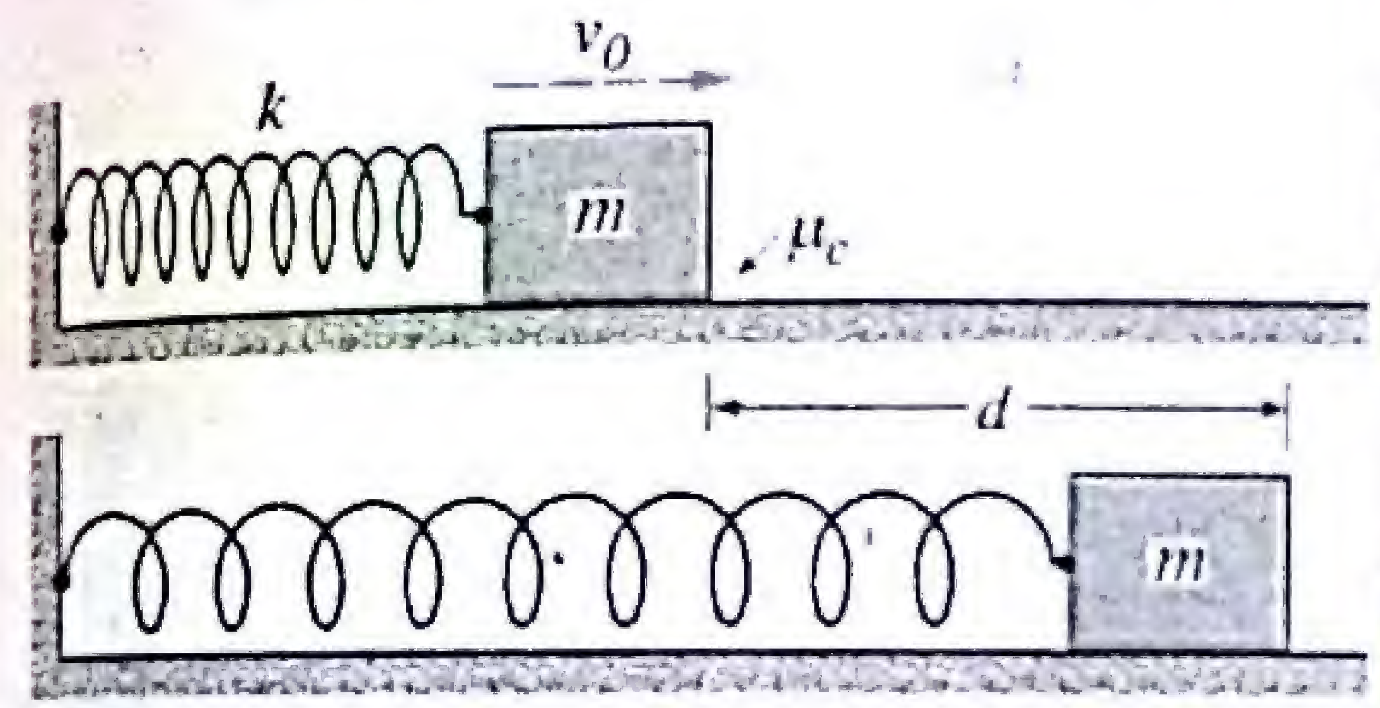
PR-3.32. *¿Se devolverá el bloque?*

Un bloque de masa m = 10 kg está sobre una superficie horizontal, atado a un resorte de constante k = 100 N/m.

Los coeficientes de fricción cinética y estática entre el bloque y la superficie son: $\mu_c = 0,15$ y $\mu_e = 0,25$. Inicialmente el resorte está sin deformación. Se le da un golpe al bloque y empieza a moverse hacia la derecha con una velocidad v_0 = 1 m/s.

a) ¿Cuál será el máximo estiramiento del resorte?

b) ¿Se devolverá el bloque cuando llega a esa posición?



Solución: a) Si el bloque se desplaza una distancia d antes de detenerse, el trabajo que realiza la fuerza de fricción cinética es: $W_c = \vec{F}_c \bullet \vec{d} = -\mu_c mgd$ Cuando el bloque se detiene, el resorte se ha estirado una distancia d y el trabajo que ha realizado la fuerza elástica sobre el bloque es: $W_r = -kd^2/2$.

De acuerdo al teorema del trabajo y la energía, el trabajo neto realizado sobre el bloque es igual a la variación de su energía cinética:

$$W_c + W_r = K_f - K_i \quad \Rightarrow \quad -\mu_c mgd - \frac{1}{2}kd^2 = 0 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$kd^2 + 2\mu_c mgd - mv_0^2 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática, para la raíz positiva encontramos:

$$d = \frac{-\mu_c mg + \sqrt{(\mu_c mg)^2 + kmv_0^2}}{k} = 0,202 \text{ m}$$

b) Para esa posición, la fuerza restauradora del resorte es:

$$F_r = kd = (100\text{N/m})(0{,}202\text{m}) = 20{,}2\text{N}$$

Mientras que la máxima fuerza de fricción estática es:

$$F_e(max) = \mu_e mg = (0{,}25)(10\text{kg})(9{,}8\text{m/s}^2) = 24{,}5\text{N}$$

Como $F_r < F_e(max)$, el bloque no puede devolverse.

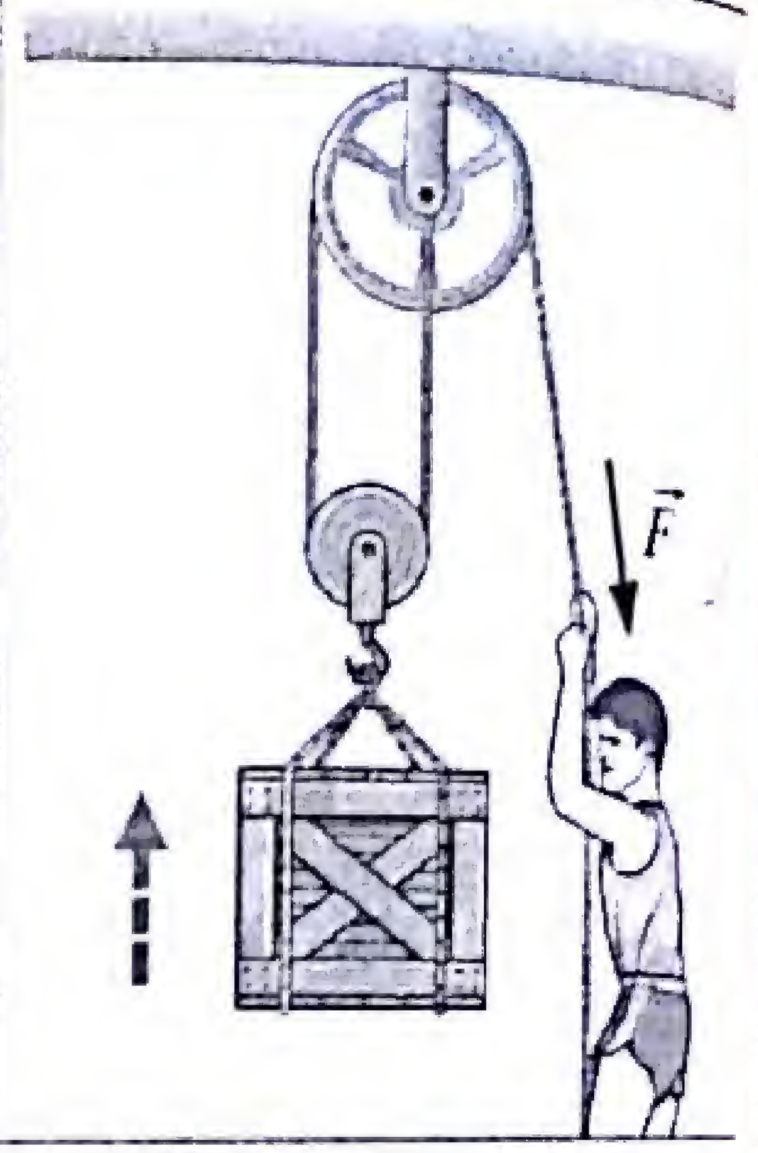
Respuesta

a) $d = \sqrt{\left(\frac{\mu_e mg}{k}\right)^2 + \frac{mv_0^2}{k}} - \frac{\mu_e mg}{k}$ $= 0{,}202$ m.

b) El bloque se queda en la posición extrema.

PR-3.33. *Elevando una carga mediante poleas con roce*

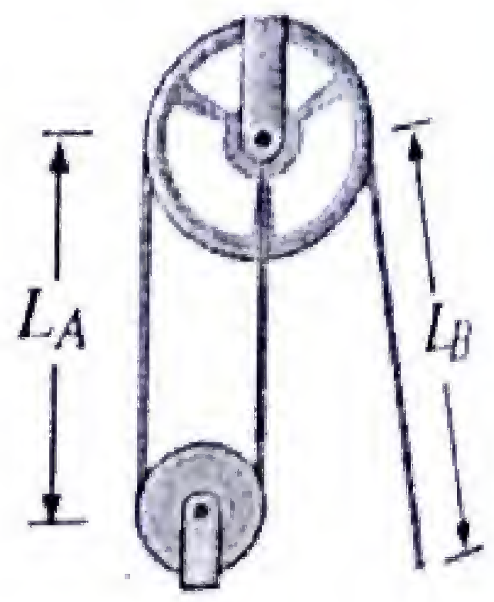
Un cajón de peso mg = 600 N es elevado cuasi estáticamente mediante el sistema de dos poleas mostrado. Cuando se aplica al extremo libre de la cuerda una fuerza F, la cuerda desliza sobre cada polea con una fuerza de rozamiento de magnitud F_r = 20 N. ¿Cuánto trabajo debe ejercer la persona para elevar el cajón en una altura h = 3 m? Suponga que las poleas no giran.



Solución: Como la longitud total de la cuerda es constante, se cumple:

$$2L_A + L_B = constante$$

$$2\Delta L_A + \Delta L_B = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\Delta L_A = -\Delta L_B$$



Esto significa que, para elevar el cajón en una distancia h hay que jalar por el extremo libre una longitud doble de cuerda ($2h$). Cuando el trozo de cuerda de longitud $2h$ se desliza sobre la polea superior, solo la longitud h desliza sobre la polea móvil inferior. El trabajo de la fuerza de rozamiento en las poleas es: $W_r = -F_r 2h - F_r h$. El trabajo de la fuerza de gravedad es: $W_g = -mgh$.

Como la variación de energía cinética del sistema es cero, el trabajo total realizado por todas las fuerzas es nulo.

$$W_{total} = W_r + W_g + W_F = 0$$

$$-F_r 2h - F_r h - mgh + W_F = 0$$

$$W_F = mgh + 3F_r h = (600\text{N})(3\text{m}) + 3(20\text{N})3\text{m} = 1980\text{J}$$

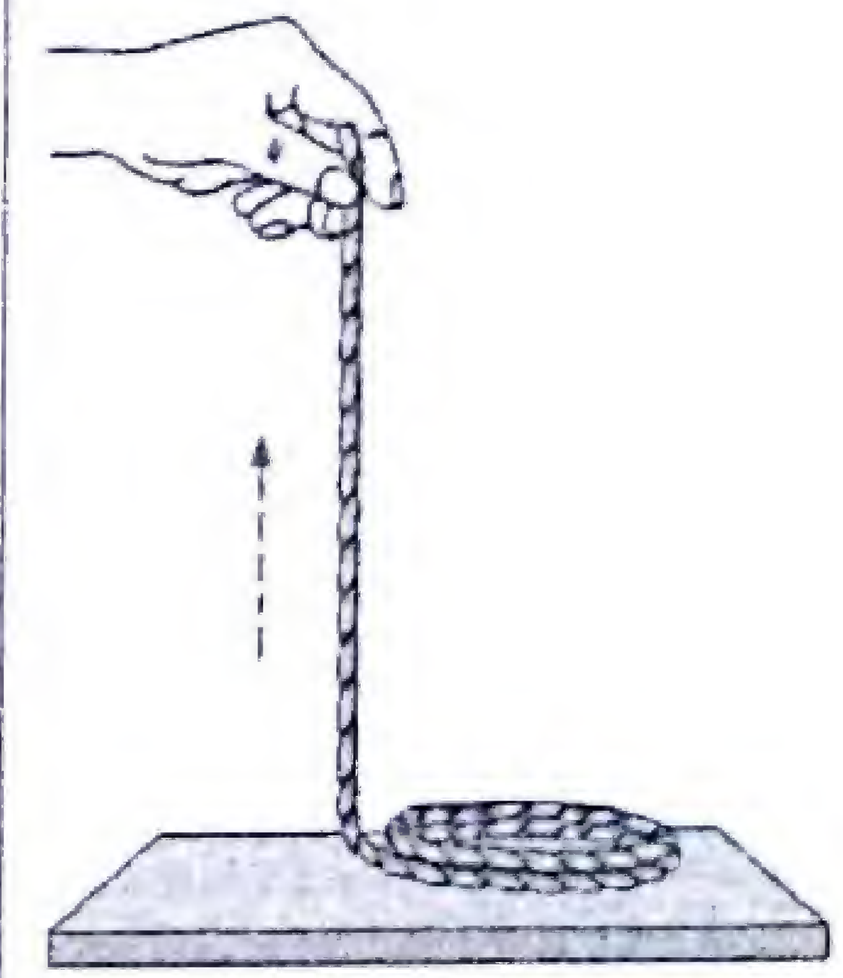
Respuesta

$W_F = 1980\text{J}$

PR-3.34. *Trabajo para recoger la cuerda*

Una cuerda de masa M y de longitud L está inicialmente sobre el suelo. Una persona recoge gradualmente la cuerda aplicando por un extremo una fuerza dirigida verticalmente hacia arriba, hasta apartarla por completo del suelo. Calcule el trabajo que debe efectuar la persona para recoger la cuerda.

Solución: Se divide la cuerda en N eslabones de tamaño $\Delta y = L/N$ y peso Mg/N. El trabajo total para elevar los eslabones uno a uno es:



$$W = \frac{Mg}{N}[0 + 1 + 2 + ... + (N-1)]\Delta y$$

Esta progresión aritmética tiene como suma:

$$0 + 1 + ... + (N-1) = N\frac{0 + (N-1)}{2}$$

Pasando al límite para $N \to \infty$:

$$W = Lim_{N\to\infty} \frac{MgL}{2}\left(1 - \frac{1}{N}\right)$$

El trabajo neto para elevar la cuerda completa será:

$$W = \frac{1}{2}MgL$$

Note que este es justamente el trabajo para levantar el centro de gravedad de la cuerda.

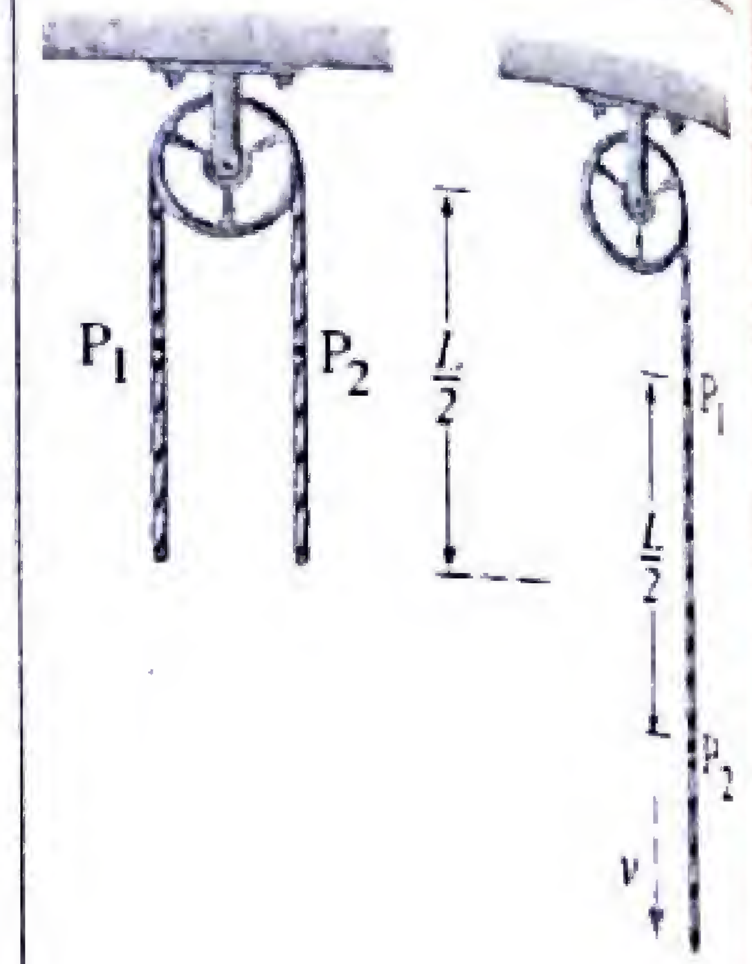
Respuesta

$W = \frac{1}{2}MgL$

PR-3.35. *¿A qué velocidad se desprende la cuerda?*

Una cuerda homogénea de longitud L pasa por una polea ideal (de masa despreciable y sin fricción). El radio de la polea es despreciable en comparación con la longitud de la cuerda. Inicialmente la cuerda cuelga simétricamente y está en equilibrio. A continuación se rompe el equilibrio y la cuerda comienza a deslizarse. ¿Qué velocidad tendrá la cuerda en el instante en que se desprende de la polea?

Solución: Si despreciamos el trozo de cuerda alrededor de la polea, inicialmente las dos mitades de la cuerda a cada lado, tienen sus centros de gravedad en los puntos P_1 y P_2, respectivamente. En el instante de abandonar la polea, el trozo de la izquierda tendrá su centro de gravedad P_1 a la misma altura inicial, pero el centro P_2 del trozo de la derecha habrá descendido una distancia total $L/2$ respecto a su ubicación original.



El trabajo neto realizado por la gravedad es $W = (m/2)(L/2)$ y si aplicamos el teorema del trabajo-energía:

$$W = \Delta K \qquad \Rightarrow \qquad mg\frac{L}{4} = \frac{1}{2}mv^2$$

Por lo tanto, la velocidad de la cuerda en el instante de desprenderse de la polea será:

$$v = \sqrt{\frac{gL}{2}}$$

Respuesta

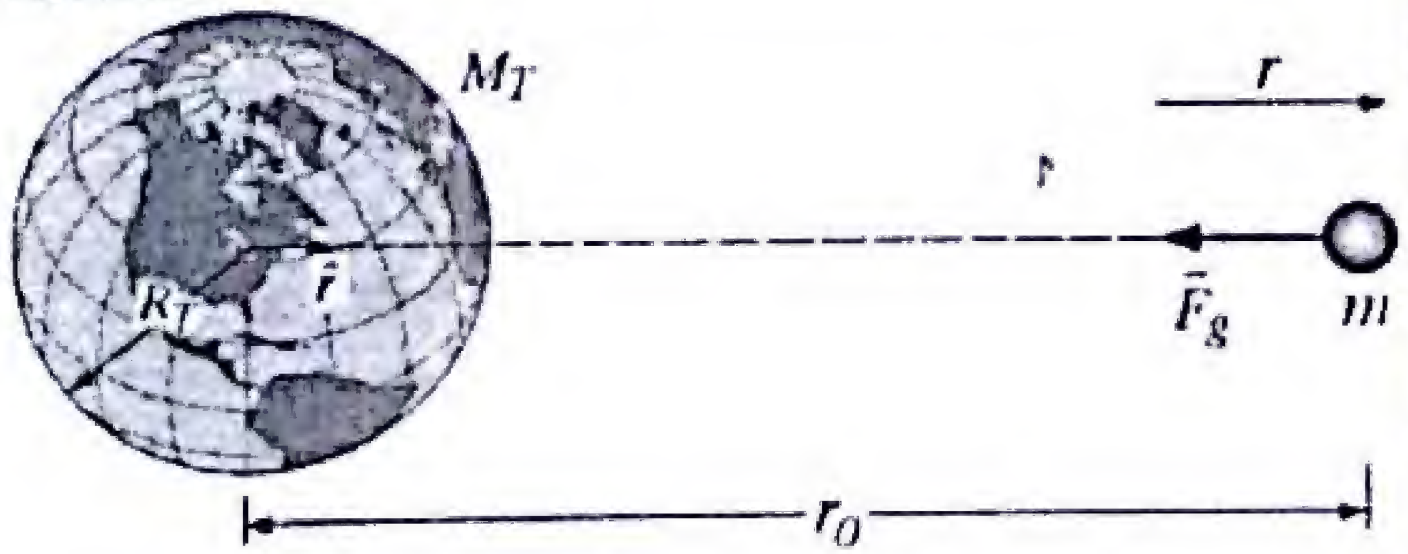
$$\boxed{v = \sqrt{\frac{gL}{2}}}$$

PR-3.36. *Trabajo de la gravedad terrestre*

Una partícula de masa m se suelta a una distancia r_0 del centro de la Tierra y cae libremente hacia la superficie terrestre.

a) Calcule el trabajo realizado sobre la partícula por la fuerza gravitacional cuando choca con la superficie terrestre.

b) Considere el caso en que la partícula se suelta desde un punto cercano a la Tierra a la altura $h = r_0 - R_T$, siendo $r_0 \cong R_T$.



Solución: La fuerza gravitacional $\vec{F}_g$ que ejerce la Tierra (masa M_T) sobre la partícula de masa m es la misma como si toda la masa de la Tierra estuviera concentrada en su centro:

$$\vec{F}_g = -G\frac{mM_T}{r^2}\hat{r}$$

El signo (-) significa que la fuerza es atractiva, es decir, está en dirección al centro de la Tierra.

$$W = \int \vec{F}_g \bullet d\vec{r} = \int (-G\frac{mM_T}{r^2}\hat{r}) \bullet d\vec{r} = -GmM_T\int_{r_0}^{R_T}\frac{dr}{r^2}$$

$$W = -GmM_T(-\frac{1}{r})\Big|_{r_0}^{R_T} = GmM_T(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r_0})$$

b) Podemos expresar el trabajo W en términos de la aceleración g de la partícula de masa m en caída libre:

$$g = \frac{F_g}{m} = \frac{GM_T}{R_T^2} \qquad \Rightarrow \qquad W = mgR_T^2(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r_0})$$

Si la partícula se suelta desde un punto cercano a la Tierra a la altura $h = r_0 - R_T$, siendo $r_0 \cong R_T$, se tiene:

$$W(r \cong R_T) = mgR_T^2(\frac{r_0 - R_T}{r_0 R_T}) = mgh\frac{R_T}{r_0} \cong mgh$$

Que es la expresión familiar del trabajo de la gravedad.

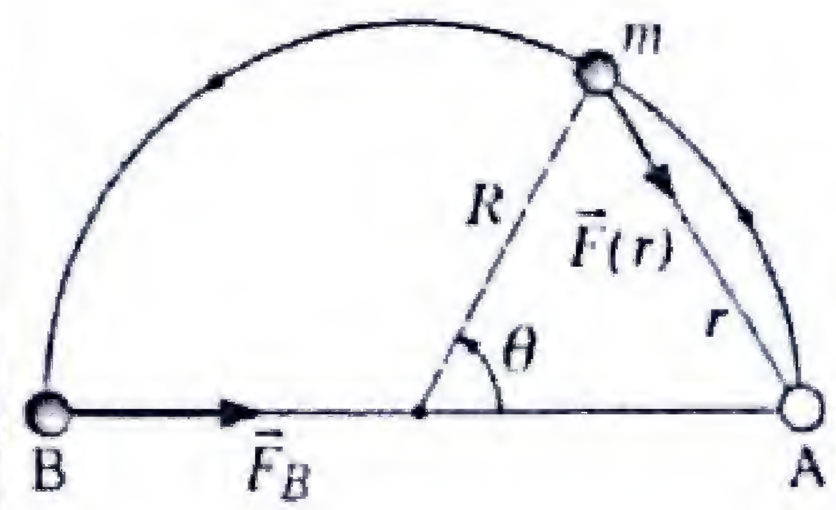
Respuesta

a) $W = GmM_T(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{r_0})$

b) $W = mgh$

PR-3.37. *Fuerza variable en un camino semicircular*

Una partícula de masa m recorre un camino semicircular de radio R mientras es sometida a una fuerza que es proporcional a la distancia r al punto inicial A. Cuando la partícula alcanza la posición final B la fuerza tiene su valor máximo F_B. Calcule el trabajo realizado en contra de esta fuerza.



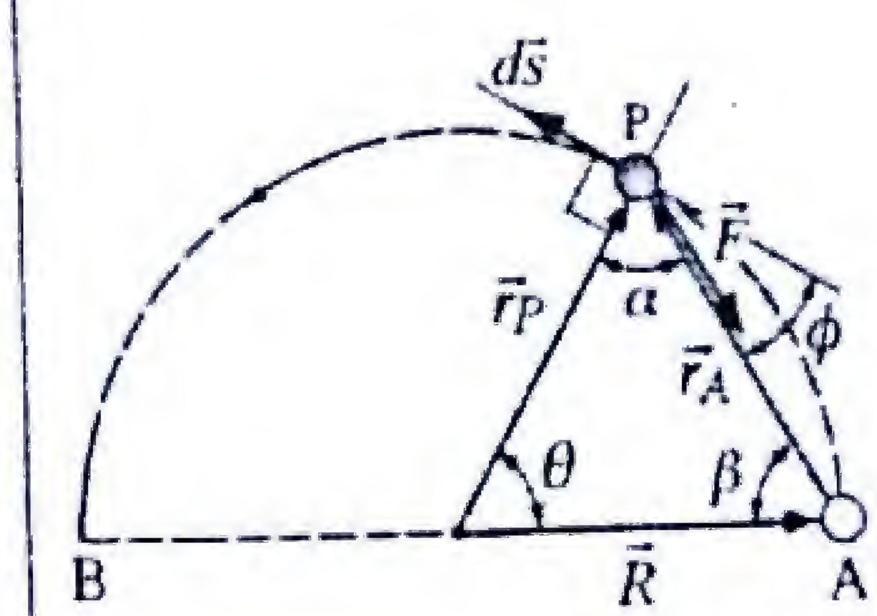
Solución: Si la fuerza es proporcional a la distancia $F = kr_A$, la constante k de proporcionalidad es:

$$F_B = k(2R) \qquad \Rightarrow \qquad k = F_B/2R$$

La distancia de m al punto A se obtiene de la relación vectorial: $\vec{r}_P = \vec{R} + \vec{r}_A$, siendo $|\vec{r}_P| = R$. El cuadrado del módulo de $\vec{r}_A$ es:

$$r_A^2 = \vec{r}_A \bullet \vec{r}_A = (\vec{r}_P - \vec{R})(\vec{r}_P - \vec{R}) = r_P^2 + R^2 - 2r_P R\cos\theta$$

$$r_A^2 = R^2 + R^2 - 2R^2\cos\theta = 2R^2(1 - \cos\theta)$$



$$r_A = \sqrt{2R^2(1-\cos\theta)}$$

Podemos escribir la fuerza en función del ángulo θ:

$$F = kr = \frac{F_B}{2R}\sqrt{2R^2(1-\cos\theta)} = F_B\sqrt{\frac{(1-\cos\theta)}{2}}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{(1-\cos\theta)}{2}}$$

$$F = F_B \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$$

En el triángulo formado de la figura, se cumplen las siguientes relaciones entre los ángulos indicados:

$\alpha = \beta, \quad \alpha + \beta + \theta = 2\alpha + \theta = 180^\circ \quad$ y $\quad \alpha + \phi = 90^\circ$

Por lo tanto: $\theta = 2\phi$.

El trabajo realizado en contra de la fuerza $\vec{F}(r)$es:

$$W_{AB} = -\int_A^B \vec{F}(r)\bullet d\vec{s} = +\int_A^B F ds\cos\phi = \int_A^B FRd\theta\cos\phi$$

$$W_{AB} = \int_0^\pi (F_B \operatorname{sen}\frac{\theta}{2})R(\cos\frac{\theta}{2})d\theta = F_B R\int_0^\pi \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}d\theta$$

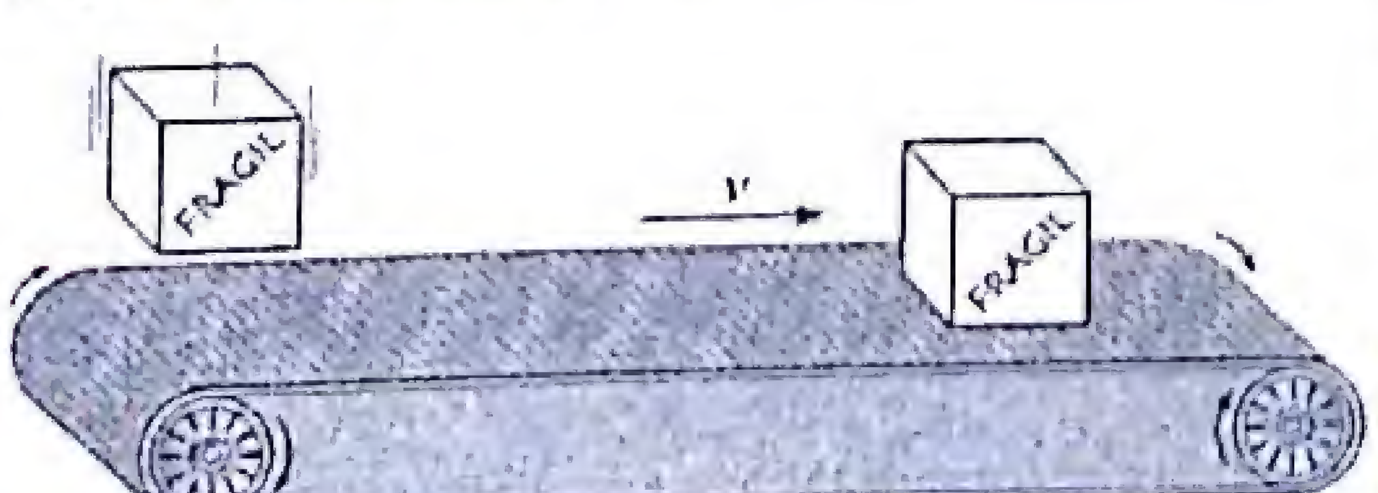
$$W_{AB} = F_B R\int_0^\pi \operatorname{sen}\theta d\theta = -F_B R\cos\theta\Big|_0^\pi = -F_B R(-1) = F_B R$$

Respuesta

$$\boxed{W_{AB} = F_B R}$$

PR-3.38. *Trabajo de la fricción y trabajo del motor*

Sobre una banda que se mueve a velocidad constante v = 2 m/s, se dejan caer paquetes de masa m = 10 kg, para ser transportados. Al caer, el paquete desliza durante un breve tiempo antes de empezar a moverse a la velocidad de la banda. El coeficiente de fricción cinética entre el paquete y la banda es $\mu_c = 0{,}4$.



Para el período de tiempo en que el paquete desliza antes de alcanzar su velocidad final, determine:

a) La fuerza de fricción.

b) La distancia que se traslada el paquete.

c) El trabajo realizado por la fricción sobre el paquete.

d) La distancia que se traslada la correa.

e) La energía suministrada por el motor que impulsa la banda

f) ¿Por qué esta última no coincide con el resultado en (c)?

Solución: a) Una vez que el paquete es colocado sobre la banda, ocurre deslizamiento entre ambos. La fuerza de fricción sobre el paquete es:

$$F_c = \mu_c mg = (0{,}4)(10\text{kg})(9{,}8\text{m/s}^2) = 39{,}2\text{N}$$

b) La fuerza de fricción sobre el paquete y el desplazamiento de éste, d_p, ocurren en el mismo sentido y el trabajo realizado es positivo. La velocidad final del paquete es v y aplicando el teorema del trabajo y la energía:

$$W_c = F_c d_p = \mu_c mg d_p = \frac{1}{2}mv^2$$

El desplazamiento del paquete es:

$$d_p = \frac{v^2}{2\mu_c g} = \frac{(2\text{m/s})^2}{2(0{,}4)(9{,}8\text{m/s}^2)} = 0{,}51\text{m}$$

c) El trabajo realizado por la fuerza de fricción sobre el paquete es:

$$W_c = F_c d_p = (39{,}2\text{N})(0{,}51\text{m}) = +20\text{J}$$

d) Si al paquete le toma un tiempo t en alcanzar su velocidad final, en este tiempo se habrá movido una distancia:

$$d_p = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}vt$$

Como la velocidad de la banda es fija, v, en ese mismo tiempo se habrá movido una distancia:

$$d_b = vt = 2d_p = 2(0{,}51\text{m}) = 1{,}02\text{m}$$

e) El trabajo que realiza el motor que impulsa la banda es:

$$W_m = F_c d_b = (39{,}2\text{N})(1{,}02\text{m}) = +40\text{J}$$

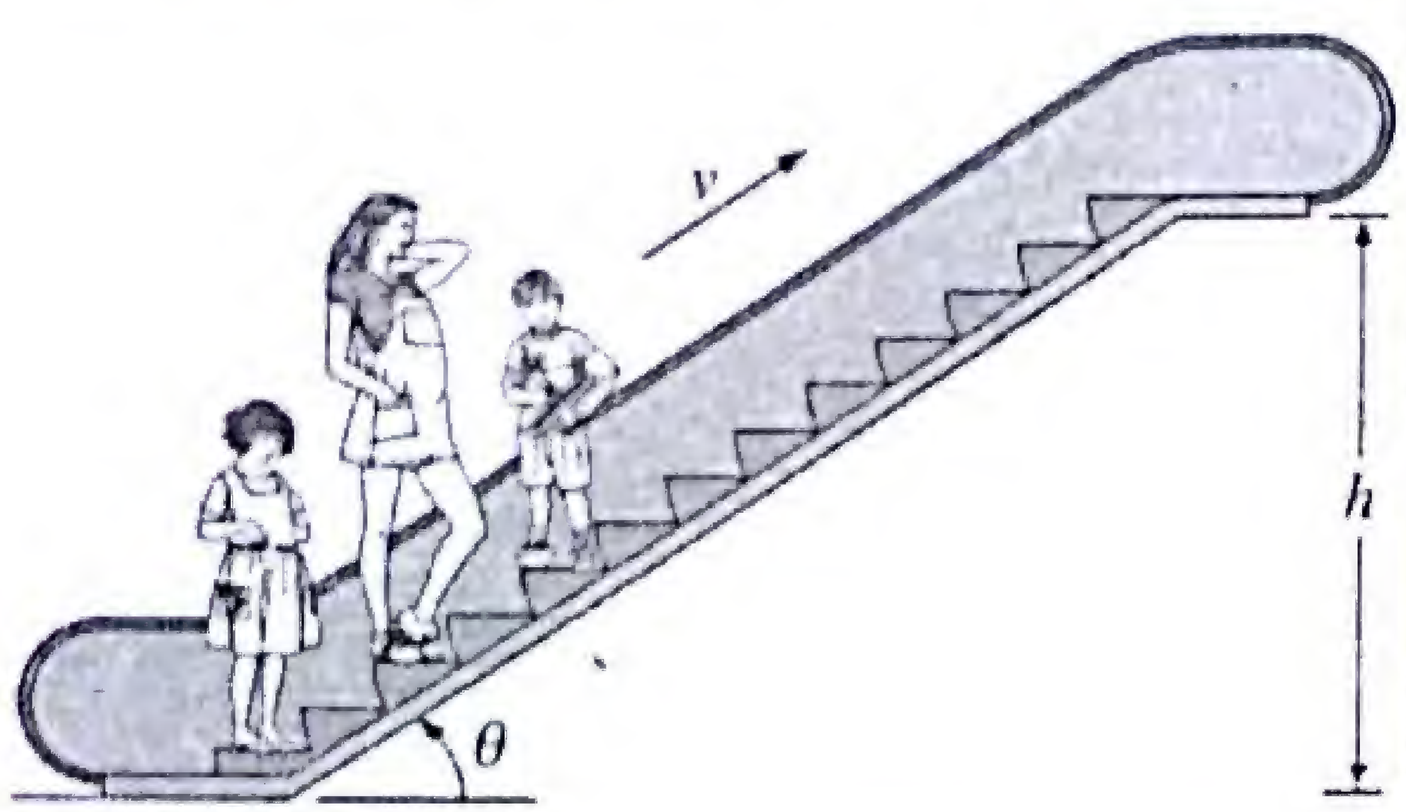
f) Esta energía resulta el doble que la suministrada al paquete ya que la fricción entre el paquete y la banda convierte la mitad del trabajo realizado en energía térmica.

Respuesta:

a) $F_c = 39{,}2$N,
b) $d_p = 0{,}51$m
c) $W_f = +20$J,
d) $d_b = 1{,}02$m
e) $W_m = 40$J.

PR-3.39. *Potencia para mover una escalera eléctrica*

Una escalera eléctrica transporta personas de un piso a otro que está a una altura $h = 8$ m.



El ángulo que forma la escalera con la horizontal es $\theta = 30°$. Si la masa promedio por persona es $m = 75$ kg, ¿cuál es la potencia promedio requerida por los motores para subir 45 personas a una velocidad $v = 2$ m/s?

Solución: Como la velocidad es constante, la fuerza aplicada por el motor corresponde a una fuerza de tensión que se transmite a cada persona y corresponde a la componente del peso a lo largo de la escalera: $mgsen\theta$. Como se trata de N personas con un peso promedio, mg, la fuerza aplicada por el motor es:

$$F = N(mgsen\theta)$$

La potencia total desarrollada por el motor es:

$$P = \vec{F} \bullet \vec{v} = Nvmgsen\theta$$

$$P = (45)(75kg)(2m/s)(9,8m/s)sen30° = 33080W$$

Respuesta:

$P = 33,1$ kW

PR-3.40. *Vagones impulsados por una locomotora*

Una locomotora acelera un tren de varios vagones desde una velocidad $v_1 = 10$ m/s hasta una velocidad $v_2 = 25$ m/s en el intervalo de tiempo $\Delta t = 5$ minutos, utilizando toda su potencia $P = 1600$ kW.

Si los vagones ruedan a lo largo de los rieles con fricción despreciable, determine:

a) La masa total de los vagones.

b) La velocidad del tren en función del tiempo.

c) La distancia recorrida durante los 5 minutos?

Solución: a) El trabajo neto realizado por la locomotora es:

$$W = P\Delta t = (1,6x10^6 W)(5min)60s/min) = 4,8x10^8 J$$

Este trabajo es igual a la variación de la energía cinética:

$$W = \Delta K = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2)$$

Por lo tanto, la masa total de los vagones remolcados es:

$$m = \frac{2W}{v_2^2 - v_1^2} = \frac{2(4,8x10^8 J)}{(25m/s)^2 - (10m/s)^2} = 1,83x10^6 kg$$

b) Aplicando el teorema del trabajo-energía desde la velocidad v_1 hasta la velocidad v en un tiempo t:

$$Pt = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \quad \Rightarrow \quad v^2 = v_1^2 + \frac{2P}{m}t$$

La velocidad en función del tiempo es: $v = \sqrt{v_1^2 + \frac{2P}{m}t}$

$$v(t) = \sqrt{(10m/s)^2 + \frac{2(1,6x10^6 W)}{1,83x10^6 kg}t} = \sqrt{100 + 1,74t}$$

c) La distancia recorrida durante los 5 minutos es:

$$x_2 - x_1 = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt = \int_0^{300} \sqrt{100 + 1,74t}\,dt$$

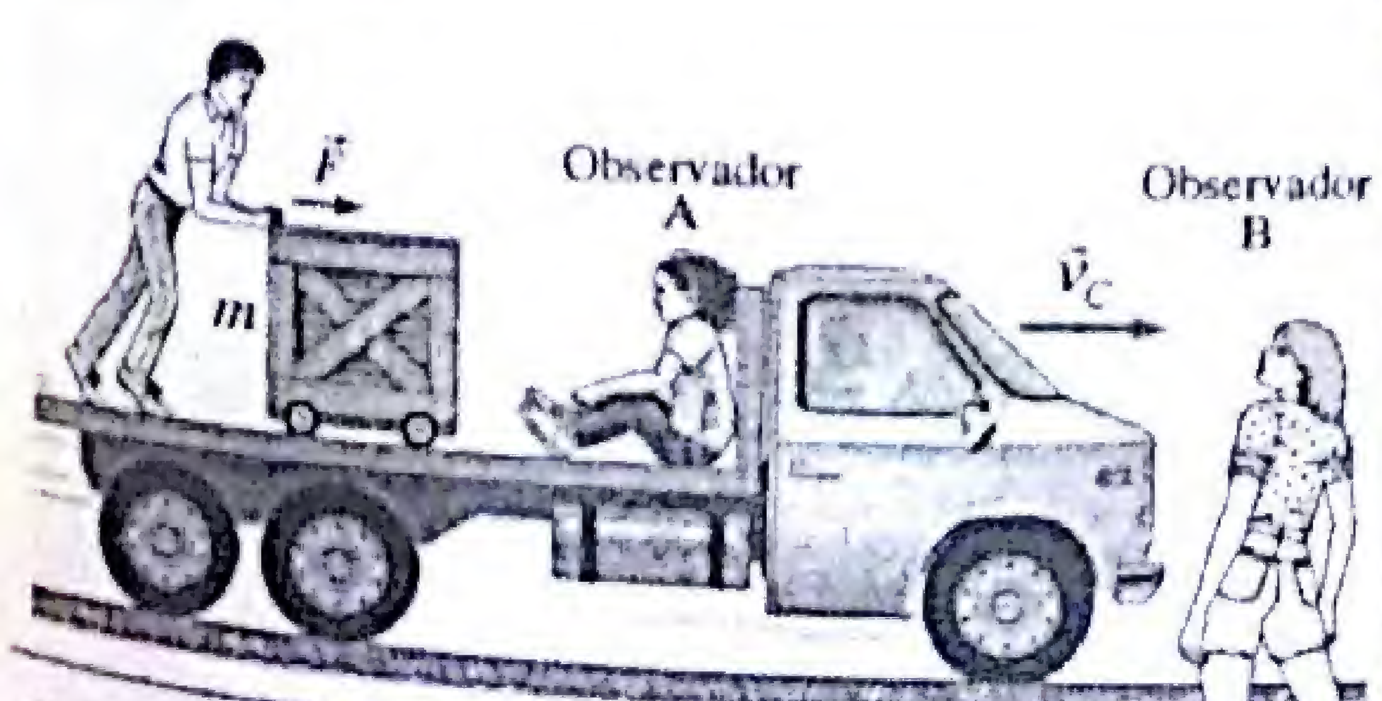
$$\Delta x = \frac{2}{3}\frac{(100 + 1,74t)^{3/2}}{1,74}\Bigg|_0^{300} = 5,56km$$

Respuesta:

a) $m = 1,83x10^6 kg$
b) $v(t) = \sqrt{100 + 1,74t}$
c) $\Delta x = 5,56km$

PR-3.41. *Invariancia del teorema del trabajo-energía*

Un camión se mueve en línea recta a velocidad v_c constante, sobre una carretera horizontal, llevando un cajón de masa m.



El cajón puede deslizar sin fricción y un hombre lo empuja sobre la plataforma, aplicando una fuerza horizontal $\vec{F}$ en la dirección del movimiento, durante un tiempo t. Compruebe que el teorema del trabajo y la energía se cumple:

a) Para un observador A, fijo en el camión.

b) Para un observador B, fijo en el suelo.

Solución: a) Para el observador A que va en el camión, el cajón se desplaza con una aceleración $a = F/m$ y su velocidad al cabo de un tiempo t es: $v_A = at = (F/m)t$ mientras que la variación en su energía cinética es:

$$\Delta K_A = \frac{mv_A^2}{2} = \frac{F^2t^2}{2m}$$

Si d_A es el desplazamiento del cajón, el trabajo realizado es:

$$W_A = Fd_A = F(\frac{1}{2}at^2) = \frac{F^2t^2}{2m}$$

Es decir, se cumple la relación: $\Delta K_A = W_A$

b) Para el observador B que está en el suelo, la velocidad del cajón es: $v_B = v_A + v_C$, y la variación de su energía cinética es:

$$\Delta K_B = \frac{1}{2}m(v_A + v_C)^2 - \frac{1}{2}mv_C^2 = \frac{1}{2}mv_A^2 + mv_Av_C$$

Pero: $mv_A = mat = Ft$, luego:

$$\Delta K_B = \frac{F^2t^2}{2m} + v_CFt$$

El trabajo realizado según el observador B es:

$$W_B = Fd_B = F(d_A + v_Ct)$$

$$W_B = F(\frac{1}{2}at^2) + v_CFt = \frac{F^2t^2}{2m} + v_CFt$$

Es decir, tanto las energías cinéticas como los trabajos realizados sobre el cajón son distintos en los dos marcos de referencia, sin embargo, en cada uno de estos se cumple que el trabajo realizado por la fuerza es igual a la ganancia en energía cinética de la partícula (teorema del trabajo - energía, $\Delta K = W$).

El teorema del trabajo y la energía se dice que es invariante porque tiene la misma expresión en todos los marcos de referencia inerciales

Respuesta

a) Observador en el camión

$$\Delta K_A = W_A = \frac{F^2t^2}{2m}$$

b) Observador B en el suelo

$$\Delta K_B = W_B = \frac{F^2t^2}{2m} + v_CFt$$

PE-3.01. *¿Cuál de estas afirmaciones es correcta?*

a) Sobre un cuerpo que permanece en reposo no se efectúa trabajo neto.
b) El trabajo de la fuerza de fricción cinética es negativo.
c) Si el trabajo neto sobre una partícula es cero su energía cinética también será cero.
d) El trabajo es numéricamente igual al área bajo la curva de la fuerza en función del tiempo.
e) El trabajo y la energía cinética son necesariamente cantidades positivas.

PE-3.02. *Trabajo en un movimiento circular*

Un cuerpo se mueve en una circunferencia a rapidez constante. El trabajo que realiza la fuerza centrípeta sobre este cuerpo es cero debido a que...
a) Su desplazamiento neto es cero en cada vuelta.
b) La fuerza promedio en cada vuelta es cero.
c) La fuerza centrípeta se cancela con la centrífuga.
d) La aceleración es nula.
e) La fuerza centrípeta es perpendicular a la dirección del movimiento.

$U_2 - U_1$

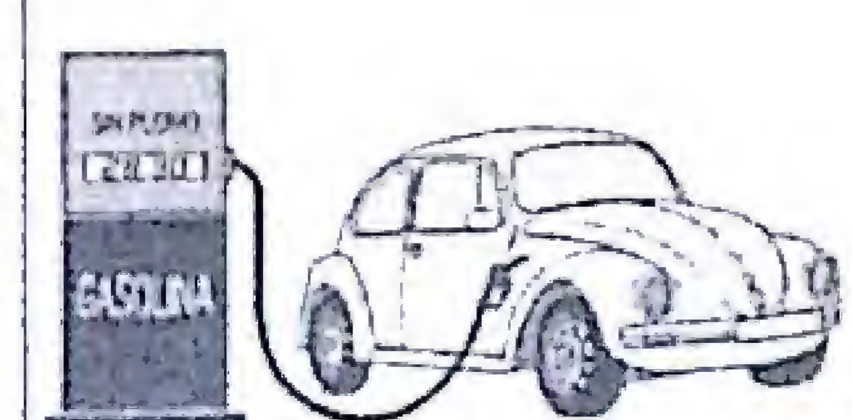
PE-3.03. *La energía cinética de un cuerpo......*

a) Es una magnitud vectorial.
b) Puede ser positiva o negativa.
c) No depende del marco de referencia.
d) No depende de la dirección del movimiento.
e) Aumenta cuando se le aplica una fuerza.

PE-3.04. *Consumo de gasolina*

Para acelerar un carro desde reposo hasta 50 km/h se convierte cierta cantidad de energía química de la gasolina en energía cinética. En comparación, si se quiere acelerarlo desde 50 km/h hasta 100 km/h, se requerirá un consumo de gasolina:

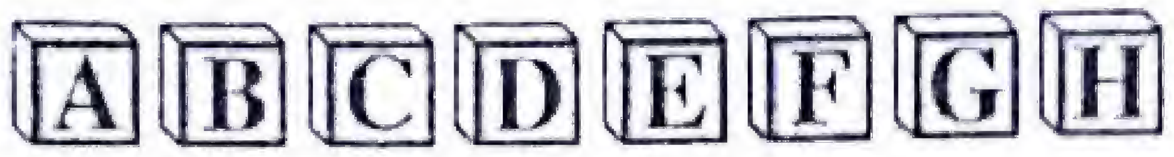
a) igual, b) mitad, c) doble, d) triple, e) cuádruple



PE-3.05. *Armando Torres*

Un niño dispone de 8 cubos de lado L y de peso mg cada uno. Los cubos se encuentran inicialmente a nivel del suelo. ¿Cuál será el trabajo que debe realizar el niño para armar una columna con los 8 cubos?

a) $7mgL$ b) $8mgL$ c) $14mgL$ d) $21mgL$ e) $28mgL$



PE-3.06. *Desenrolla la manguera*

Una manguera flexible de 10 m de largo es desenrollada jalándola por un extremo por una superficie horizontal sin fricción. La manguera tiene una masa por unidad de longitud de 0,25 kg/m.

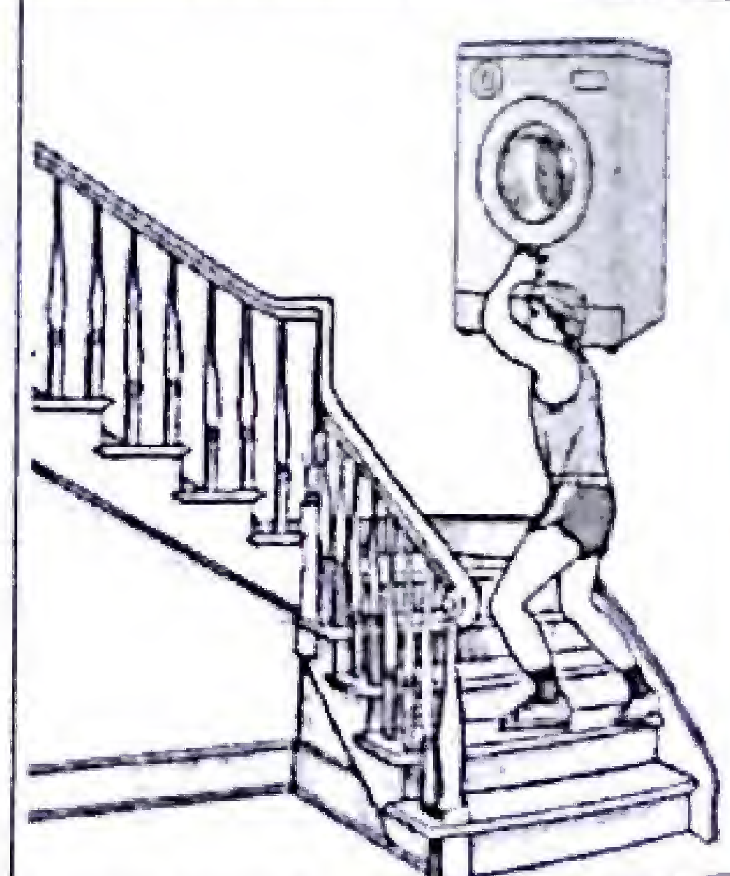
¿Cuál es el trabajo que se realiza sobre la manguera cuando se aplica una fuerza para desplazarla horizontalmente por el piso a una rapidez constante de 2 m/s?

a) cero
b) 2,5 J
c) 5 J
d) 7,5 J
e) 15 J

PE-3.07. *El ascensor no funciona*

Un hombre sube por la escalera de un edificio llevando a cuestas una lavadora que pesa 500 N. Cuando llega al octavo piso se da cuenta que se había equivocado de edificio y regresa de nuevo hasta la planta baja.
Si el octavo piso está a 20 m de altura, el trabajo neto que realizó el hombre durante todo el recorrido completo fue:

a) +10 000 J b) +20 000 J c) -10 000 J
d) -20 000 J e) cero



PE-3.08. *Lanzamiento desde lo alto del plano*

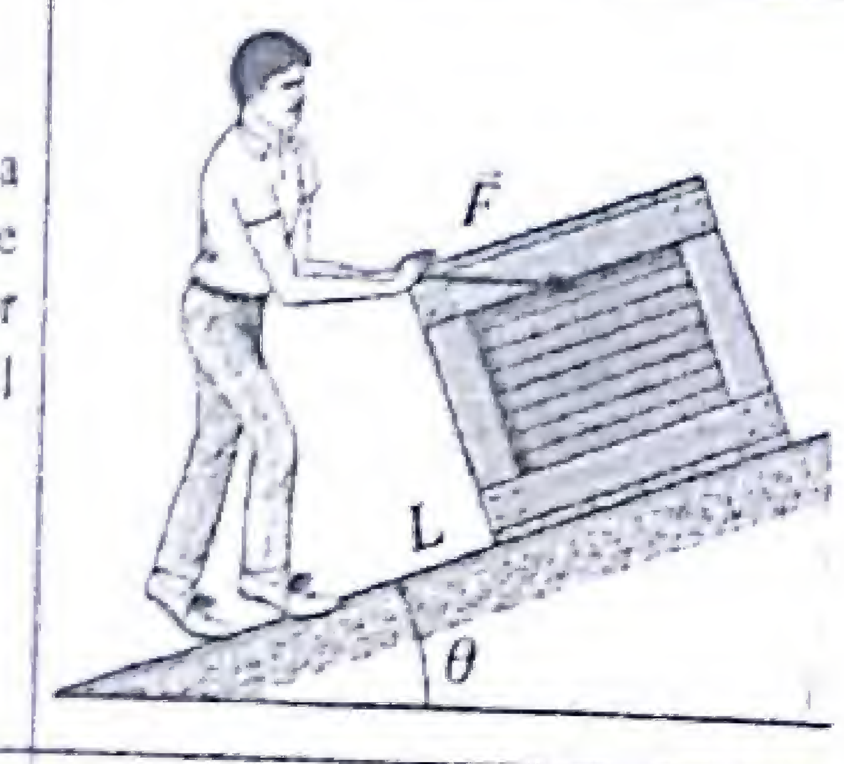
Cuando un bloque parte del reposo desde lo alto de un plano inclinado sin rozamiento, se observa que llega al pie del plano con una velocidad de 3 m/s. Si se lanza el bloque desde lo alto del mismo plano inclinado con una velocidad inicial de 4 m/s, ¿cuál será su velocidad al llegar al pie del plano?

a) 4,5 m/s
b) 5 m/s
c) 6 m/s
d) 7 m/s
e) 8 m/s

PE-3.09. *Empujar el cajón de esa manera da trabajo*

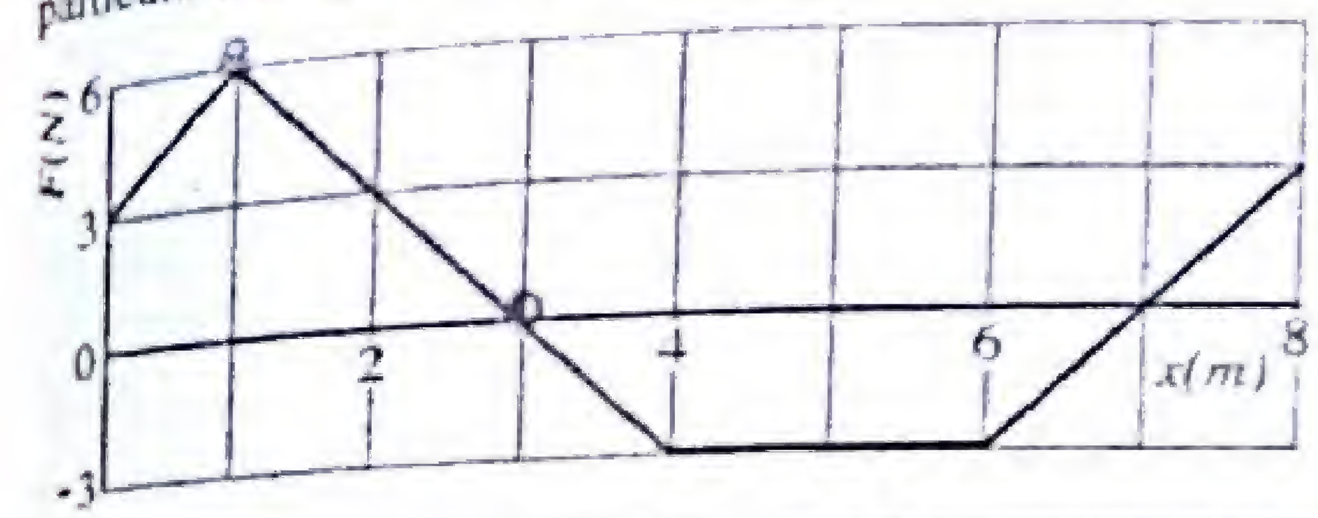
Un trabajador empuja un cajón por una rampa que forma un plano inclinado de longitud $L = 5$ m, y ángulo de inclinación $\theta = 36,9°$. El cajón pesa 300 N y el trabajador aplica una fuerza *horizontal* constante de 250 N. El trabajo efectuado por el trabajador al subir el cajón es:

a) 1000 J b) 1250 J c) 750 J
d) 900 J e) 1500 J



PE-3.10. *¿Dónde alcanza la mayor energía cinética?*

La gráfica muestra la fuerza neta que actúa sobre una partícula a lo largo del eje x en el intervalo de 0 a 8 m.

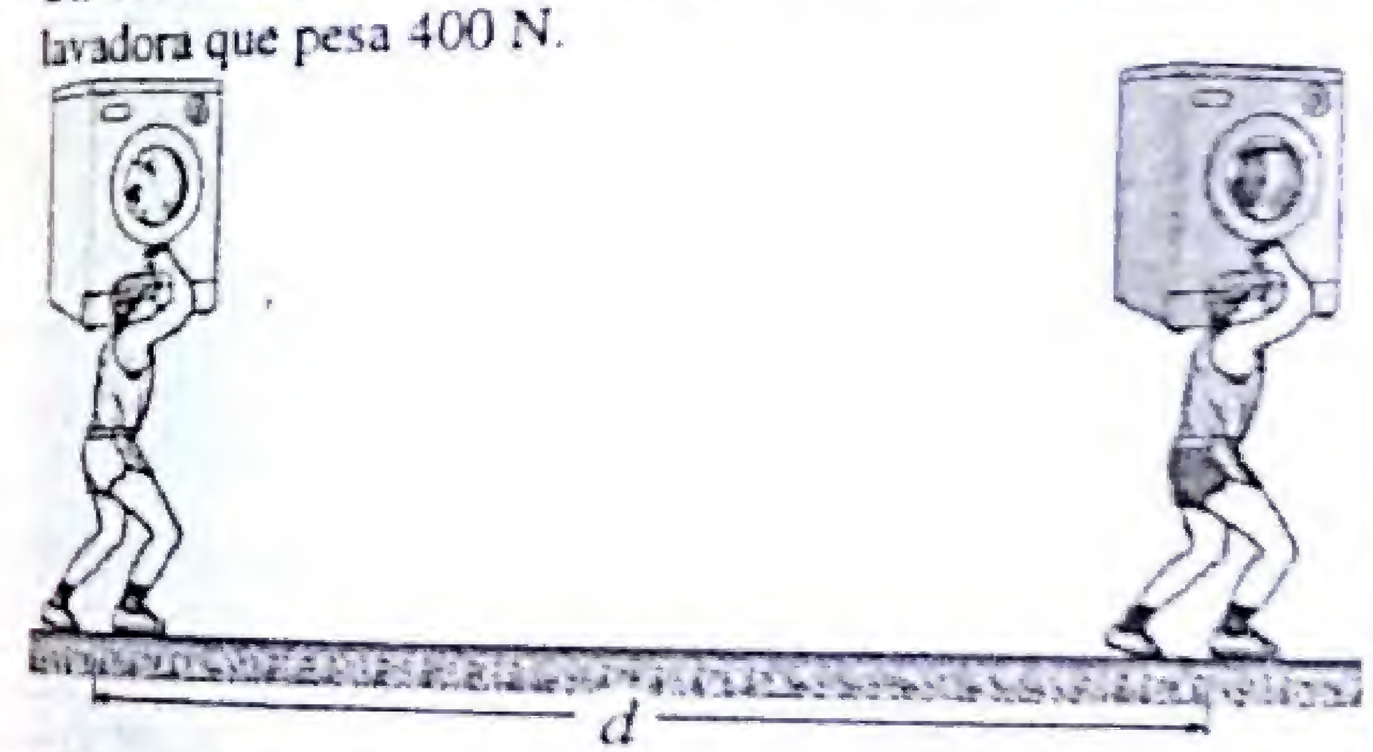


Si la partícula parte del reposo en $x = 0$, la mayor energía cinética la alcanza la partícula:

a) En $x = 1$ m.
b) En $x = 3$ m.
c) En $x = 5$ m.
d) En $x = 7$ m.
e) En $x = 8$ m.

PE-3.11. *Trabajo para trasladar una lavadora*

Un estudiante camina horizontalmente cargando una lavadora que pesa 400 N.



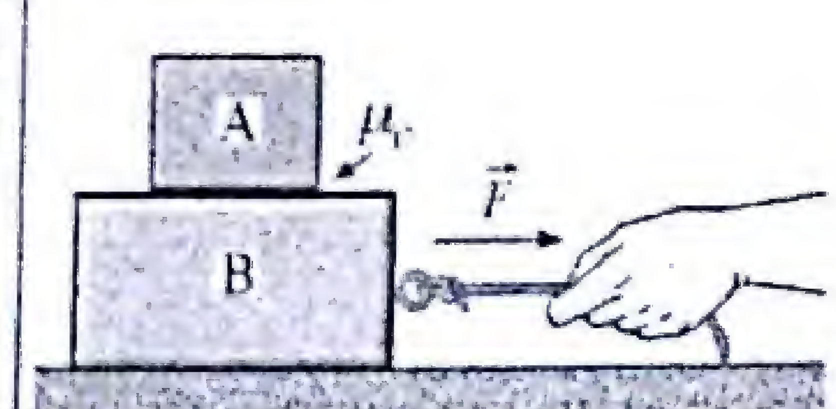
Cuando se ha trasladado una distancia horizontal $d = 5$ m, a velocidad constante el trabajo realizado por el estudiante será:

a) + 2000J
b) + 2000W
c) - 2000J
d) - 2000W
e) cero

PE-3.12. *¿Será negativo el trabajo de la fricción?*

Un bloque A se coloca sobre otro bloque, B de modo que cuando jalamos el bloque B, la fuerza de fricción cinética entre los dos bloques hace que A deslice sobre B. El trabajo de la fuerza de fricción cinética es...

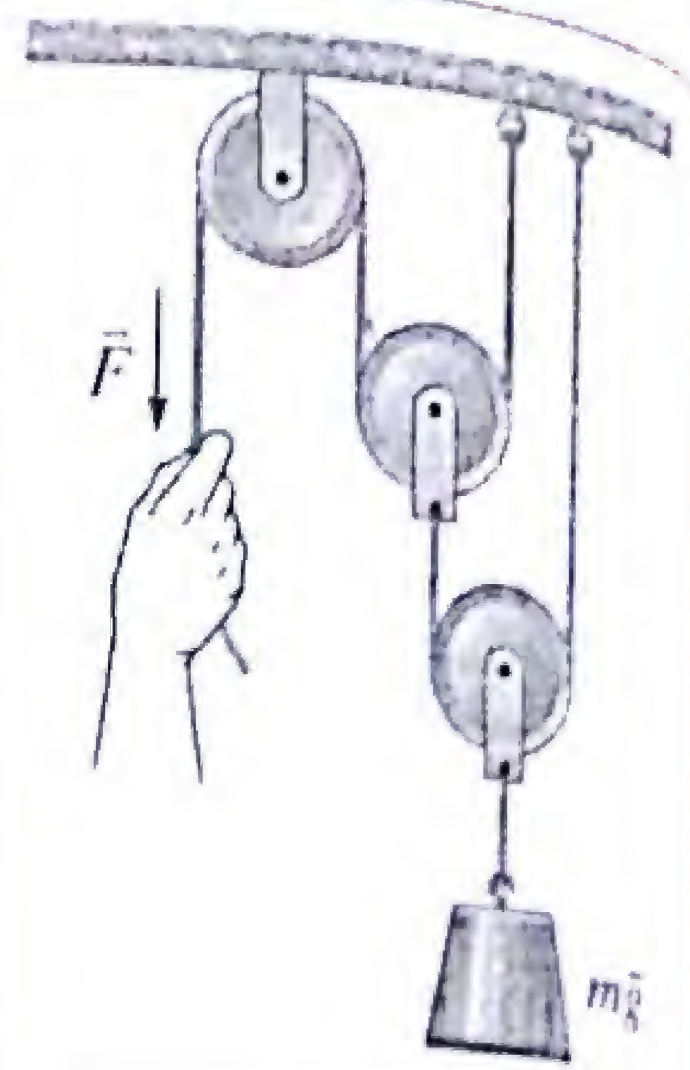
a) positivo sobre ambos bloques.
b) negativo sobre ambos bloques.
c) negativo sobre A y positivo sobre B.
d) positivo sobre A y negativo sobre B.



PE-3.13. *Ventaja mecánica con tres poleas*

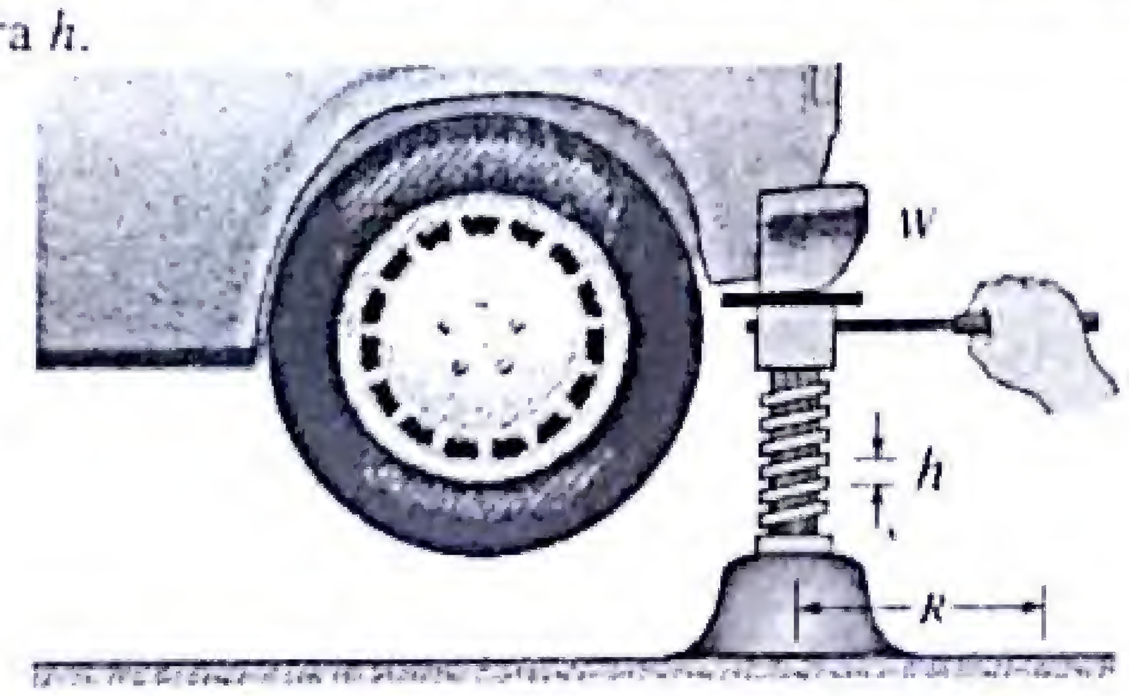
Un trabajador de la construcción utiliza el sistema de poleas mostrado para levantar un peso mg hasta una cierta altura h. Si hubiera tenido que efectuar esta operación levantando directamente el peso hasta esa altura, la fuerza que hubiera tenido que aplicar sería:

a) 2 veces mayor
b) 3 veces mayor
c) 4 veces mayor
d) 6 veces mayor
e) 8 veces mayor



PE-3.14. *Ventaja mecánica de un gato*

En la operación de un gato, una fuerza horizontal es aplicada al mango en un punto a distancia R del eje. Para cada vuelta completa la carga W es levantada en una altura h.



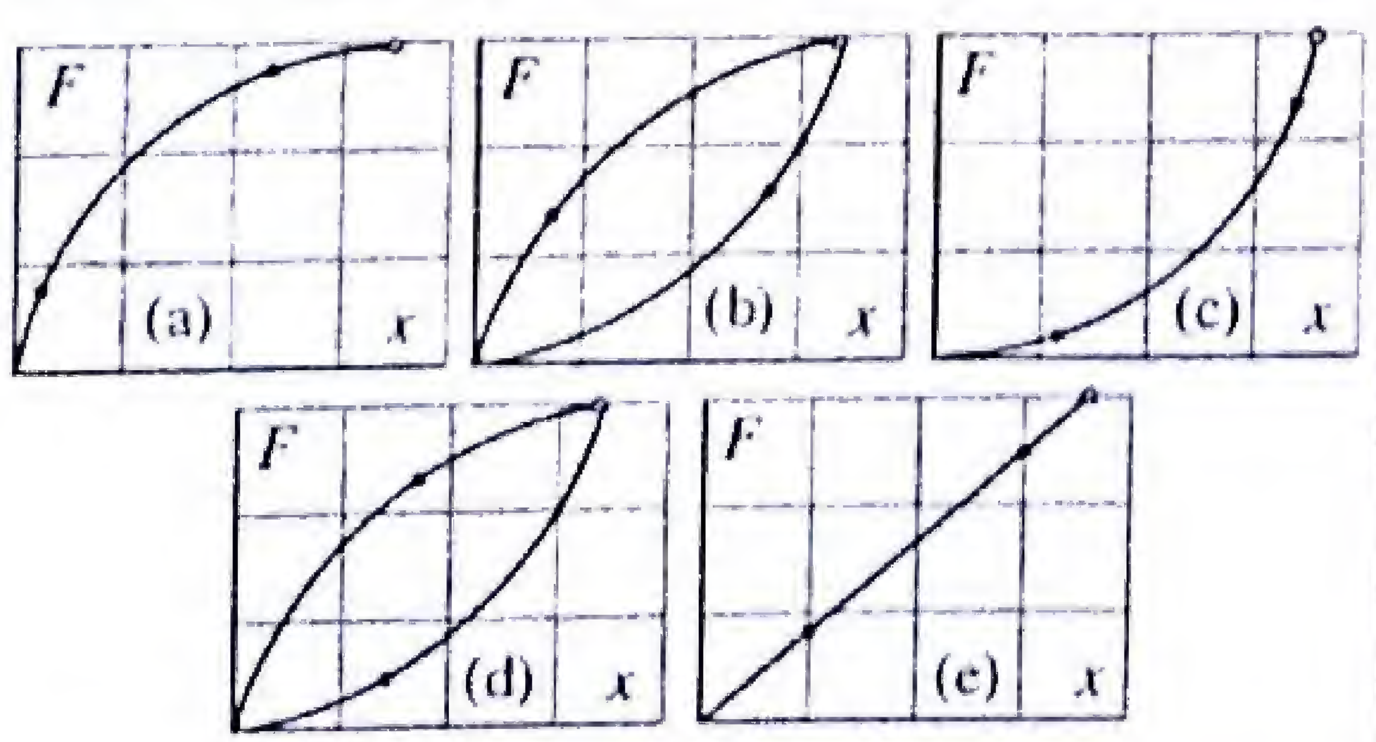
Si se desprecia el rozamiento, la ventaja mecánica del gato es

a) $2\pi R/h$
b) R/h
c) $\pi R/h$
d) $R/2\pi h$
e) $h/2\pi R$

PE-3.15. *Choque de un bloque con un resorte*

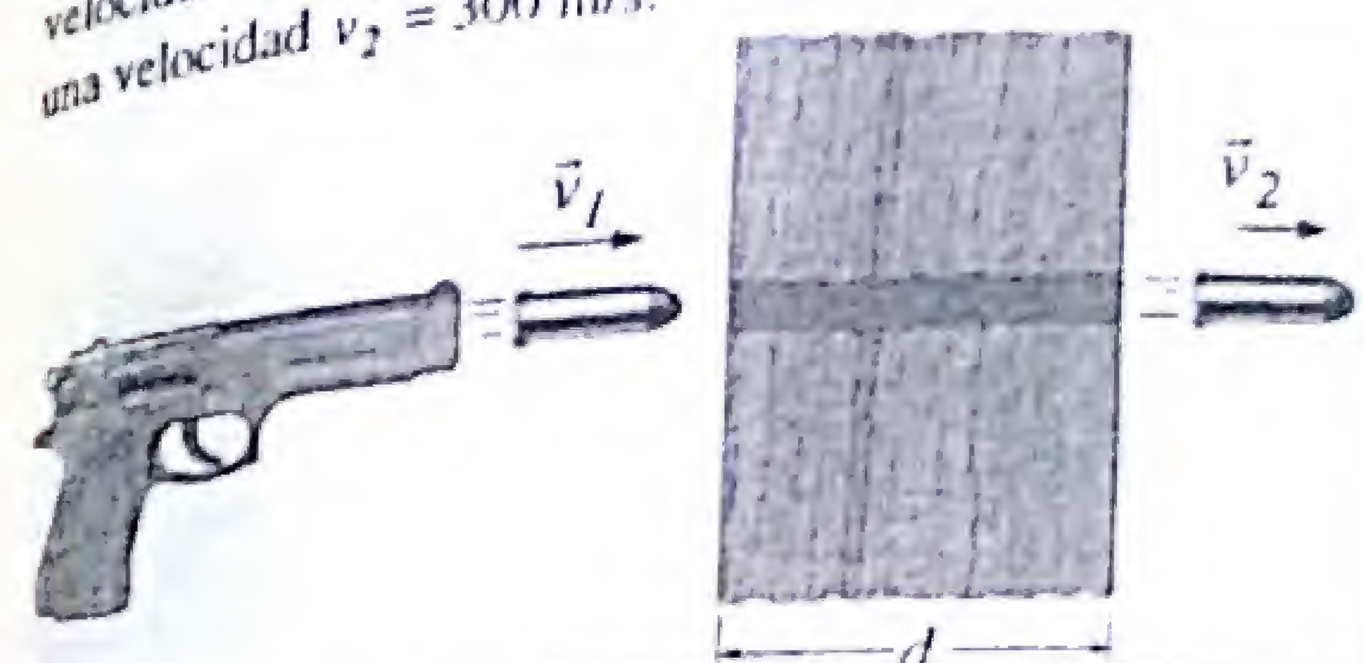
Un bloque moviéndose con cierta velocidad en una mesa sin fricción choca con un resorte fijo en un extremo y rebota del resorte con una velocidad menor.

¿Cuál de los gráficos mostrados representa mejor la dependencia de la fuerza de compresión del resorte, F en función de su deformación x durante la colisión?



PE-3.16. *Bloque de madera atravesado por una bala*

Una bala se dispara contra un bloque de madera con una velocidad $v_1 = 400$ m/s. La bala sale por otro lado con una velocidad $v_2 = 300$ m/s.



Si la misma bala se hubiese disparado a una velocidad de 300 m/s, la velocidad de salida hubiese sido:

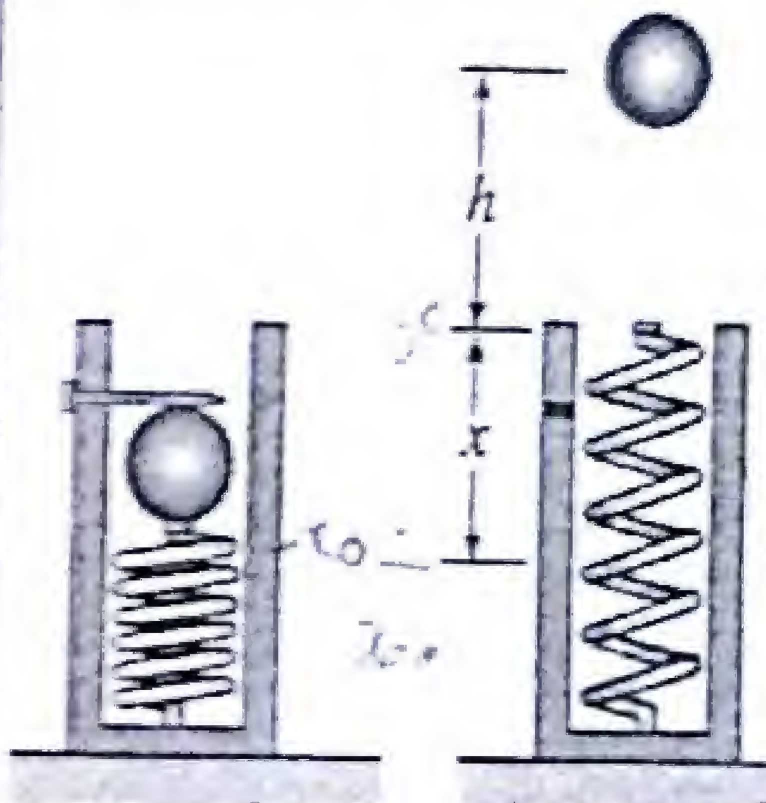
a) 200 m/s
b) 175 m/s
c) 141 m/s
d) 150 m/s
e) 100 m/s

PE-3.17. *Lanzando pelotas con un resorte*

Un resorte que obedece la ley de Hooke, es comprimido una distancia x. Cuando se libera el resorte, una pelota sale disparada verticalmente hacia arriba, alcanzando una altura h. Para que el proyectil alcance una altura $2h$, el resorte debería comprimirse una distancia:

a) $3x$ b) $2\sqrt{2}x$ c) $2x$

d) $\sqrt{2}x$ e) $4x$

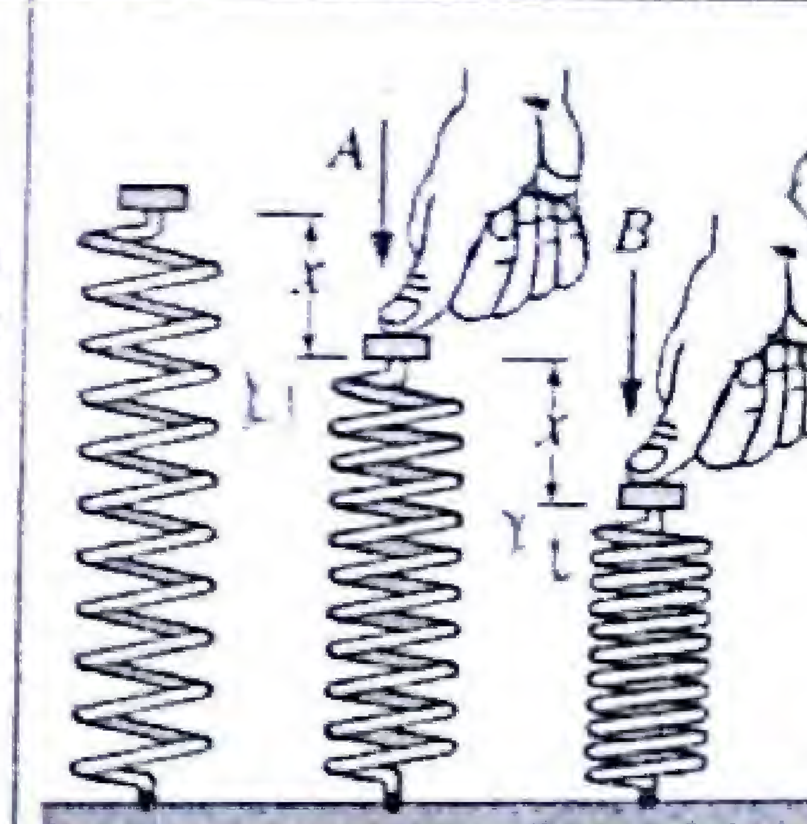


PE-3.18. *Dos compresiones consecutivas a un resorte*

Un resorte se comprime una distancia x desde su posición de equilibrio y luego se comprime una distancia x adicional. ¿Qué relación hay entre el segundo trabajo de compresión y el primero?

a) $W_B/W_A = 1$ b) $W_B/W_A = 2$ c) $W_B/W_A = 3$

d) $W_B/W_A = 4$ e) $W_B/W_A = 8$



PE-3.19. *Igual fuerza en resortes de diferente rigidez*

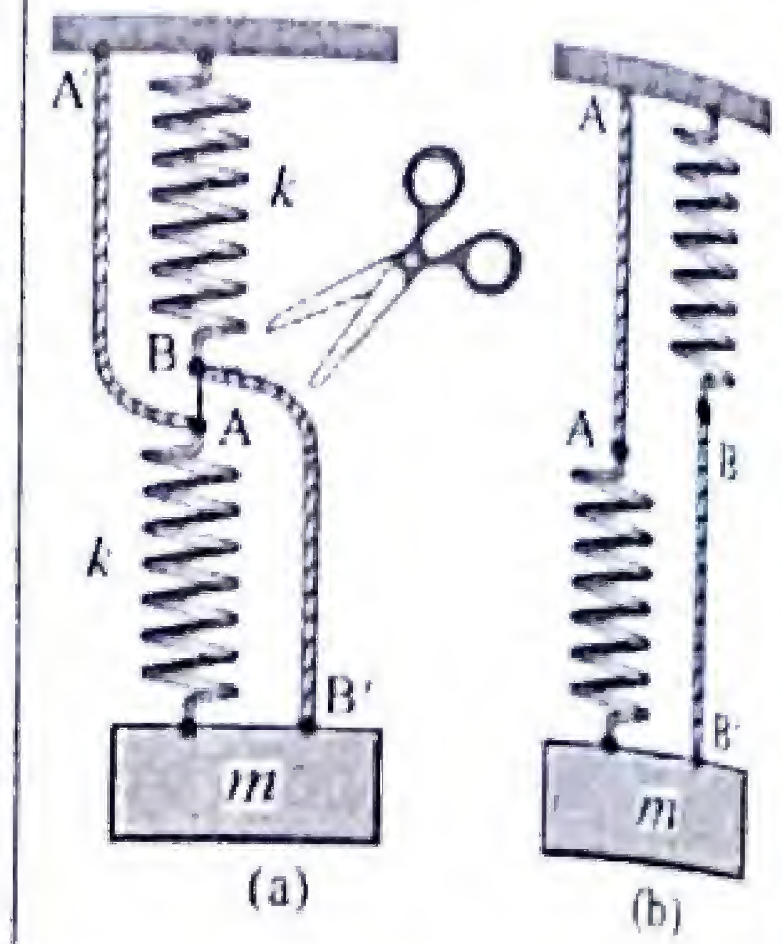
Dos resortes A y B son idénticos, excepto que el resorte A es más rígido que el resorte B, ($k_A > k_B$). Si los dos resortes son estirados por la misma fuerza, ¿sobre cuál de los resortes se realiza mas trabajo?

a) $W_A < W_B$, b) $W_A > W_B$, c) $W_A = W_B$

PE-3.20. ¿Subirá, bajará o quedará a igual altura?

Un bloque de masa m se encuentra suspendido de dos resortes idénticos de constante k, conectados en serie mediante un trozo de hilo pequeño, AB. Al lado de cada resorte estirado se amarran sendos hilos AA' y BB', de longitudes ligeramente mayores a las de los resortes, de tal manera que los hilos queden flojos, como se indica en la figura (a). ¿Qué sucederá a la posición final del bloque si cortamos el pequeño trozo de hilo AB?

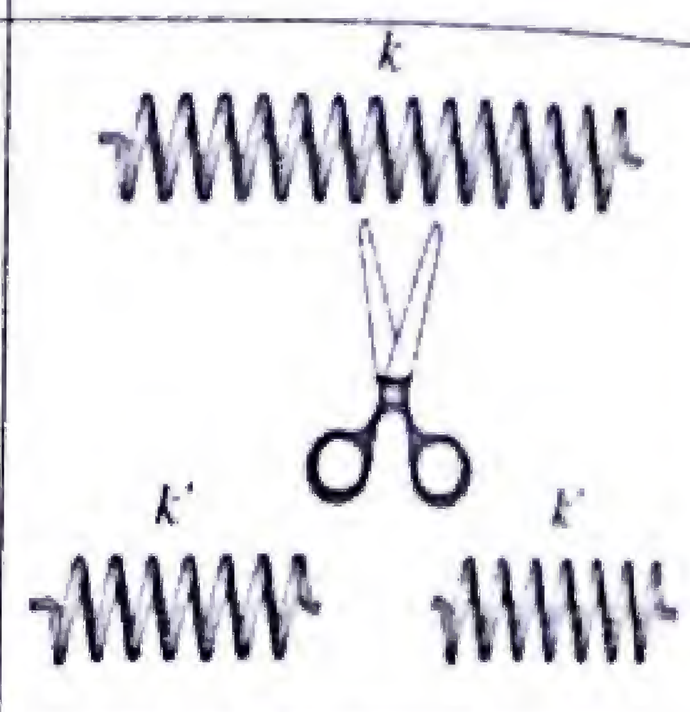
a) El bloque baja,
b) El bloque sube,
c) El bloque queda a igual altura



PE-3.21. Cortando un resorte en dos pedazos iguales

Si usted corta un resorte de constante elástica k en dos partes iguales, cualquiera de las dos mitades del resorte tendrá una constante elástica de valor:

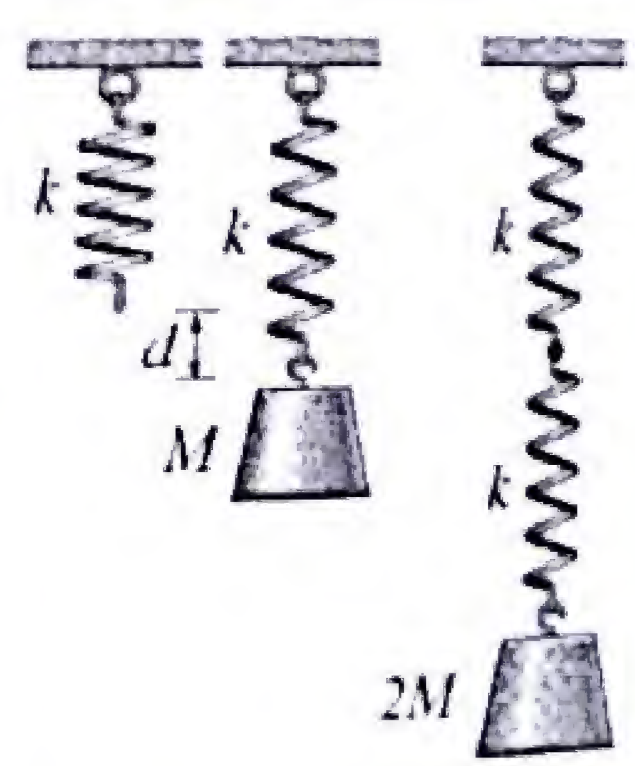
a) $k' = 4k$, b) $k' = k/4$, c) $k' = k$,
d) $k' = k/2$, e) $k' = 2k$



PE-3.22. Dos resortes para una masa doble

Cuando se suspende una pesa de masa M de un resorte de constante k, la pesa desciende una distancia d. Suponga ahora que se suspende una pesa de masa $2M$ del extremos inferior de dos resortes idénticos al anterior, conectados en serie. ¿Qué distancia desciende la pesa?

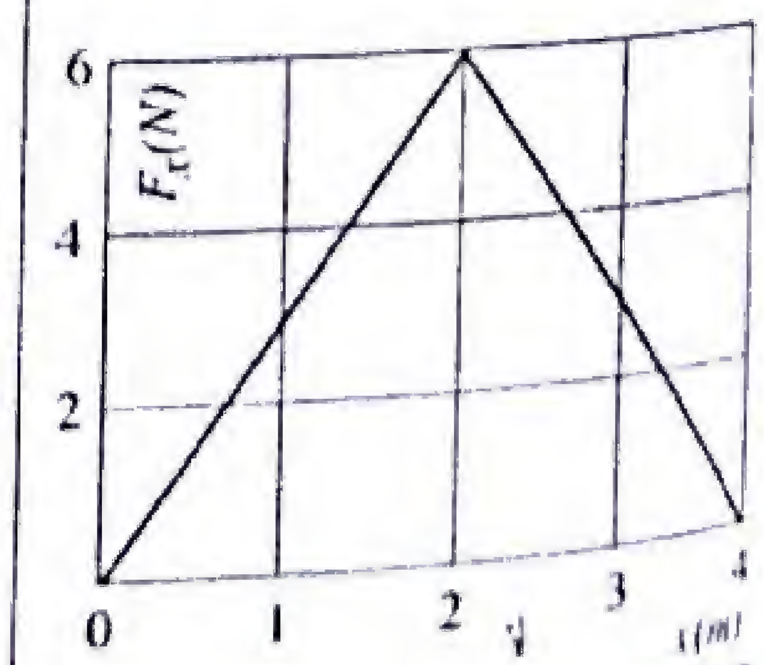
a) $d/2$, b) d, c) $2d$,
d) $4d$, e) $8d$



PE-3.23. Trabajo realizado por una fuerza variable

Una partícula de masa $m = 2$ kg que se desplaza con una velocidad $v = 2$ m/s cuando se encuentra en $x = 0$, es sometida a una fuerza que varía con la posición, como se muestra en la gráfica. ¿Cuál será la velocidad de la partícula cuando pasa por la posición $x = 4$ m

a) cero, b) 4 m/s c) 6 m/s d) 8 m/s e) 16 m/s



PE-3.24. Potencia para fuerza proporcional al tiempo

Una partícula de masa m parte del reposo en $x = 0$ y se le aplica una fuerza en la dirección del eje x que aumenta en forma proporcional al tiempo transcurrido:

$$F = At \quad \text{newtons}$$

Siendo A una constante.,

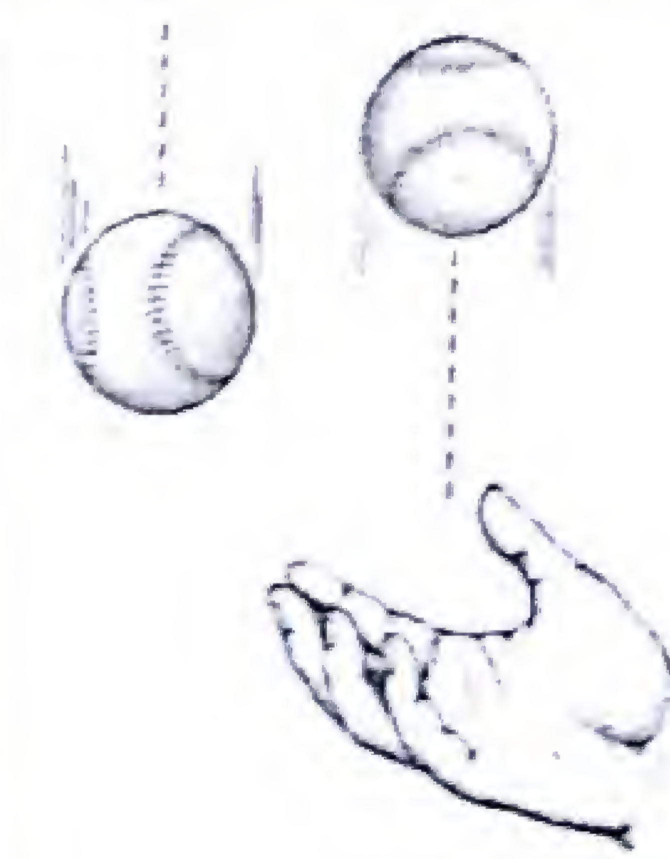
El trabajo realizado al cabo de un tiempo t es proporcional a:

a) t, b) t^2,
c) t^3 d) $\sqrt{t}$
e) t^4

PE-3.25. Tiempo de subida versus tiempo de bajada

Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba. Si además del trabajo de la fuerza de gravedad, se tiene en cuenta el trabajo de la fuerza de *fricción* que presenta el aire y comparamos el tiempo de bajada con el de subida, podemos asegurar que:

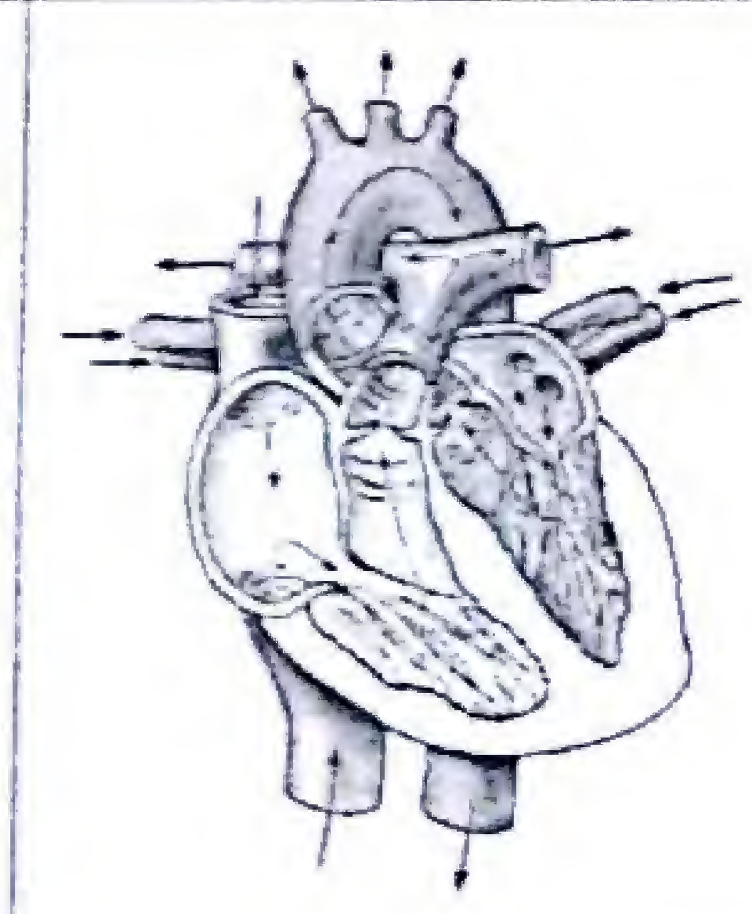
a) la pelota tarda igual tiempo en bajar que en subir
b) la pelota tarda mas tiempo en bajar que en subir
c) la pelota tarda menos tiempo en bajar que en subir
d) no se puede predecir el resultado.



PE-3.26. El corazón humano: una bombita potente

El corazón humano es una bomba muy fiable que en promedio cada día admite y descarga unos 7500 Litros de sangre. Suponga que el trabajo que realiza es igual al requerido para levantar esa cantidad de sangre de una persona de altura $h = 1,68$ metros. La densidad de la sangre es 1.05×10^3 kg/m^3. ¿Cuál es su potencia en watts?

a) 0, 025 W, b) 0,1 W, c) 1,5 W, d) 15 W, e) 50 W



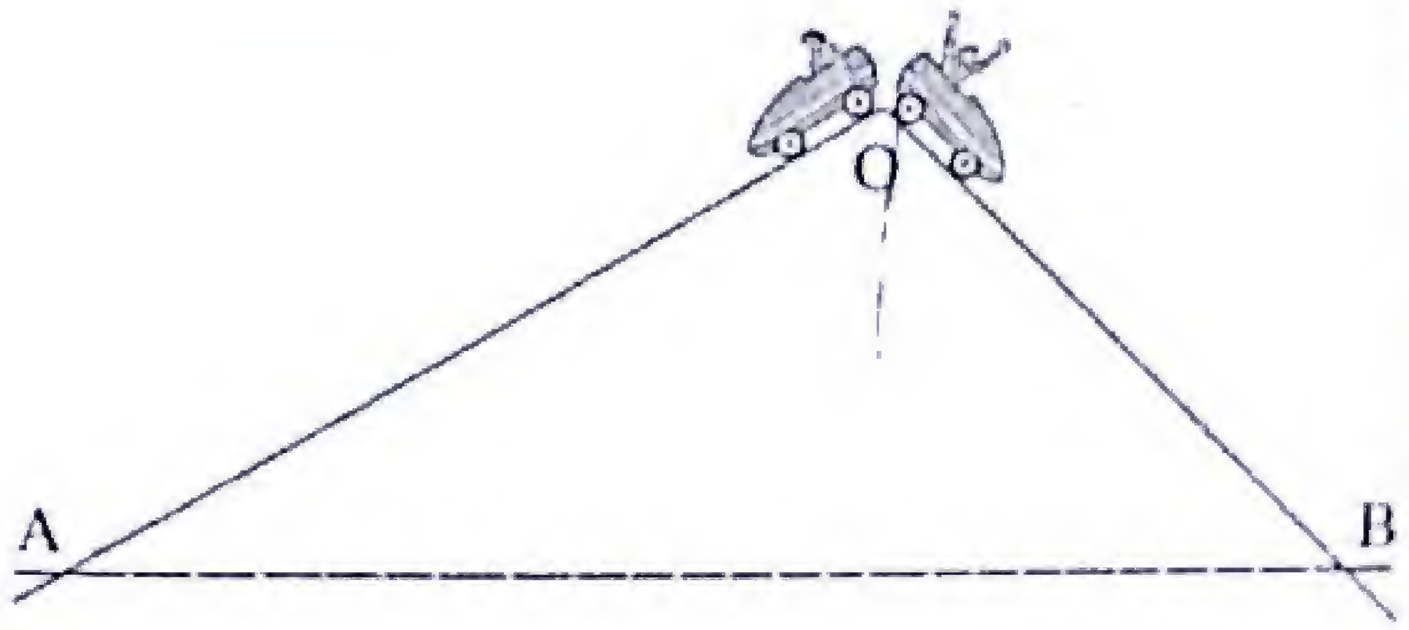
PE-3.27. Potencia para vencer la fuerza de arrastre

Un esquiador de masa $m = 60$ kg es remolcado en línea recta en el agua a una velocidad $v = 15$ m/s. Si la fuerza de arrastre que se opone a su movimiento es $F_a = 120$ N la potencia que hay que aplicarle a la cuerda es:

a) 1800 W, b) 480 W, c) 120 W, d) 30 W, e) 8 W

PE-3.28. *¿Cuál llega primero, cuál con mas velocidad?*

Desde un mismo punto O y sobre dos planos inclinados de pendientes diferentes, se dejan caer a la vez dos carritos idénticos.



Si consideremos los puntos A y B situados sobre la misma horizontal, y comparamos tanto los tiempos de caída como las velocidades respectivas cuando pasan por esos puntos, entonces

a) $t_A = t_B$ y $v_A = v_B$
b) $t_A > t_B$ y $v_A > v_B$
c) $t_A < t_B$ y $v_A < v_B$
d) $t_A > t_B$ y $v_A = v_B$
e) $t_A = t_B$ y $v_A < v_B$

CAP. 3: *RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS*

	a	b	c	d	e
3.01	✓				
3.03				✓	
3.05					✓
3.07					✓
3.09	✓				
3.11					✓
3.13			✓		
3.15		✓			
3.17				✓	
3.19	✓				
3.21					✓
3.23		✓			
3.25		✓			
3.27	✓				

	a	b	c	d	e
3.02					✓
3.04				✓	
3.06			✓		
3.08		✓			
3:10		✓			
3.12				✓	
3.14	✓				
3.16			✓		
3.18			✓		
3.20		✓			
3.22				✓	
3.24					✓
3.26			✓		
3.28				✓	

4

CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

La conservación de la energía es un principio fundamental de importancia crucial en la física y de profunda trascendencia en la naturaleza. Dentro de un sistema podemos distinguir dos tipos de fuerzas: las conservativas y las no conservativas. Se dice que una fuerza es *conservativa* si el trabajo que efectúa depende únicamente de las posiciones inicial y final del objeto y no de la trayectoria seguida. Ya vimos dos ejemplos de fuerzas conservativas: la fuerza de gravedad y la fuerza elástica de un resorte. También existen fuerzas no conservativas, como la fricción, cuyo trabajo depende de la trayectoria seguida por el objeto. Las fuerzas conservativas se distinguen por la posibilidad de almacenar energía a partir de la configuración de las partes del sistema. La energía almacenada de esta manera es llamada *energía potencial*. En cualquier sistema aislado de objetos que interactúan por fuerzas conservativas, la energía puede ser convertida de cinética a potencial y viceversa, pero la suma de estas (la energía mecánica) permanece constante. En una situación real siempre habrá fuerzas *no conservativas* o *disipativas*, como la fricción. El trabajo de las fuerzas de fricción disminuye la energía mecánica y está acompañada por la aparición de energía térmica, que a nivel microscópico no es más que energía cinética de los átomos y moléculas en movimiento aleatorio, y se manifiesta mediante un aumento de temperatura. Cuando se toman en cuenta todas las formas posibles de energía, la energía total de un sistema mas la de su entorno, no varía, aunque esté presente la fricción. Esto constituye el principio de conservación de la energía.

En este capítulo Ud. encontrará aspectos relacionados con:

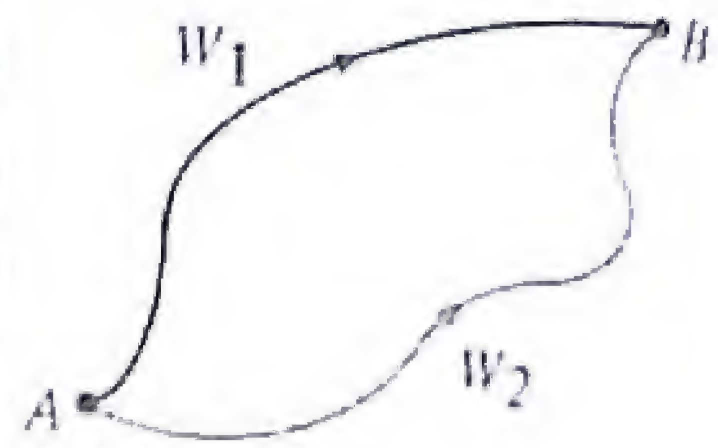
- Fuerzas conservativas y fuerzas no-conservativas
- Energía potencial
- Energía potencial gravitacional
- Energía elástica de un resorte
- La energía mecánica y su conservación
- Fuerza como derivada de la energía potencial
- Diagramas de energía potencial y equilibrio.

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

FUERZAS CONSERVATIVAS

Podemos distinguir dos tipos de fuerzas: las *conservativas* y las *no conservativas*. Una fuerza es conservativa si el trabajo que efectúa sobre un objeto que se mueve desde una posición inicial cualquiera, A, hasta otra final, B, depende únicamente de estas dos posiciones y no de la trayectoria particular seguida por el objeto.

Si consideramos los dos caminos arbitrarios que van desde un punto A hasta un punto B, el trabajo realizado por una fuerza conservativa es el mismo indistintamente si el objeto sigue el camino 1 o el camino 2.



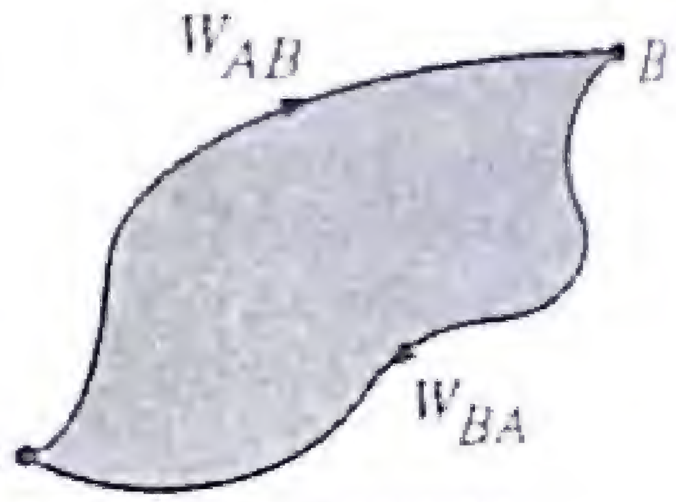
Fuerza conservativa: el trabajo no depende del camino

$$W_1 = W_2$$

Una definición equivalente es: Una fuerza es conservativa si el trabajo neto que efectúa es cero para un objeto que se mueve a lo largo de cualquier trayectoria cerrada.

Supongamos que el objeto va desde A hasta B por la ruta 1, siendo el trabajo realizado, W_{AB}. Si regresamos de B a A por la misma ruta, en cada punto la fuerza es la misma pero el desplazamiento $d\vec{r}$ tiene dirección opuesta, de ahí que el correspondiente aporte $dW = \vec{F} \bullet d\vec{r}$ tenga signo opuesto al que tenía antes y como resultado al calcular el trabajo total: $W_{BA} = -W_{AB}$. Como el trabajo no depende del camino, si se regresa desde B hasta A, por otra ruta como la 2, el trabajo sigue valiendo $W_{BA} = -W_{AB}$. Por lo tanto, el trabajo neto realizado para ir desde A hasta B y regresar de nuevo a A es:

$$W_{ABA} = W_{AB} + W_{BA} = W_{AB} + (-W_{AB}) = 0$$



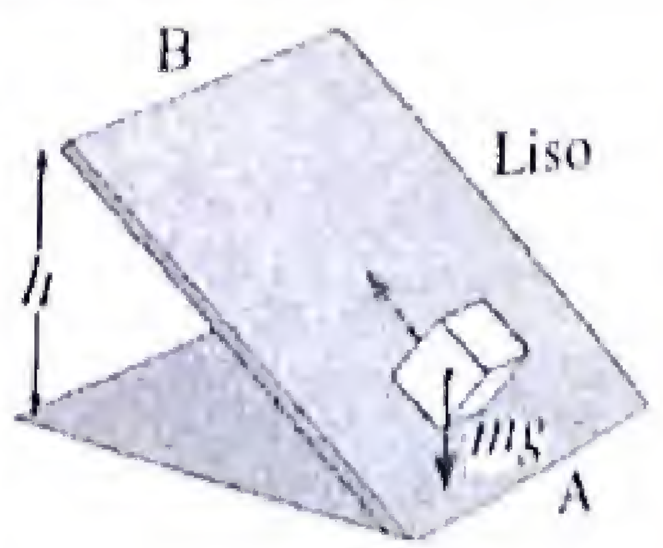
Camino cerrado
$W_{BA} = -W_{AB}$

Fuerza conservativa:
En un viaje de ida y vuelta no efectúa trabajo

$$W_{ABA} = \oint \vec{F} \bullet d\vec{r} = 0$$

La gravedad es una fuerza conservativa. Vimos en varios ejemplos del capítulo anterior, que el trabajo efectuado por la gravedad no dependía de la trayectoria seguida sino, únicamente de la diferencia entre la altura final y la altura inicial. Si consideramos un bloque que es lanzado hacia arriba de un plano inclinado "liso", de altura h, el trabajo efectuado por la gravedad sobre el bloque en el viaje de subida es $-mgh$ y durante el regreso es $+mgh$. Por lo tanto, el trabajo neto realizado en el viaje de ida y vuelta es cero.

$$W_{ABA} = (-mgh) + (mgh) = 0$$



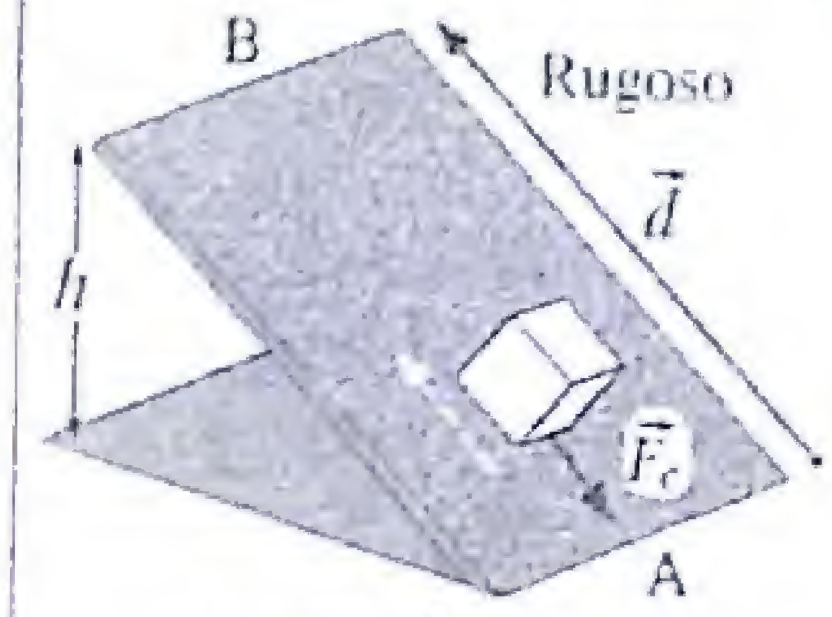
Fuerza de gravedad:
Conservativa $W_{ABA} = 0$

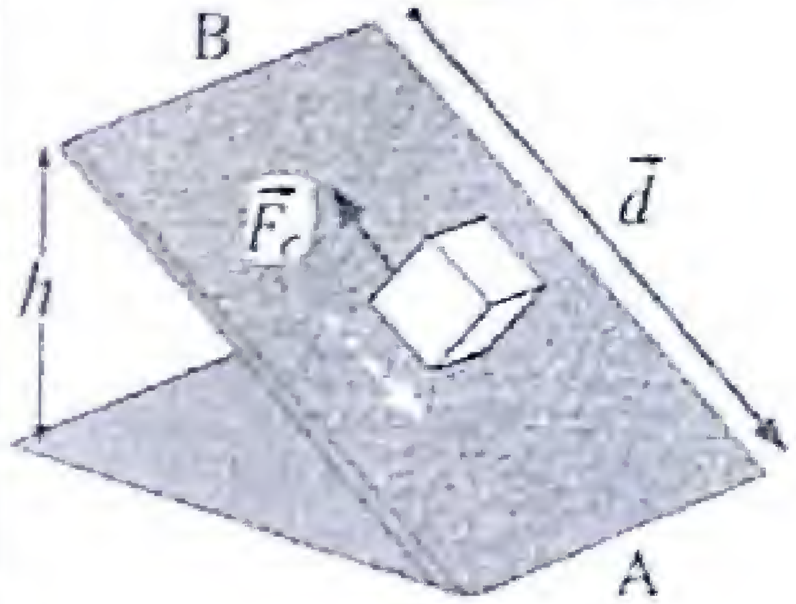
FUERZAS NO-CONSERVATIVAS

La fricción es la fuerza no-conservativa mas común que encontramos en los problemas de mecánica. En el ejemplo anterior, del bloque que es lanzado hacia arriba del plano inclinado *liso*, la única fuerza que actúa sobre el bloque en la dirección del desplazamiento es la componente de la gravedad, y el bloque regresa al punto de partida con la misma energía cinética que tenía originalmente, es decir, *la energía cinética se conserva*.

Supongamos ahora que el plano inclinado es *rugoso*. Cuando el bloque es lanzado hacia arriba, la fuerza de fricción cinética, $\vec{F}_c$, tiene sentido opuesto al desplazamiento $\vec{d}$. El trabajo de esta fuerza será negativo tanto en la subida ($W_{AB} = -F_c d$), como en la bajada ($W_{BA} = -F_c d$). No hay cancelación posible y el trabajo neto en el viaje completo de ida y vuelta, W_{ABA}, es distinto de cero. Por lo tanto, *la fuerza de fricción cinética es no-conservativa*. El bloque al regresar a la posición original *no recupera la energía cinética* que tenía al comienzo.

$$W_{ABA} = -2F_c d \neq 0$$





Fuerza no-conservativa: efectúa un trabajo en viaje de ida y vuelta
$W_{ABA} \neq 0$

ENERGÍA POTENCIAL

A una fuerza conservativa es posible asociarle una función escalar llamada *energía potencial*. Si una fuerza conservativa actúa sobre un objeto que se mueve entre los puntos A y B, definimos el cambio en la energía potencial como *el valor negativo del trabajo realizado por esa fuerza*.

$$\Delta U = U_B - U_A = -W_{AB} = -\int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{r}$$

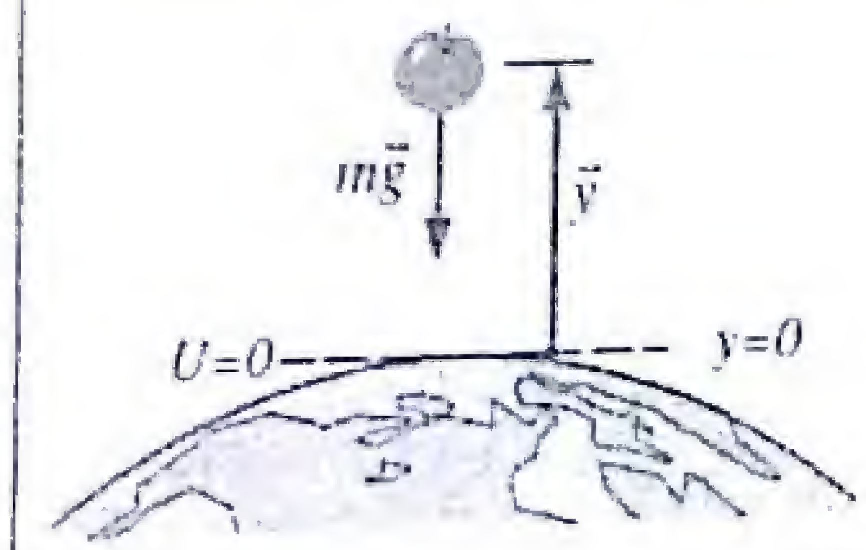
La energía potencial es la energía almacenada a causa de la posición relativa de dos o mas cuerpos que interactúan.

$$U_B - U_A = -\int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{r}$$

El cambio en la energía potencial es el negativo del trabajo hecho por la fuerza conservativa

ENERGÍA POTENCIAL GRAVITACIONAL

Cerca de la superficie terrestre la fuerza de gravedad tiene magnitud constante y apunta verticalmente hacia abajo. La variación en la energía potencial de un objeto es el negativo del trabajo hecho por la fuerza gravitacional.



$$U_B - U_A = -\int_A^B (-mg\hat{y}) \bullet \hat{y} = mg \int_{y_A}^{y_B} dy = mg(y_B - y_A)$$

Si escogemos el origen $y = 0$ en la superficie terrestre con $U(0) = 0$, la energía potencial gravitacional a una altura y es:

$$U(y) = mgy$$

Energía potencial gravitacional cerca de la superficie terrestre

$$U(y) = mgy$$

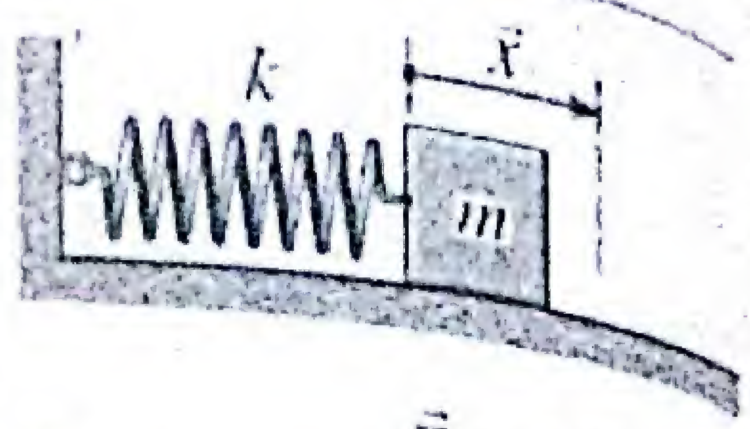
ENERGÍA POTENCIAL ELÁSTICA

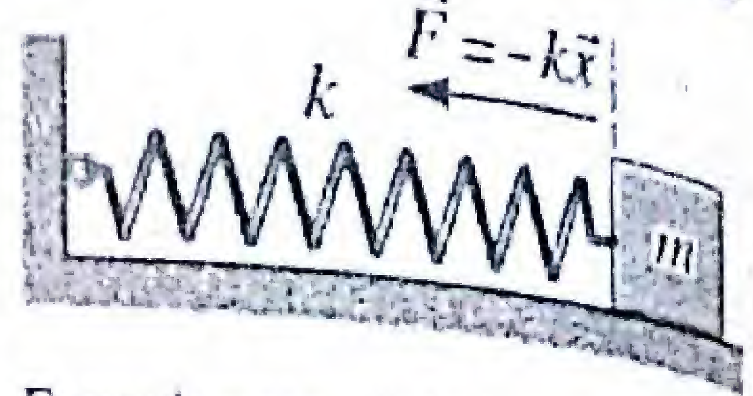
Energía potencial también puede ser almacenada en un objeto tal como un resorte en virtud de su deformación. La fuerza que ejerce un resorte es opuesta al alargamiento: $F = -kx$. El cambio de energía potencial del objeto al moverlo desde cero hasta x es el negativo del trabajo hecho por el resorte sobre el objeto cuando se desplaza desde x_A hasta x_B:

$$\Delta U = -\int_A^B \vec{F}(x) \bullet d\vec{x} = -\int_{x_A}^{x_B} (-kx)dx = \frac{1}{2}k(x_B^2 - x_A^2)$$

Si tomamos como referencia en el origen $U(0) = 0$, tenemos:

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$





Energía potencial de un resorte

$$\boxed{U(x) = \frac{1}{2}kx^2}$$

LA ENERGÍA MECÁNICA Y SU CONSERVACIÓN

Supongamos que las únicas fuerzas que realizan trabajo sobre un cuerpo son *conservativas*. Combinando el teorema del trabajo y energía ($W_{cons} = \Delta K$) con la definición de energía potencial ($\Delta U = -W_{cons}$), tenemos:

$$W_{cons} = -\Delta U = +\Delta K$$

Por lo tanto:

$$\Delta K + \Delta U = \Delta(K + U) = 0 \quad \Rightarrow \quad K + U = E = constante$$

Este es el principio de conservación de la energía mecánica: *Si las únicas fuerzas que actúan sobre un sistema son conservativas, la energía mecánica total (cinética mas potencial) permanece constante.*

Principio de conservación de la energía mecánica

$$\boxed{K_A + U_A = K_B + U_B}$$

La energía mecánica total de un sistema aislado permanece constante, en ausencia de fuerzas no-conservativas.

TRABAJO DE FUERZAS NO-CONSERVATIVAS

El cambio de la energía cinética de un objeto depende de todas las fuerzas, tanto de las conservativas como de las no-conservativas. De acuerdo al teorema del trabajo-energía, tenemos:

$$W_{neto} = W_{cons} + W_{nc} = \Delta K$$

Ahora bien, el trabajo efectuado por las fuerzas conservativas cambia la energía potencial del sistema: $W_{cons} = -\Delta U$. Por lo tanto podemos escribir:

$$W_{nc} = \Delta K - W_{cons} = \Delta K - (-\Delta U) = \Delta(K + U)$$

Es decir, el trabajo hecho por las fuerzas no conservativas es igual a la disminución de la energía mecánica.

En un sistema aislado, el trabajo de las fuerzas no conservativas es igual al cambio de la energía mecánica total del sistema

$$\boxed{W_{nc} = \Delta(K + U) = \Delta E}$$

ENERGÍA TÉRMICA

Cuando un objeto se desliza sobre una superficie rugosa, la fuerza de fricción actúa en dirección contraria al movimiento, reduciendo así su energía cinética. La energía cinética que pierde el objeto es transformada en energía interna de los movimientos aleatorios de los átomos y moléculas que lo constituyen. A esta energía transferida se le llama *energía térmica* y se manifiesta por un aumento en la *temperatura* del bloque. Después de un tiempo el bloque se enfría. La energía térmica que adquirió es cedida a su entorno como *calor*, el cual es el mecanismo de transferencia de energía asociado exclusivamente con la diferencia de temperatura entre el bloque caliente y el entorno más frío.

Energía térmica de un cuerpo: La energía cinética aleatoria de sus átomos y moléculas.

Una característica de la energía térmica es que su producción *no es reversible*. Es decir, resulta imposible que los átomos regresen a su estado original cediendo la energía adquirida como energía cinética macroscópica del bloque. En contraste con esto, la energía que se usa para comprimir un resorte se recupera totalmente después que el resorte se vuelve a estirar.

La fricción produce energía térmica que el sistema no recupera

PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

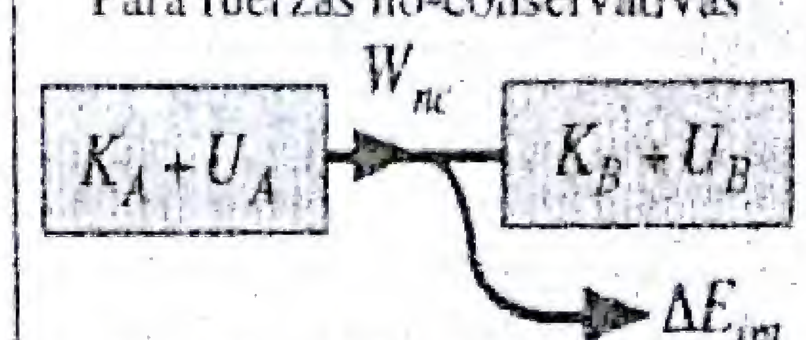
El trabajo efectuado por una fuerza conservativa es recuperable ya que lo que hace es intercambiar la energía entre cinética y potencial de manera tal que su suma (energía mecánica total) siempre se mantiene constante.

Cuando la fuerza es no-conservativa, parte del trabajo efectuado no va al intercambio de energía mecánica sino que se pierde por la fricción o alguna otra causa. Si el sistema está aislado la energía que se pierde se manifiesta como energía cinética de los átomos y moléculas que forman el sistema (energía térmica) y también en energía potencial (de naturaleza eléctrica) a causa de las posiciones relativas de los átomos dentro de las moléculas. La energía de los átomos y moléculas que forman el sistema es la *energía interna*.

Para fuerzas conservativas

$$K_A + U_A = K_B + U_B$$

Para fuerzas no-conservativas



$$K_A + U_A = (K_B + U_B) + \Delta E_{int}$$

Es un hecho experimental que en un *sistema aislado*, cuando se toman en cuenta todas las formas posibles de energía, la energía puede transformarse de una forma a otra, pero la energía total permanece constante:

$$\Delta(K + U + E_{int}) = 0$$

Esto constituye el principio de conservación de la energía.

Conservación de la energía:

$$K + U + E_{int} = \text{Constante}$$

En un sistema aislado, la energía puede ser transformada de una clase a otra, pero no puede ser destruida

FUERZA: DERIVADA DE LA ENERGÍA POTENCIAL

Según la definición de energía potencial, un cambio infinitesimal en la energía potencial, dU, es el negativo del trabajo elemental hecho por una fuerza conservativa $\vec{F}$, durante un desplazamiento infinitesimal $d\vec{r}$:

$$dU = -\vec{F} \bullet d\vec{r}$$

Si consideramos la energía potencial como una función de una sola coordenada, $U(x)$, podemos escribir*:

$$dU = -F_x dx \qquad \Rightarrow \qquad F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

$$\boxed{F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}}$$

Es decir, el trabajo de una fuerza conservativa siempre puede ser representado por una función de energía potencial. *No es así para una fuerza no conservativa.*

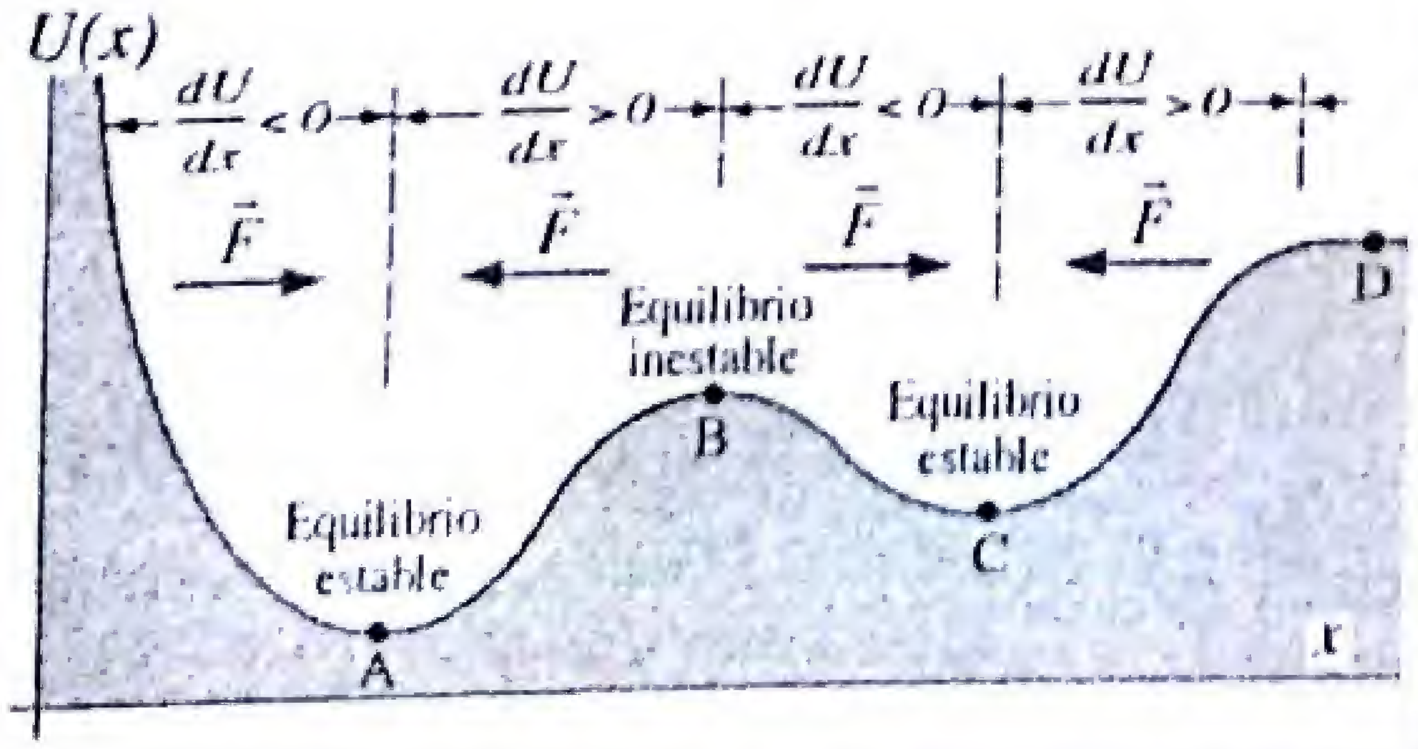
La fuerza conservativa es igual a la derivada negativa de la energía potencial respecto a x

---

* *En 3 dimensiones:* $\vec{F} = -(\hat{x}\frac{\partial U}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial U}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial U}{\partial z})$

DIAGRAMAS DE ENERGÍA Y EL EQUILIBRIO

Para analizar cualitativamente un sistema conservativo resulta muy útil construir una gráfica de U en función de x. Si $U(x)$ es la energía potencial gravitacional, la forma de la curva podría coincidir con el perfil de una pista curva por la cual rueda una pelota.



Pendiente positiva: $\frac{dU}{dx} > 0$

Fuerza hacia la izquierda

Pendiente negativa: $\frac{dU}{dx} < 0$

Fuerza hacia la derecha

Como $F_x = -dU/dx$) los puntos de equilibrio son aquellos donde la pendiente es nula. El carácter del equilibrio podría ser : estable, inestable o neutro (indiferente).

A, B, C, D
Puntos de equilibrio:
Pendiente nula
$F_x = -\frac{dU}{dx} = 0$

1) En puntos como A y C para los cuales $U(x)$ es mínima, el equilibrio es *estable* ya que si la partícula se desplazara ligeramente hacia un lado, la fuerza se dirige hacia el lado contrario y tiende a regresarla a su posición de equilibrio.

2) En un punto como B para el cual $U(x)$ es máxima, el equilibrio es *inestable* ya que si la partícula se apartara ligeramente hacia un lado, la fuerza tiende a alejarla aún mas del punto de equilibrio.

3) En regiones donde U es constante (punto D) hay un equilibrio *neutro* ya que los pequeños desplazamientos de la partícula respecto de esas posiciones no producen ninguna fuerza de restitución.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

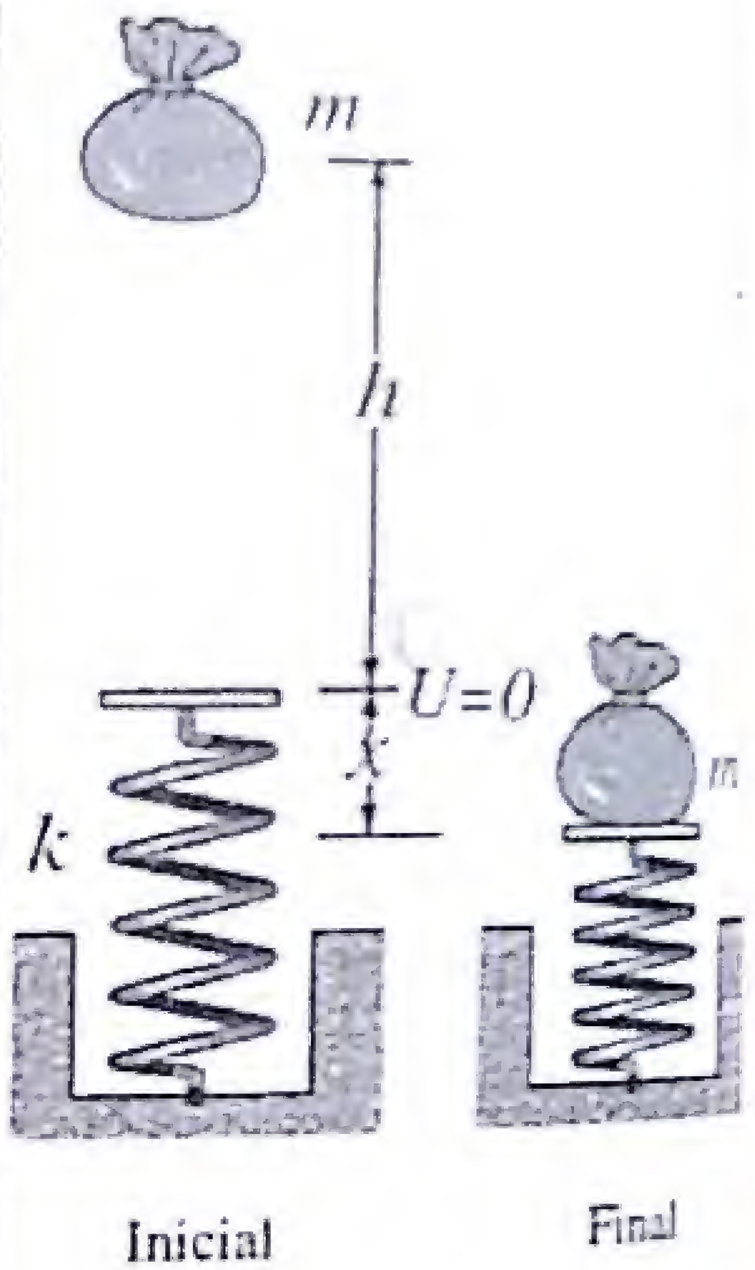
La conservación de la energía es un principio general de la física que, en lo concerniente a sistemas mecánicos, es equivalente a las leyes de Newton. Constituye una herramienta alternativa poderosa para resolver problemas que de otro modo podrían resultar muy difíciles. Para aplicarla se recomienda seguir la siguiente estrategia...

- Identifique los cuerpos que constituyen el sistema.
- Identifique todas las fuerzas que actúan.
- Determine cuáles fuerzas son conservativas y cuáles no.
- Halle las energías potenciales asociadas a las fuerzas conservativas.
- Si solo hay fuerzas conservativas, la energía mecánica se conserva. Iguale la energía mecánica en un instante dado con aquella en otro instante.
- Si hay fuerzas no-conservativas, la energía mecánica no es constante. Iguale el trabajo de las fuerzas no conservativas a la diferencia entre la energía mecánica final y la energía mecánica inicial.

PR-4.01. *Dejando caer un objeto sobre un resorte*

Se deja caer un objeto de masa $m = 3$ kg desde una altura $h = 0{,}60$ m, sobre una plataforma apoyada en un resorte de constante elástica $k = 2940$ N/m. Determine la máxima distancia que se comprime el resorte.

Solución: Como todas las fuerzas son conservativas, la energía mecánica total se conserva. En ambas situaciones, inicial y final, la velocidad es nula y también lo serán las energías cinéticas ($K_{inicial} = K_{final} = 0$). Tomando como nivel cero de energía potencial gravitacional U_g en la posición inicial $x = 0$ del extremo libre del resorte, escribimos:



$$(U_g + U_e + K)_{inicial} = (U_g + U_e + K)_{final}$$

$$mgh + \frac{1}{2}k(0)^2 + \frac{1}{2}m(0)^2 = mg(-x) + \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m(0)^2$$

Reordenando, se obtiene la ecuación cuadrática en x:

$$x^2 - (\frac{2mg}{k})x - \frac{2mgh}{k} = 0$$

Cuyas raíces son:

$$x = \frac{mg}{k}(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2kh}{mg}})$$

Sustituyendo las constantes numéricas, se obtiene:

$$x = \frac{(3kg)(9{,}8m/s^2)}{2940N/m}[1 \pm \sqrt{1 + \frac{2(2940N/m)(0{,}6m)}{(3kg)(9{,}8m/s^2)}}]$$

La solución tiene dos raíces: $x_1 = -0{,}1$ m y $x_2 = +0{,}12$ m. La raíz negativa se descarta pues representaría un alargamiento del resorte, lo cual no es el caso. Por lo tanto, la máxima compresión del resorte es:

$$x_2 = +0{,}12 \text{ m}$$

Respuesta

$$\boxed{x = 0{,}12 \text{ m}}$$

PR-4.02. *¿Cuál es el coeficiente de fricción?*

Un bloque parte del reposo desde una altura $h = 6$ m se desliza hacia abajo por una pista curva sin fricción.

Luego el bloque sube por un plano inclinado rugoso que forma un ángulo $\theta = 36.9°$ con la horizontal. Si la altura máxima alcanzada es $y_m = 5$ m, determine el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano inclinado.

Solución: El cambio de la energía mecánica total (cinética + potencial) entre la posición final y la inicial es el trabajo de la fuerza no conservativa de fricción:

$$(K_f + U_f) - (K_i + U_i) = W_{nc}$$

$$(0 + mgy_m) - (0 + mgh) = -\mu_c(mg\cos\theta)x$$

Siendo $x = y_m / sen\theta$, el desplazamiento en el plano inclinado:

$$\mu_c mgy_m \cot\theta = mgh - mgy_m$$

Despejando encontramos el coeficiente de fricción cinética:

$$\mu_c = (\frac{h}{y_m} - 1)tg\theta = (\frac{6}{5} - 1)tg36.9° = 0.15$$

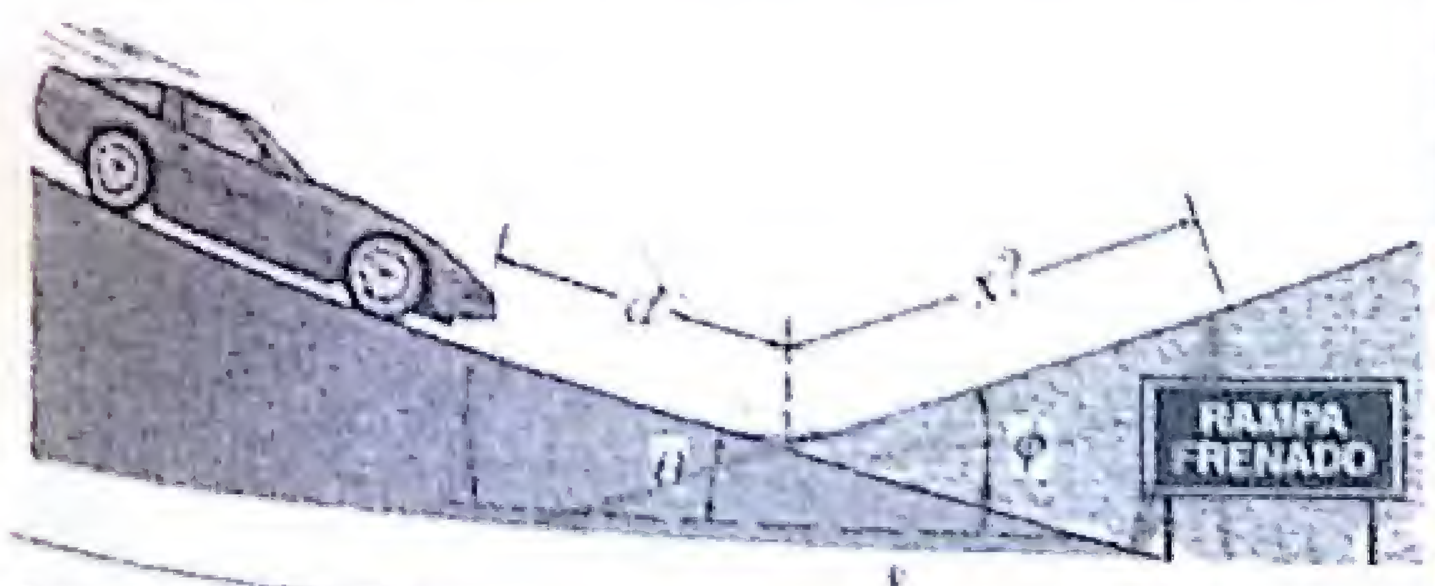
Respuesta

$$\boxed{\mu_c = 0.15}$$

PR-4.03. *Rampa de emergencia*

Un automóvil de masa m queda sin frenos y desciende por un pavimento resbaladizo de ángulo de inclinación θ respecto de la horizontal.

Inicialmente el automóvil tenía una velocidad v_0 y después de resbalar cuesta abajo una distancia d, sube por una rampa de frenado que tiene un ángulo de inclinación φ. Si la rampa tiene un coeficiente de fricción por rodadura μ, ¿cuál es la distancia x que subirá en la rampa antes de detenerse?



Solución: Cuando el automóvil está a una altura $d sen\theta$, comienza a patinar, su velocidad inicial es v_0 y su energía mecánica total inicial es:

$$E_i = K_i + U_i = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgd sen\theta$$

Después de subir por la rampa una distancia x, se detiene a una altura, $x sen\phi$ y la energía mecánica total final es:

$$E_f = K_f + U_f = 0 + mgx sen\phi$$

Durante la subida por la rampa actúa la fuerza no conservativa de fricción: $F_c = \mu N = \mu mg cos\phi$ y el trabajo que realiza es:

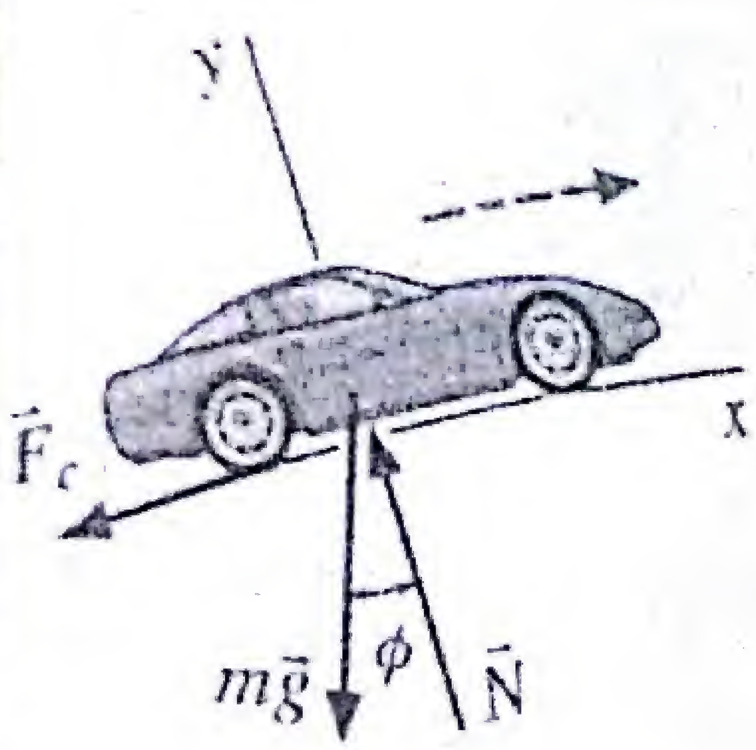
$$W_{nc} = \vec{F}_c \bullet \vec{x} = -\mu mgx cos\phi$$

El cambio de la energía mecánica total (cinética + potencial) entre la posición final y la inicial es el trabajo de la fuerza de fricción: $W_{nc} = (K_f + U_f) - (K_i + U_i)$

$$-\mu mgx cos\phi = (0 + mgx sen\phi) - (\frac{1}{2}mv_0^2 + mgd sen\theta)$$

Despejando x, hallamos:

$$x = \frac{v_0^2/2g + d sen\theta}{sen\phi + \mu cos\phi}$$

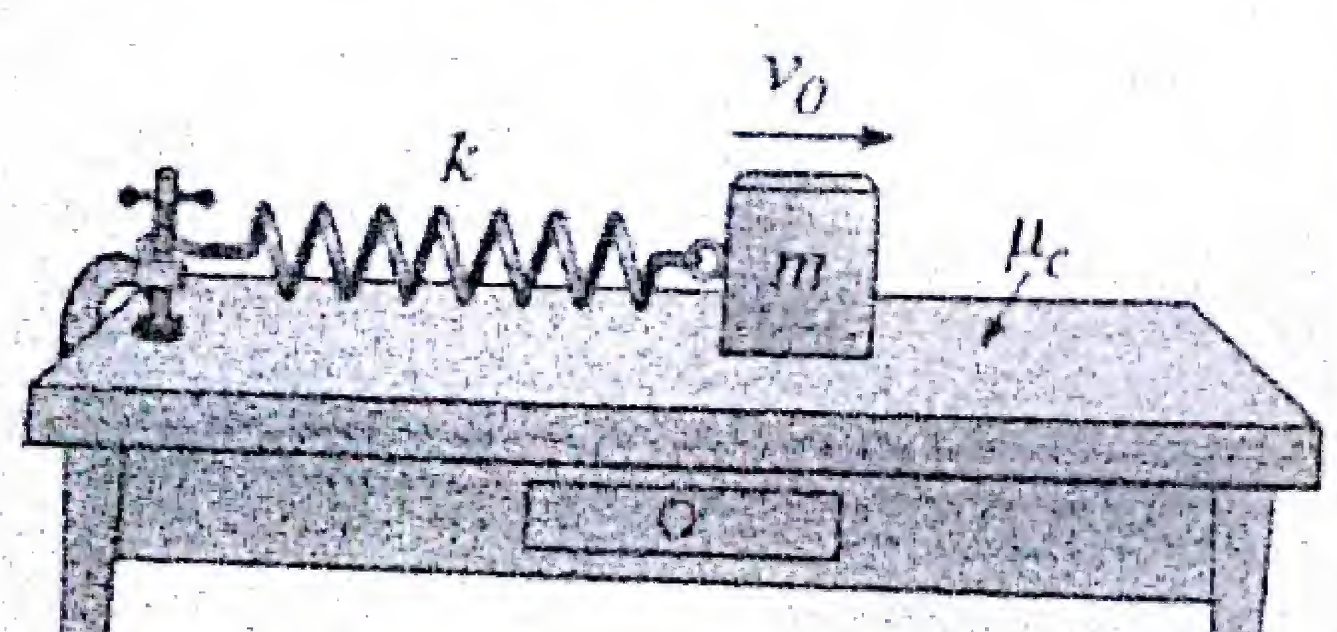


Respuesta:

$$\boxed{x = \frac{v_0^2/2g + d sen\theta}{sen\phi + \mu cos\phi}}$$

PR-4.04. *¿Si se lanza el bloque, regresará?*

Un bloque de masa m se coloca sobre una mesa horizontal, unido a un resorte de constante elástica k. Los coeficientes de rozamiento cinético y estático son μ_c y μ_e. El bloque se encuentra inicialmente en reposo y el resorte tiene su longitud normal.



Se da un golpe seco al bloque de tal manera que se mueva hacia la derecha con velocidad inicial v_0.

a) ¿Cuál es la máxima distancia, x_m, que alcanza el bloque?

b) ¿Regresará el bloque o se quedará en esa posición?

Solución: a) Inicialmente la energía mecánica del sistema masa-resorte es puramente cinética. Cuando cesa el movimiento del bloque, el resorte tiene su máximo estiramiento, x_m, y la energía mecánica es puramente potencial:

$$E_i = \frac{1}{2}mv_0^2 \qquad E_f = \frac{1}{2}kx_m^2$$

Durante el desplazamiento, sobre el bloque actúa la fuerza no conservativa de fricción que realiza un trabajo negativo:

$$W_{nc} = -F_c x_m = -(\mu_c mg)x_m$$

Según el teorema del trabajo y la energía, el trabajo de las fuerzas no conservativas es igual al cambio en la energía mecánica total del sistema, $W_{nc} = E_f - E_i$:

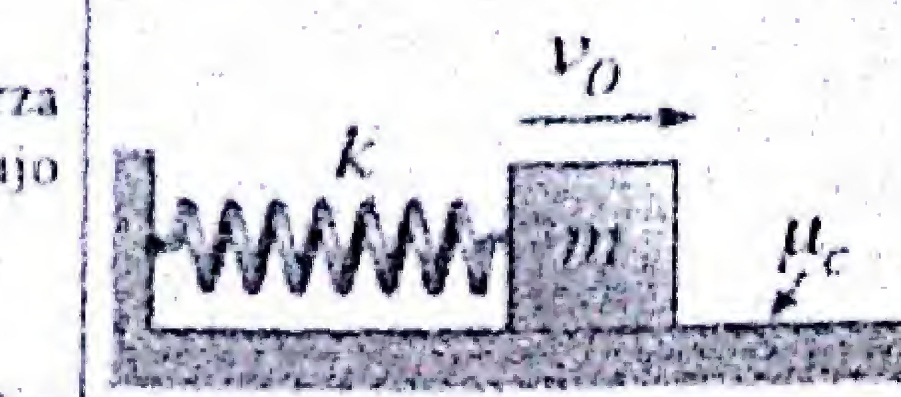
$$-\mu_c mgx_m = \frac{1}{2}kx_m^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

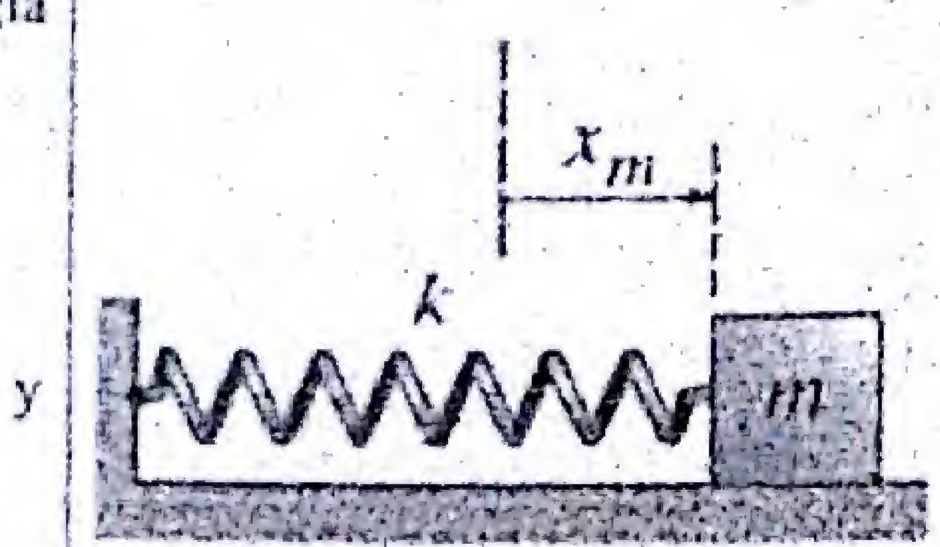
Resolviendo la ecuación cuadrática para x_m, y descartando la raíz negativa, tenemos:

$$x_m = -\frac{\mu_c mg}{k} + \sqrt{(\frac{\mu_c mg}{k})^2 + \frac{mv_0^2}{k}}$$

b) Si al final del recorrido, la fuerza del resorte ($F_r = kx_m$) supera al valor máximo de la fuerza de fricción estática ($F_e(max) = \mu_e mg$), el bloque se devuelve. Usando la expresión de x_m, encontramos la relación que deben guardar los coeficientes de fricción para que el bloque se devuelva.

$$\mu_e < \sqrt{\mu_c^2 + \frac{kv_0^2}{mg^2}} - \mu_c$$





Respuesta:

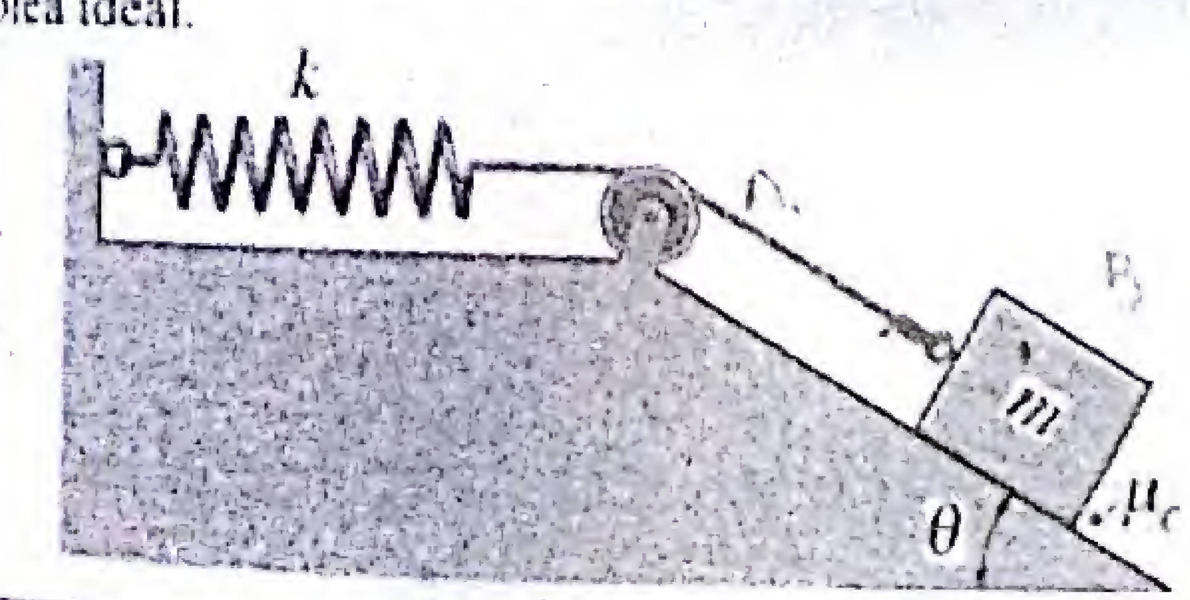
$$x_m = \sqrt{(\frac{\mu_c mg}{k})^2 + \frac{mv_0^2}{k}} - \frac{\mu_c mg}{k}$$

b) El bloque regresa si se cumple:

$$\mu_e < \sqrt{\mu_c^2 + \frac{kv_0^2}{mg^2}} - \mu_c$$

PR-4.05. *¿Cuál es el coeficiente de fricción cinética?*

Un bloque de masa $m = 1$ kg está sobre un plano inclinado áspero de inclinación $\theta = 36{,}9°$, conectado a un resorte de constante elástica $k = 49$ N/m a través de una polea ideal.



El bloque se libera a partir del reposo cuando el resorte no está estirado.

Si el bloque desciende una distancia $x = 16$ cm por el plano inclinado antes de quedar en reposo, ¿cuál es el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano inclinado?

Solución: Cuando el bloque desciende la distancia x, la fuerza de fricción $F_c = \mu_c N = \mu_c mg\cos\theta$ realiza un trabajo:

$$W_{nc} = \vec{F}_c \bullet \vec{x} = -\mu_c mgx\cos\theta$$

El trabajo realizado por esta fuerza no conservativa es igual al cambio de la energía mecánica total ($W_{nc} = \Delta K + \Delta U$). En este caso, puesto que las velocidades inicial y final del bloque son nulas, hay dos formas de energía potencial a considerar: la gravitacional U_g disminuye y la elástica almacenada en el resorte U_e aumenta:

$$W_{nc} = \Delta U = \Delta U_g + \Delta U_e$$

$$-\mu_c mgx\cos\theta = -mgx\,sen\theta + \frac{1}{2}kx^2$$

Despejando, obtenemos el coeficiente de fricción cinética:

$$\mu_c = \frac{2mg\,sen\theta - kx}{2mg\cos\theta} = tg\theta - \frac{kx}{2mg\cos\theta}$$

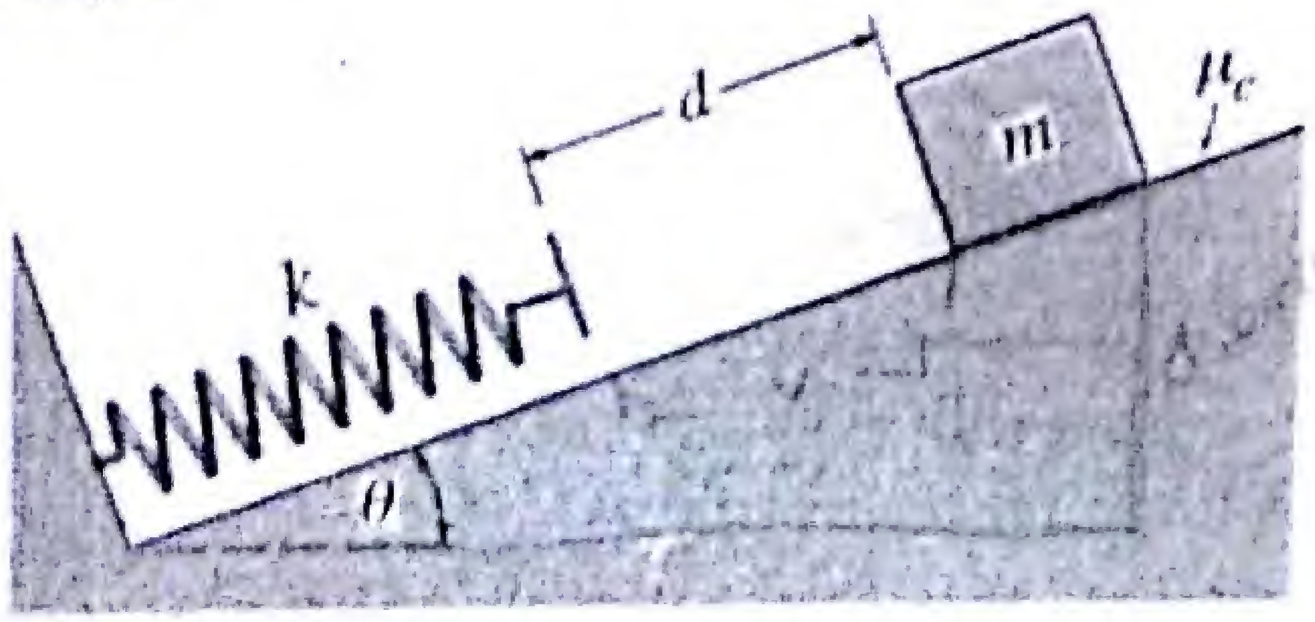
$$\mu_c = 0{,}75 - \frac{(49\text{N/m})(0{,}16\text{m})}{2(1\text{kg})(9{,}8\text{m/s}^2)(0{,}8)} = 0{,}25$$

Respuesta:

$$\boxed{\mu_c = tg\theta - \frac{kx}{2mg\cos\theta} = 0{,}25}$$

PR- 4.06. *Rebote de un resorte en un plano inclinado*

Un bloque de masa $m = 2$ kg parte del reposo y desliza una distancia $d = 3$ m por una superficie rugosa de ángulo $\theta = 36{,}9°$.



El bloque choca con un resorte no deformado de masa despreciable y de constante elástica $k = 98$ N/m. El coeficiente de fricción cinética es $\mu_c = 0{,}25$.

a) ¿Cual es la velocidad del bloque al alcanzar al resorte?

b) ¿Cuál es la máxima compresión del resorte?

c) ¿Hasta qué distancia subirá el bloque después de rebotar?

Solución: a) La fuerza de fricción cinética es: $F_c = \mu_c N = \mu_c mg\cos\theta$ y realiza un trabajo durante el descenso:

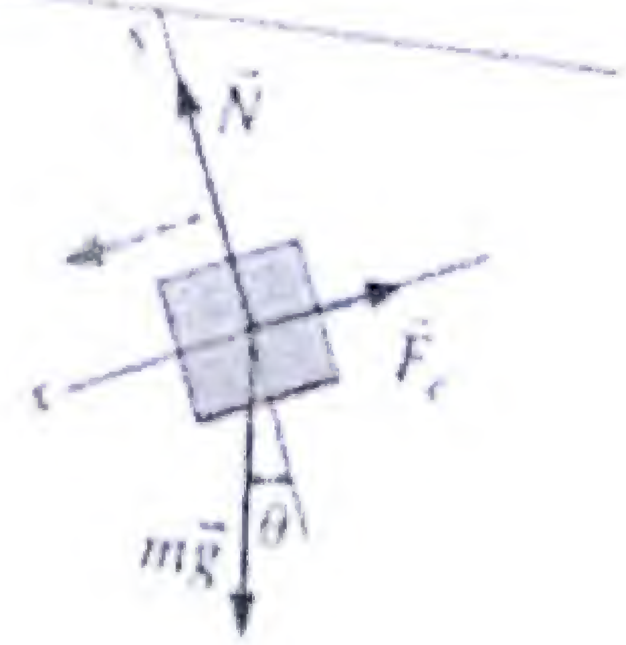
$$W_{nc} = \vec{F}_c \bullet \vec{x} = -\mu_c mgd\cos\theta$$

El trabajo realizado por esta fuerza no conservativa es igual al cambio de la energía mecánica total, $W_{nc} = \Delta K + \Delta U$:

$$-\mu_c mgd\cos\theta = \frac{1}{2}mv^2 - mgd\,sen\theta$$

La velocidad es:

$$v = \sqrt{2gd(sen\theta - \mu_c\cos\theta)} = 4{,}8\text{m/s}$$

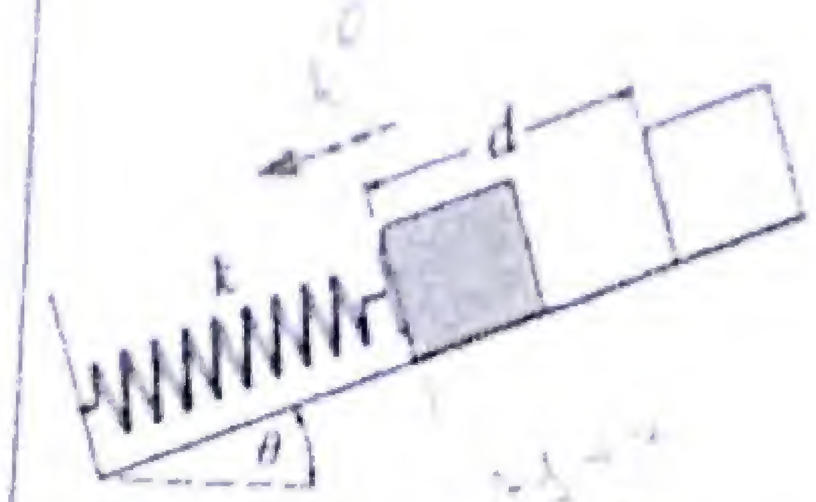


b) El bloque parte del reposo y se detiene cuando el resorte alcanza su máxima compresión, x, por lo tanto $\Delta K = 0$. Hay ganancia de energía elástica y pérdida de energía gravitacional, $W_{nc} = \Delta U_e + \Delta U_g$:

$$-\mu_c mg(d + x)\cos\theta = \frac{1}{2}kx^2 - mg(d + x)sen\theta$$

Se obtiene la ecuación cuadrática en x:

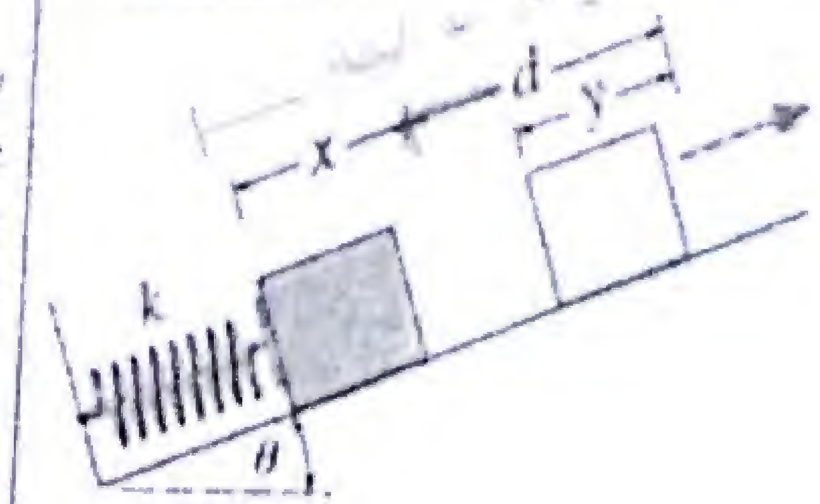
$$[\frac{k}{2mg(sen\theta - \mu_c\cos\theta)}]x^2 - x - d = 0$$



Reemplazando los valores y tomando la raíz positiva:

$$6{,}25x^2 - x - 3 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 0{,}78 \text{ m}$$

c) Después del rebote el bloque alcanza una distancia y por debajo del punto de partida. Esto significa que primero desciende una distancia $(d+x)$ y luego asciende una distancia $[(d-y) + x]$. El trabajo total de la fuerza de fricción es:



$$W_{nc} = -\mu_c mg(2d + 2x - y)\cos\theta.$$

Este debe ser igual al cambio neto en la energía potencial gravitacional ($W_{nc} = \Delta U_g$):

$$-\mu_c mg(2d + 2x - y)\cos\theta = -mgy\,sen\theta$$

Despejando y sustituyendo los valores numéricos, tenemos la distancia y que sube el bloque:

$$y = \frac{2\mu_c(d + x)\cos\theta}{sen\theta + \mu_c\cos\theta} = \frac{2(0{,}25)(3 + 0{,}78)0{,}8}{0{,}6 + 0{,}25\text{x}0{,}8} = 1{,}89 \text{ m}$$

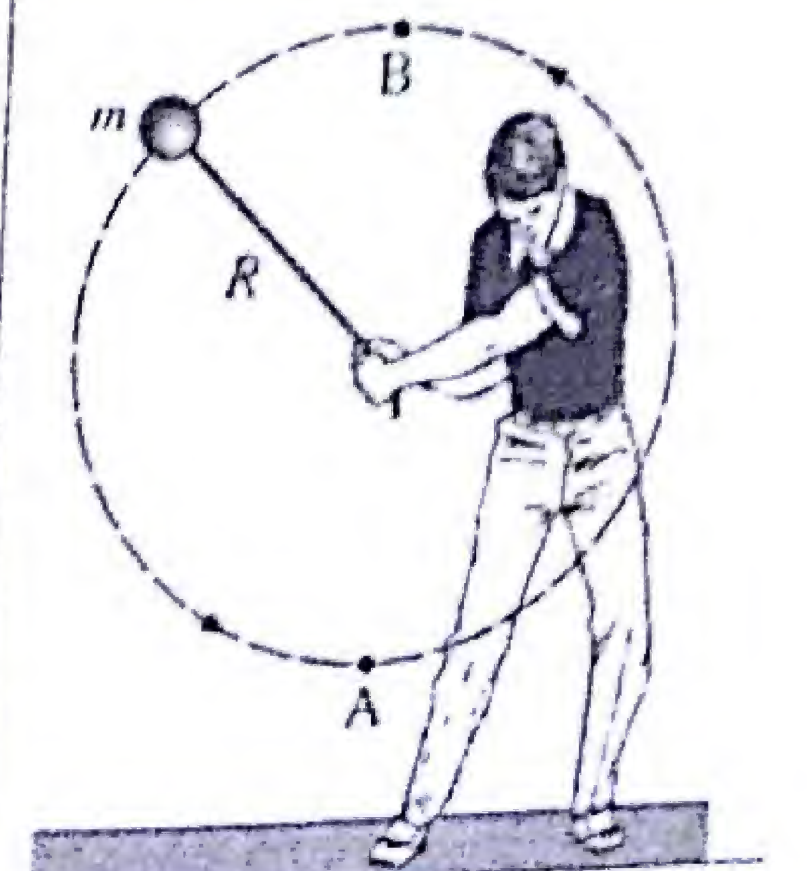
Respuesta:

a) $v = 4{,}8$ m/s
b) $x = 0{,}78$ m
c) $y = 1{,}89$ m por debajo de la posición inicial

PR-407. *Dando vueltas a la pelota en un circulo vertical*

Se le da vueltas a una pelota atada a una cuerda en un círculo vertical de modo que su energía total sea constante. Demostrar que, bajo estas condiciones, la tensión en la cuerda cuando la pelota está en la parte baja del círculo es mayor que la tensión en la parte superior, por seis veces el peso de la pelota.

$$T_A - T_B = 6mg$$



Solución: Aplicando la segunda ley de Newton a la pelota en las posiciones inferior y superior:

$$\sum F_y = T_A - mg = m\frac{v_A^2}{R}$$

$$\sum F_{y'} = T_B + mg = m\frac{v_B^2}{R}$$

Sustrayendo estas dos ecuaciones, se obtiene:

$$T_A - T_B = \frac{1}{R}(mv_A^2 - mv_B^2) + 2mg \qquad (1)$$

Las fuerzas de tensión actúan perpendicularmente a la velocidad de la pelota y no realizan trabajo, por lo tanto:

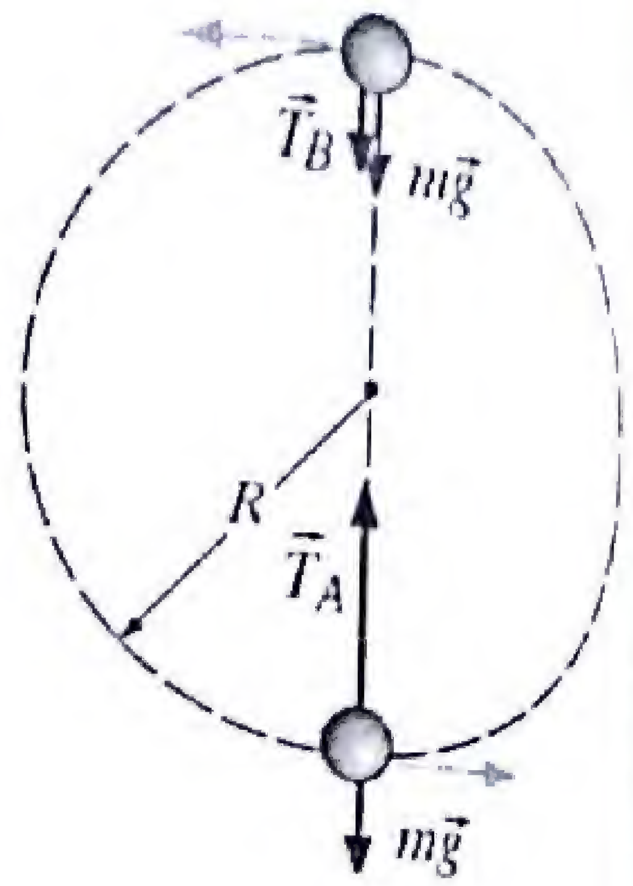
$$K_A + U_A = K_B + U_B$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mg2R$$

$$mv_A^2 - mv_B^2 = 4mgR \qquad (2)$$

Combinando las relaciones (1) y (2), encontramos la diferencia entre las tensiones:

$$T_A - T_B = \frac{1}{R}4mgR + 2mg = 6mg$$



Respuesta

$\boxed{T_A - T_B = 6mg}$

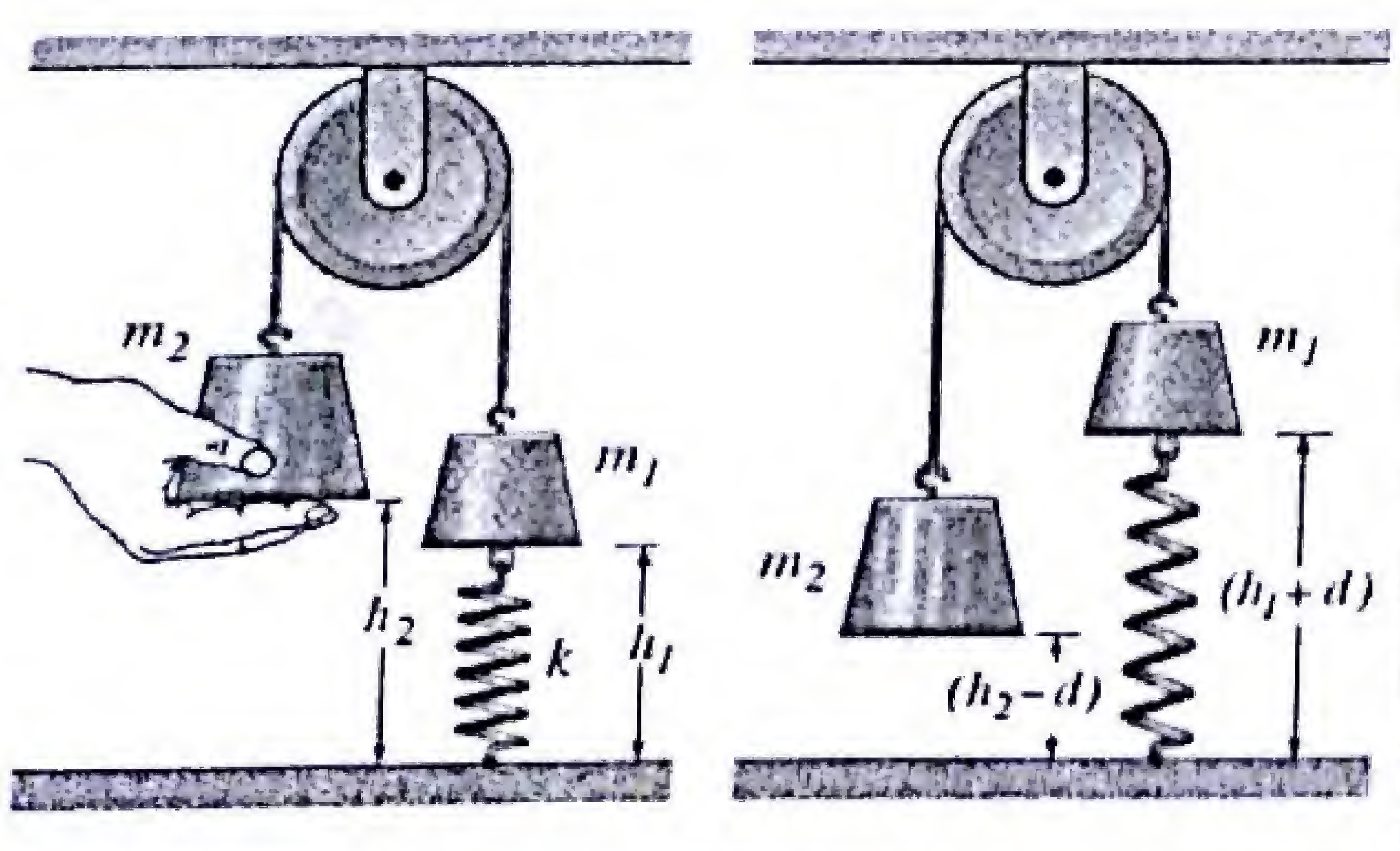
PR-4.08. *¿Dónde se detienen por primera vez?*

Dos pesas de masas $m_1 < m_2$, están conectadas mediante un hilo que pasa por una polea sin fricción. La pesa m_1 está conectada por debajo a un resorte de constante elástica k, el cual tiene su otro extremo fijo a una mesa.

Inicialmente el resorte no está deformado cuando la pesa m_1 está a una altura h_1 y la pesa m_2 a una altura h_2. Si el sistema se suelta partiendo del reposo determine:

a) La distancia que han recorrido las pesas cuando se detienen por primera vez.

b) La tensión del hilo en ese instante.



Solución: a) Cuando el resorte se extiende al máximo en una longitud d, las pesas quedan en reposo. El cambio en energía cinética del sistema es nulo ($\Delta K = 0$). El cambio en la energía elástica del resorte es: $\Delta U_r = kd^2/2$. Mientras que el cambio en la energía potencial gravitacional de las dos pesas es: $\Delta U_g = m_1gd - m_2gd$. Como las fuerzas son conservativas, la energía mecánica total no cambia:

$$\Delta K + \Delta U_r + \Delta U_g = 0$$

$$0 + \frac{1}{2}kd^2 + (m_1gd - m_2gd) = 0$$

Despejando, encontramos el desplazamiento:

$$d = \frac{2(m_2 - m_1)g}{k} \qquad (1)$$

b) Aplicando la segunda ley de Newton a cada pesa en ese instante:

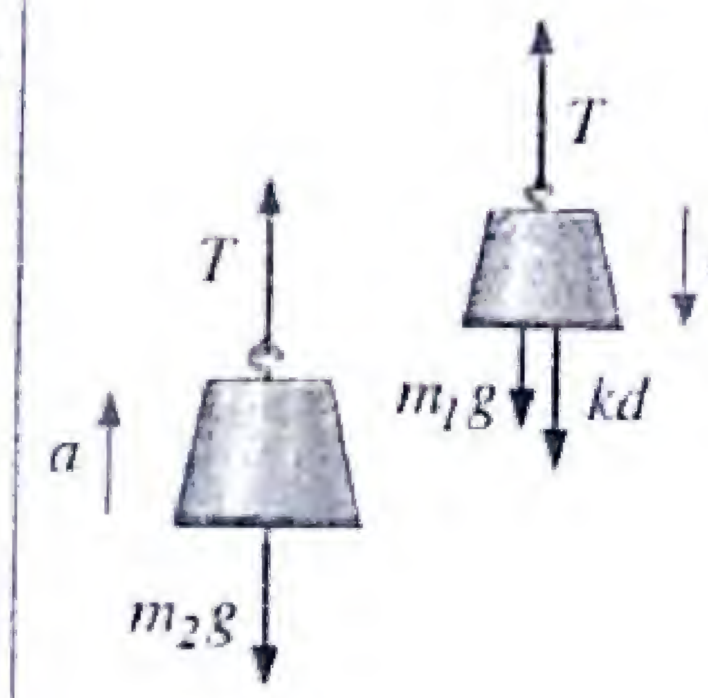
$$\sum F_y = m_1g + kd - T = m_1a \qquad (2)$$

$$\sum F_{y'} = T - m_2g = m_2a \qquad (3)$$

Si se elimina la aceleración a de este par de ecuaciones y se sustituye la expresión (1) para d, se obtiene la tensión T:

$$T - m_1g - k\frac{2(m_2 - m_1)g}{k} = m_1\left(\frac{m_2g - T}{m_2}\right)$$

$$T = \frac{2m_2^2g}{(m_1 + m_2)}$$



Respuesta

a) $d = \dfrac{2g(m_2 - m_1)}{k}$
b) $T = \dfrac{2m_2^2g}{(m_1 + m_2)}$

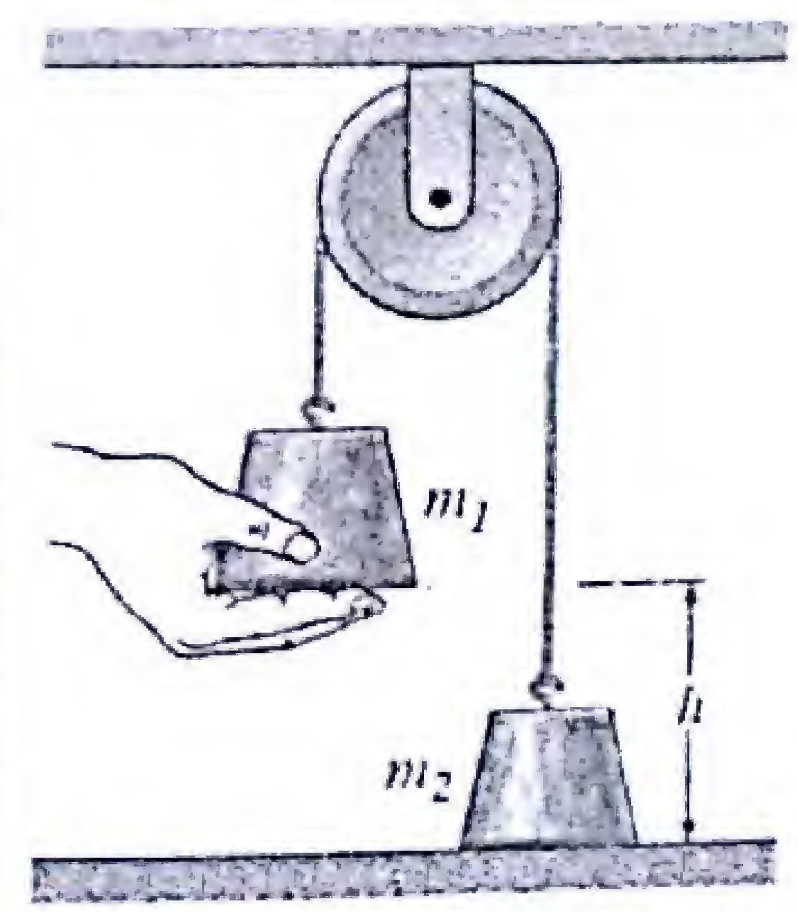
PR-4.09. *¿Hasta dónde se eleva la pesa ligera?*

Dos pesas m_1 y $m_2 < m_1$ están conectadas entre sí mediante una cuerda ligera que pasa por una polea ideal. Inicialmente la pesa m_2 descansa sobre el suelo y la pesa m_1 está a una altura h, como se muestra en la figura. Luego se suelta el sistema desde el reposo.

a) Determine la velocidad de la pesa m_2 cuando la pesa m_1 golpea el suelo.

b) Halle la altura máxima a la cual sube la pesa m_2.

c) Halle $h_{máx}$ para los dos casos extremos: $m_1 >> m_2$ y $m_1 \approx m_2$.



Solución: Como no hay fuerzas no-conservativas, la energía mecánica es constante. Inicialmente la energía cinética es nula y en el instante en que m_1 golpea el suelo, las dos pesas tienen una rapidez común, v. En ese mismo instante la altura alcanzada por m_2 es h:

$$m_1gh + 0 = m_2gh + \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$$

Despejando, se obtiene la velocidad: $v = \sqrt{\dfrac{2(m_1 - m_2)gh}{m_1 + m_2}}$

b) Después del impacto, la cuerda se afloja y la pesa m_2 sigue subiendo bajo la fuerza de gravedad, hasta detenerse. La energía mecánica de m_2 se conserva:

$$m_2gh + \frac{1}{2}m_2v^2 = m_2gh_{max} + 0$$

Sustituyendo la expresión de v y despejando, tenemos:

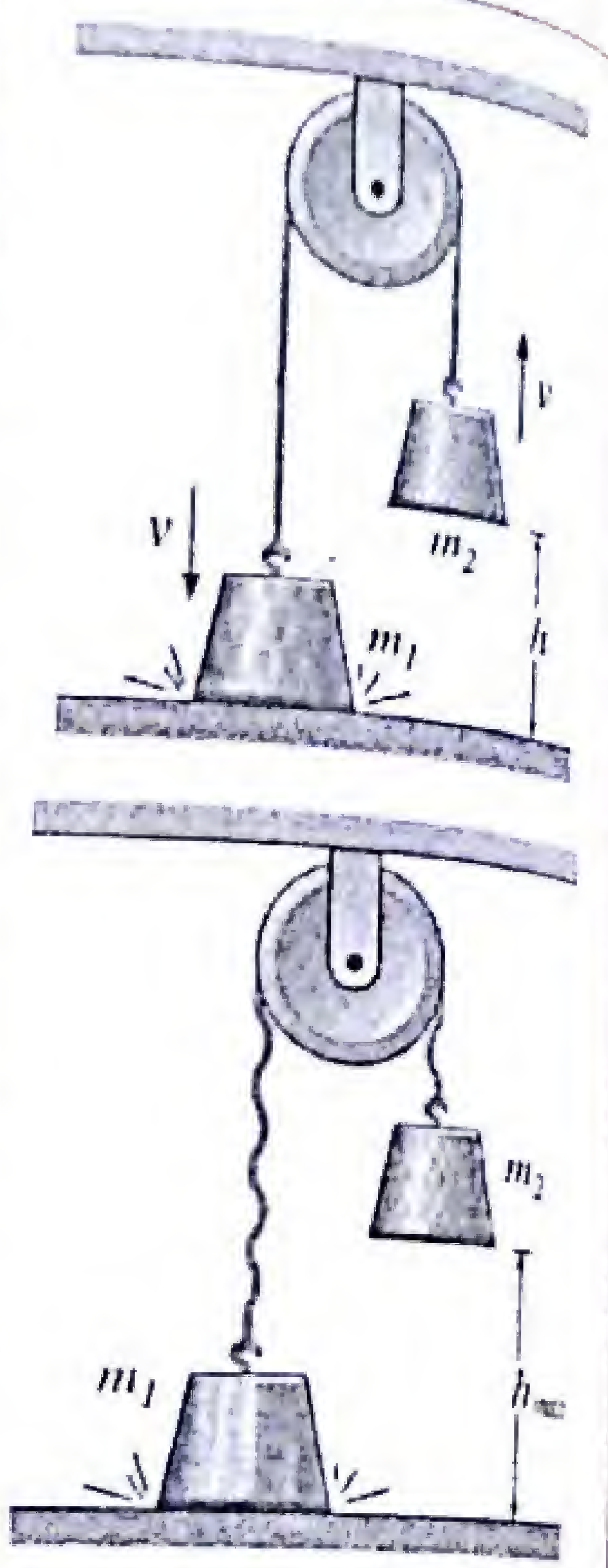
$$h_{max} = \frac{2h}{1 + m_2/m_1}$$

c) En la situación límite $m_1 >> m_2$, tenemos:

$$h_{max} = Lim_{\frac{m_2}{m_1} \to 0}\left[\frac{2h}{1 + m_2/m_1}\right] = 2h$$

En la situación límite $m_1 \approx m_2$, tenemos:

$$h_{max} = Lim_{\frac{m_2}{m_1} \to 1}\left[\frac{2h}{1 + m_2/m_1}\right] = h$$



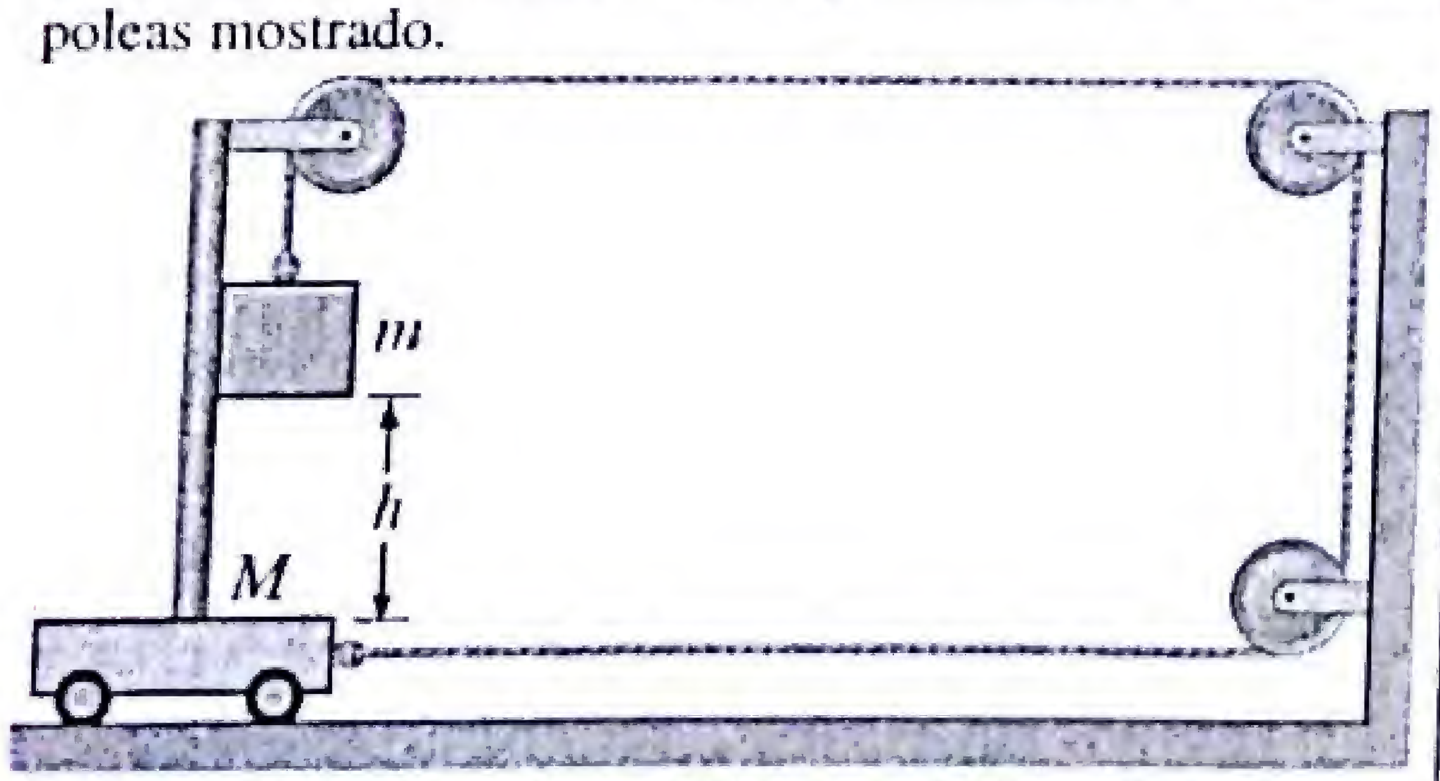
Respuesta:

a) $v = \sqrt{\dfrac{2(m_1 - m_2)gh}{m_1 + m_2}}$

b) $h_{max} = \dfrac{2h}{1 + m_2/m_1}$

PR 4.10. *¿Qué pasa cuando se desprende el bloque?*

Un bloque de masa m = 1 kg está inicialmente suspendido en un carrito de masa M = 11 kg, mediante el sistema de poleas mostrado.



* Problema PR-1-35 resuelto en el Cap. 1 con las leyes de Newton.

Las poleas y los hilos son ideales y se desprecian todas las fuerzas de rozamiento. Si el bloque se suelta desde una altura h = 4,9 m por encima de la base.

a) ¿Al cabo de cuánto tiempo golpeará el bloque a la base del carrito?

b) ¿Cuál habrá sido el desplazamiento del carrito en ese tiempo?

Solución: a) A partir de la conservación de la energía mecánica: $(K + U)_{inic} = (K + U)_{fin}$, relacionamos la altura h con las velocidades finales del bloque y del carrito:

$$mgh = \frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2) + \frac{1}{2}Mv_x^2$$

El aumento Δy del segmento de hilo vertical corresponde a una disminución $\Delta x = \Delta y/2$ en cada segmento de hilo horizontal y por lo tanto: $v_y = 2v_x$. La expresión de la conservación de la energía queda:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_y^2\left[1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\frac{M}{m}\right] = \frac{1}{2}mv_y^2\,\frac{16}{4} \quad \Rightarrow \quad v_y = \sqrt{\frac{gh}{2}}$$

Usando la expresión para la velocidad media en el movimiento con aceleración constante:

$$\bar{v}_y = \frac{h}{t} = \frac{0 + v_y}{2}$$

$$t = \frac{2h}{v_y} = \frac{2h}{\sqrt{gh/2}} = \sqrt{\frac{8h}{g}} = \sqrt{\frac{8(4{,}9\text{m})}{9{,}8\text{m/s}^2}} = 2\text{s}$$

b) La velocidad horizontal final es $v_x = v_y/2$ y la velocidad media correspondiente es:

$$\bar{v}_x = \frac{d}{t} = \frac{0 + v_x}{2} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{v_x t}{2} = \frac{v_y t}{4} = \frac{h}{2} = 2{,}45\text{m}$$

Observe que este resultado coincide con el obtenido en el Cap. 1, usando las leyes de Newton (Problema PR.1.35).

Respuesta:

a) $t = 2s$

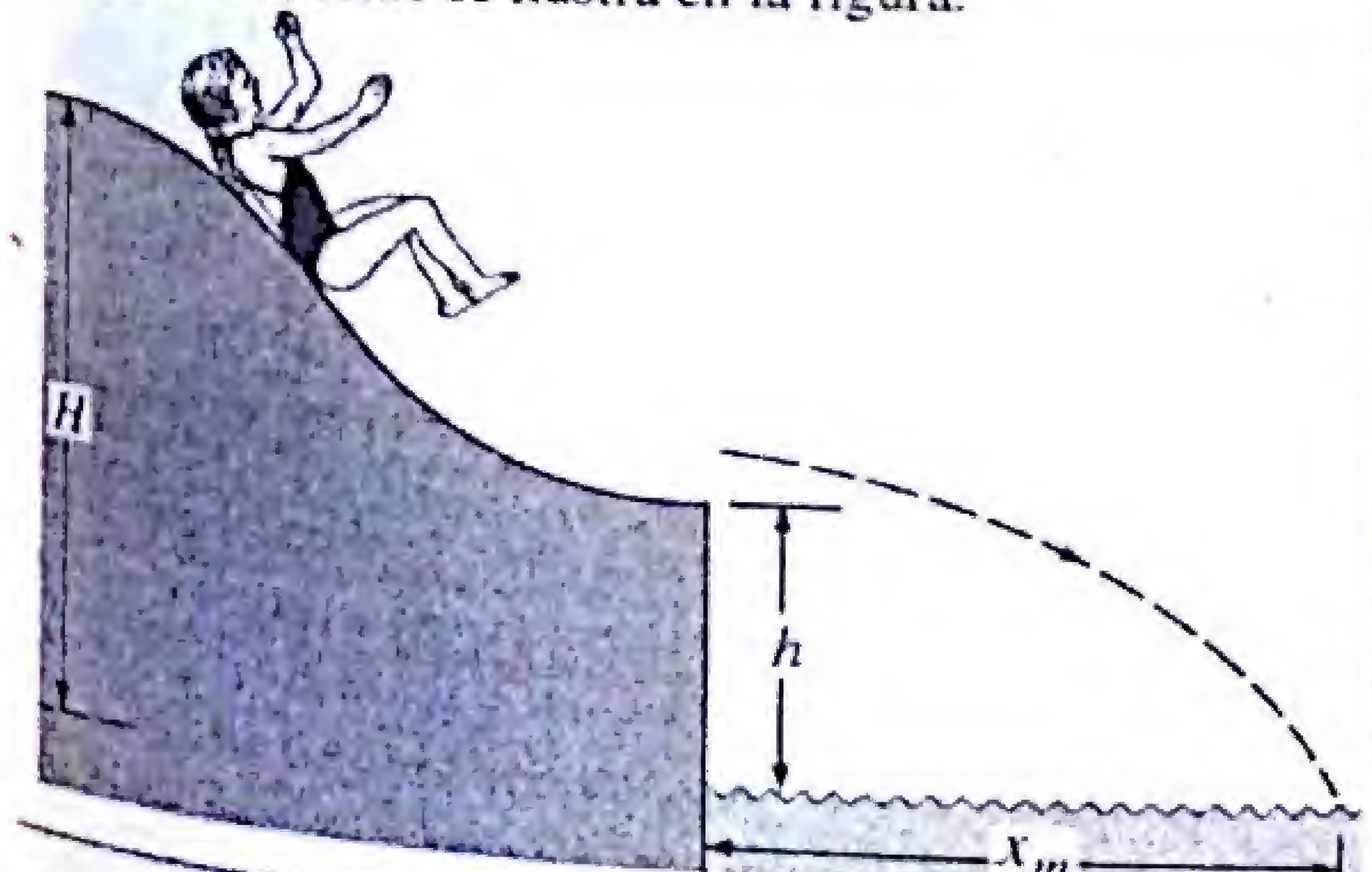
b) $d = 2{,}45$m

¿?

Consultar

PR-4.11. *Alcance horizontal máximo en el tobogán*

Se desea diseñar un tobogán de agua de altura inicial H, y altura final h, como se ilustra en la figura.



Se requiere que cuando una persona parte del reposo desde lo alto, se deslice sin fricción y alcance en el agua una distancia horizontal máxima.

a) ¿Cuál debe ser la relación entre las alturas, h/H?

b) ¿Qué valor posee el alcance máximo, x_m, en ese caso?

Solución: a) Aplicando la conservación de la energía entre la posición mas alta inicial con velocidad inicial cero y la posición de salida con velocidad horizontal v, se tiene:

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(H-h)$$

La altura h es recorrida en caída libre durante un tiempo t:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \qquad \Rightarrow \qquad t = \sqrt{2h/g}$$

El alcance horizontal es:

$$x = vt = v\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Eliminando v con la primera ecuación se obtiene:

$$\frac{1}{2}m(\frac{gx^2}{2h}) = mg(H-h) \qquad \Rightarrow \qquad x^2 = 4h(H-h)$$

Para el máximo de esta función la derivada debe ser nula:

$$\frac{\partial}{\partial h}[4h(H-h)] = 4H - 8h = 0$$

Por lo tanto, la relación entre alturas debe ser: $h/H = 0{,}5$

b) El correspondiente alcance máximo es:

$$x_m = \sqrt{4h(H-h)} = \sqrt{4\frac{H}{2}(H-\frac{H}{2})} = H$$

Respuesta

a) $\frac{h}{H} = \frac{1}{2}$

b) $x_m = H$

PR-4.12. *Descenso por la nieve sin perder contacto*

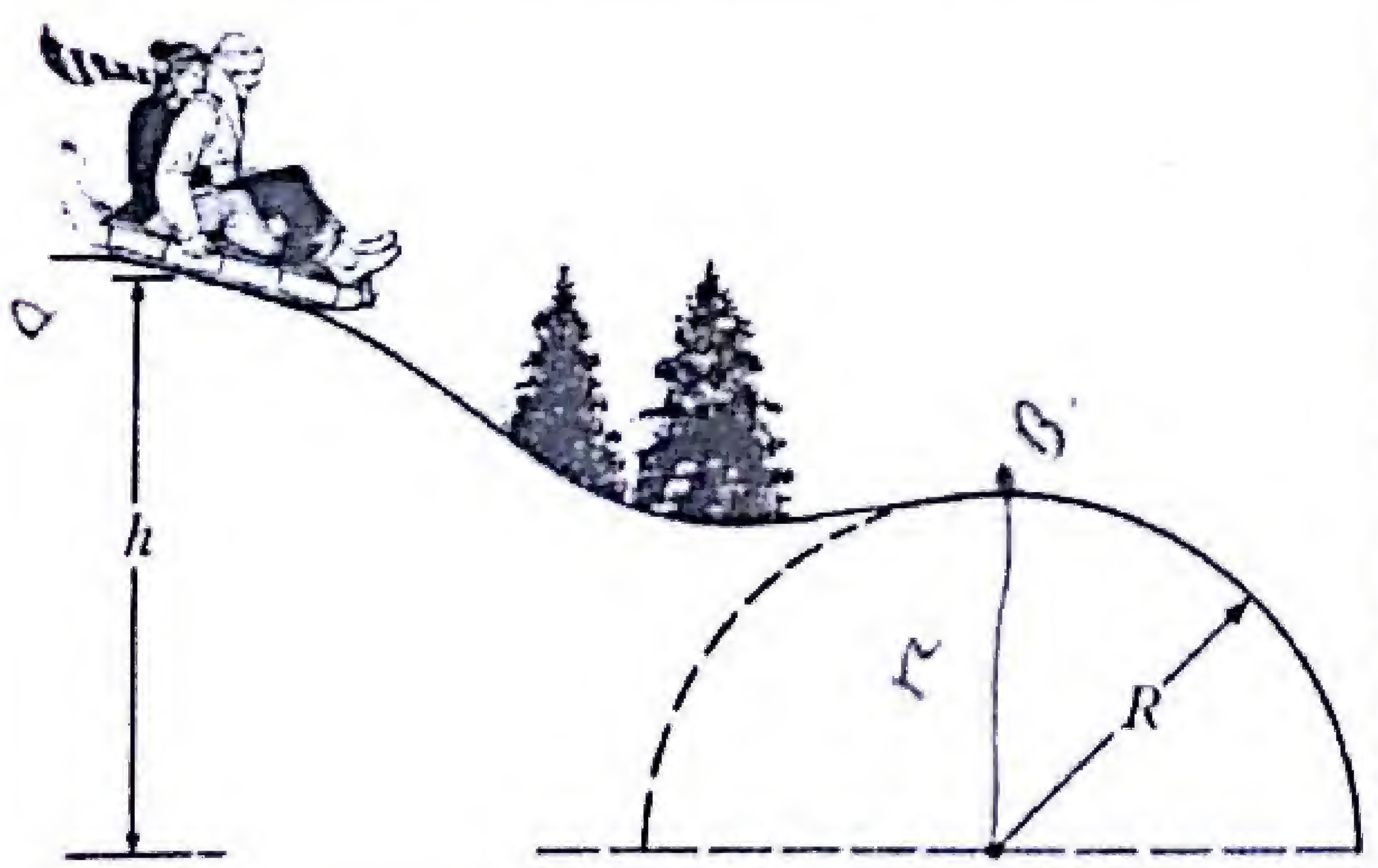
Un trineo se desliza por una colina cubierta de nieve, partiendo del reposo a una altura vertical h = 24 m.

Al pie de la colina hay una loma circular de radio R = 8 m.

a) Calcule la velocidad al llegar al nivel mas alto de la loma circular.

b) ¿Perderá contacto con la loma?

c) ¿Cuál sería el máximo valor de h para que el trineo no se despegue de la superficie hasta pasar por la parte superior de la loma?



Solución: a) Puesto que no hay fricción, la energía mecánica permanece constante en el trayecto. Tomando el cero de energía potencial al nivel $y = 0$:

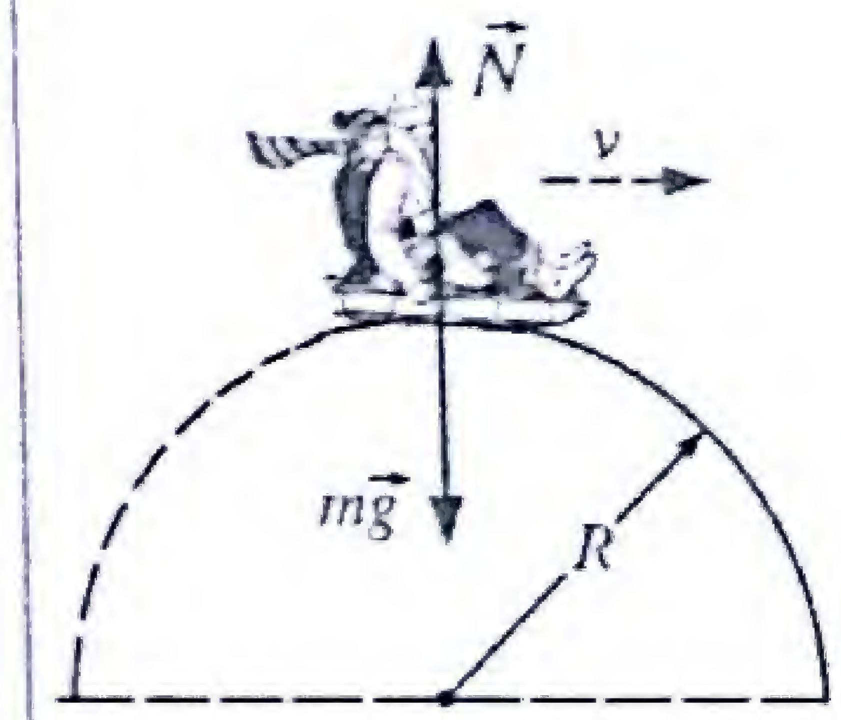
$$mgh + \frac{1}{2}m(0)^2 = mgR + \frac{1}{2}mv_B^2$$

De aquí obtenemos la velocidad al nivel de la cúspide:

$$v_B = \sqrt{2g(h-R)} = \sqrt{2(9{,}8\text{m/s}^2)(24\text{m} - 8\text{m})} = 17.7\text{m/s}$$

b) En el punto B la fuerza normal, $\vec{N}$, que ejerce el suelo es vertical hacia arriba y opuesta al peso. La resultante proporciona la aceleración centrípeta para el movimiento circular:

$$\sum F_r = mg - N = m\frac{v_B^2}{R}$$



Para calcular N, sustituimos v_B de la relación anterior:

$$N = mg - m\frac{2g(h-R)}{R} = mg(3 - 2\frac{h}{R}) = -3mg$$

Vemos que la fuerza centrípeta en el punto B resultaría negativa (hacia arriba). Evidentemente esto sería un absurdo, por lo tanto concluimos que para este valor de h el esquiador *se despega* de la superficie.

b) Para que se mantenga en la superficie, la mayor altura de caída está dada por la condición crítica $N = 0$, es decir:

$$N = mg(3 - 2\frac{h}{R}) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad h_{max} = \frac{3}{2}R = 12\text{m}$$

Respuesta:

a) $v_B = \sqrt{2g(h-R)} = 17.7$m/s

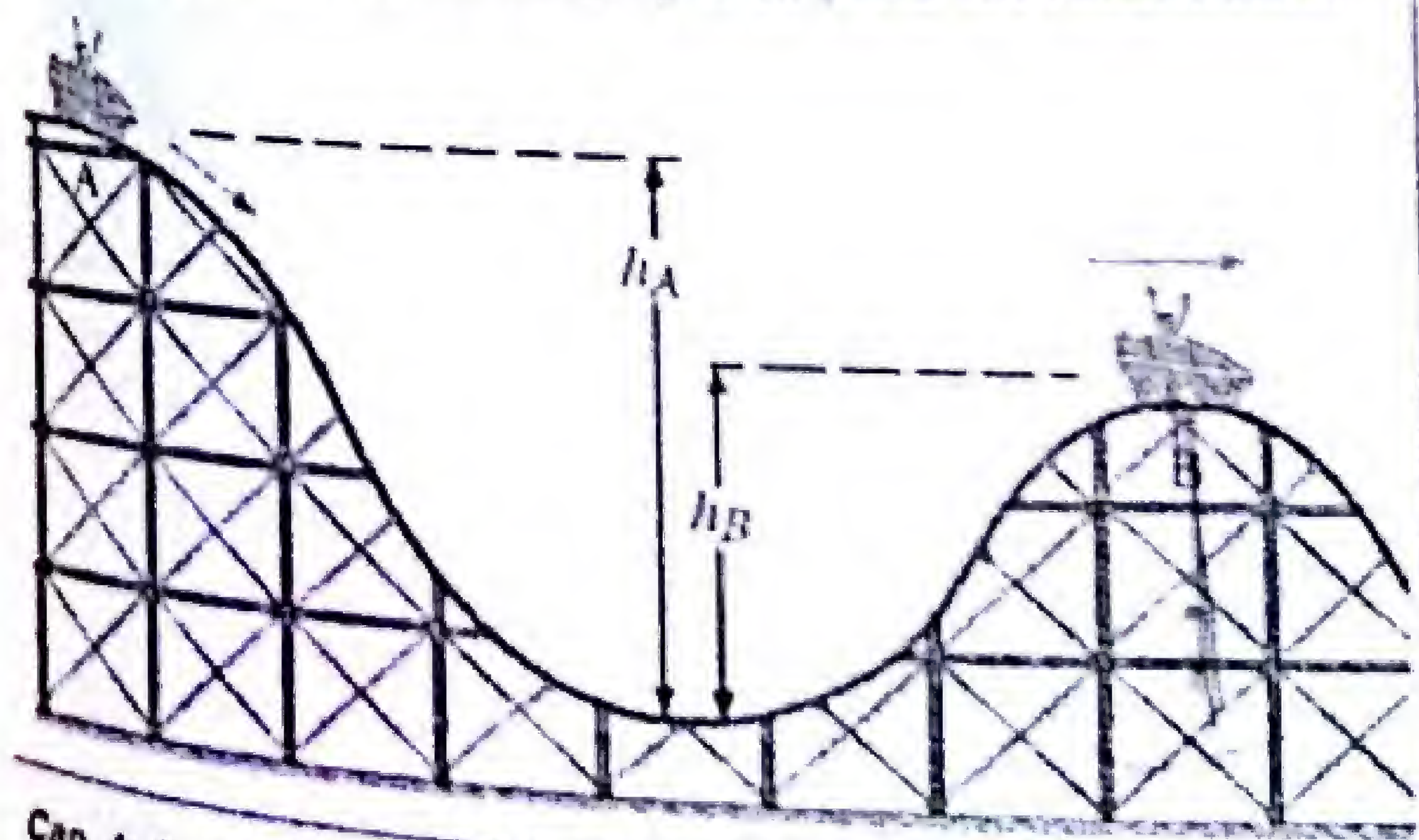
b) Sí pierde contacto.

c) $h_{max} = \frac{3}{2}R = 12$m

PR-4.13. *Pánico en la montaña rusa*

En una montaña rusa, un carrito parte del reposo en el punto A y rueda cuesta abajo por la pista sin rozamiento.

Si h_A = 25 m y h_B = 15 m, ¿cuál es el radio mínimo de seguridad del carrito para la curvatura de la pista en el punto B?



Solución: Aplicando la conservación de la energía entre las posiciones A B del carrito: $K_A + U_A = K_B + U_B$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B$$

Tomando en cuenta que $v_A = 0$, se obtiene:

$$v_B^2 = 2g(h_A - h_B)$$

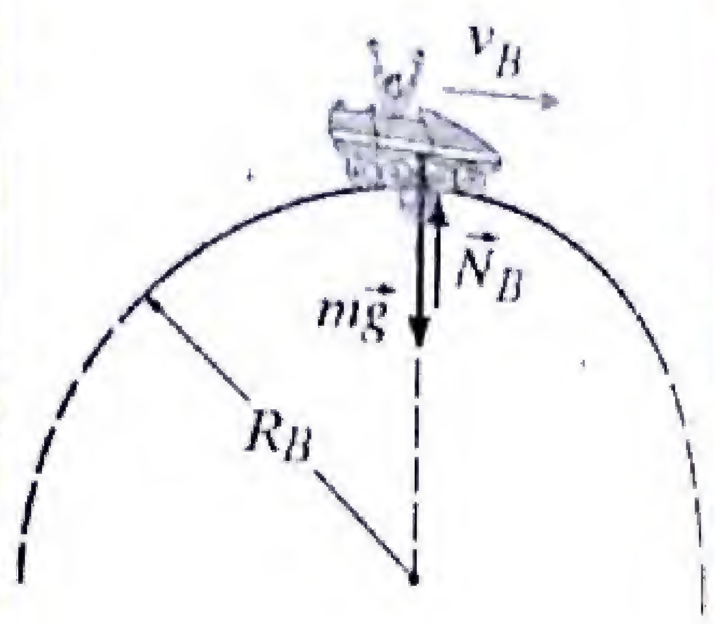
Aplicando la segunda ley de Newton en dirección radial al carrito en la posición B:

$$\sum F_r = mg - N_B = m\frac{v_B^2}{R_B}$$

El valor máximo de la velocidad permitida cuando se pierde contacto con la pista ($N_B = 0$), corresponde a la condición:

$$mg \geq m\frac{v_B^2}{R_B} = m\frac{2g(h_A - h_B)}{R_B}$$

$$R_B \geq 2(h_A - h_B) = 2(25\text{m} - 15\text{m}) = 20\text{m}$$

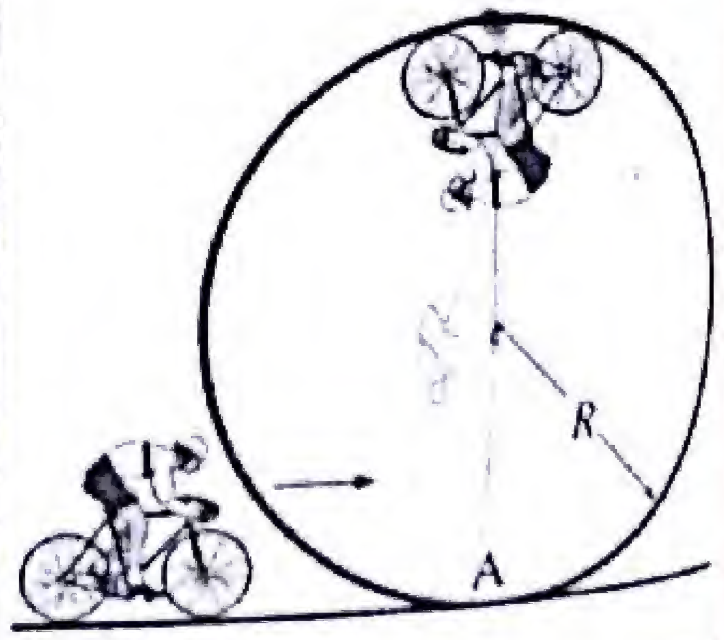


Respuesta:

$\boxed{R_B \geq 20\text{m}}$

PR-4.14. *El rizo de la muerte en bicicleta*

En un espectáculo de un circo, un ciclista llega pedaleando hasta la posición A de una pista circular vertical y de allí en adelante sube cuesta arriba sin pedalear. Si el radio del círculo es R = 5,0 m y el centro de gravedad de la persona con su bicicleta queda a una altura h = 1m sobre el piso, cuál debe ser la velocidad mínima con que debe llegar al punto A para lograr dar la vuelta completa sin perder contacto con la pista.



Solución: Aplicando la conservación de la energía cuando el ciclista va de la posición A (energía potencial cero) hasta llegar a la cima en B, se obtiene:

$$K_A + U_A = K_B + U_B$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + 0 = \frac{1}{2}mv_B^2 + 2mg(R-h) \qquad (1)$$

Aplicando la segunda ley de Newton en la dirección radial en el punto B, podemos escribir:

$$\sum F_r = mg - N = m\frac{v_B^2}{(R-h)}$$

La velocidad v_B crítica debe ser justo lo suficiente para que en el punto B la fuerza normal N sea nula.

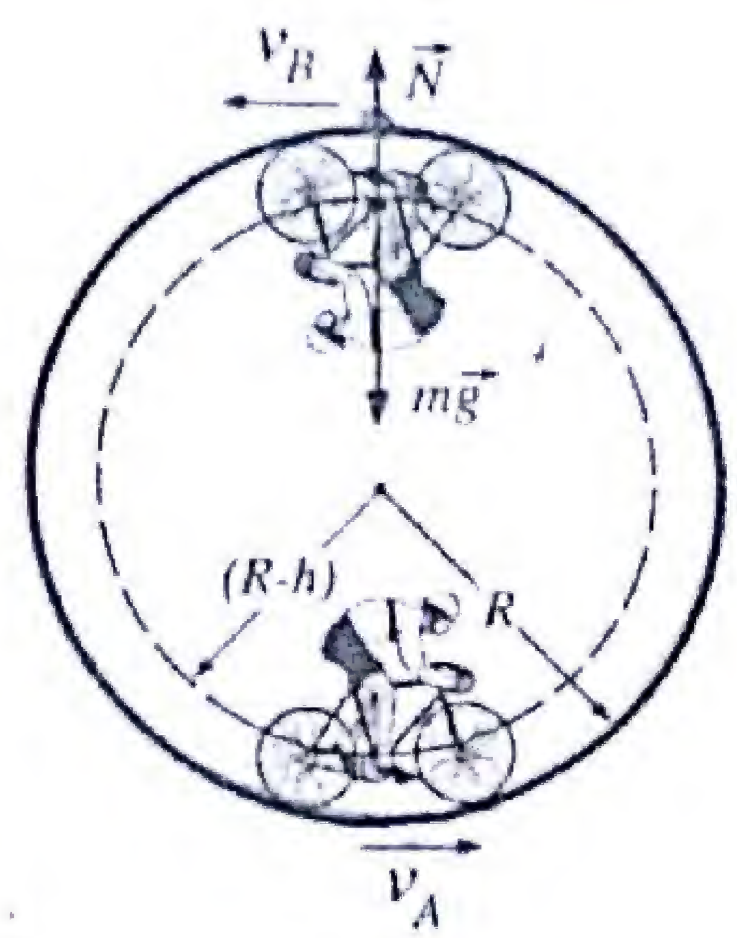
$$mg = \frac{mv_B^2}{(R-h)} \quad \Rightarrow \quad mv_B^2 = mg(R-h) \qquad (2)$$

Sustituyendo la relación (2) en la (1), se obtiene:

$$2mg(R-h) = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{1}{2}mg(R-h)$$

Por lo tanto, la velocidad mínima en A debe ser:

$$v_A = \sqrt{5g(R-h)} = \sqrt{5(9,8)(5-1)} = 14\text{m/s}$$

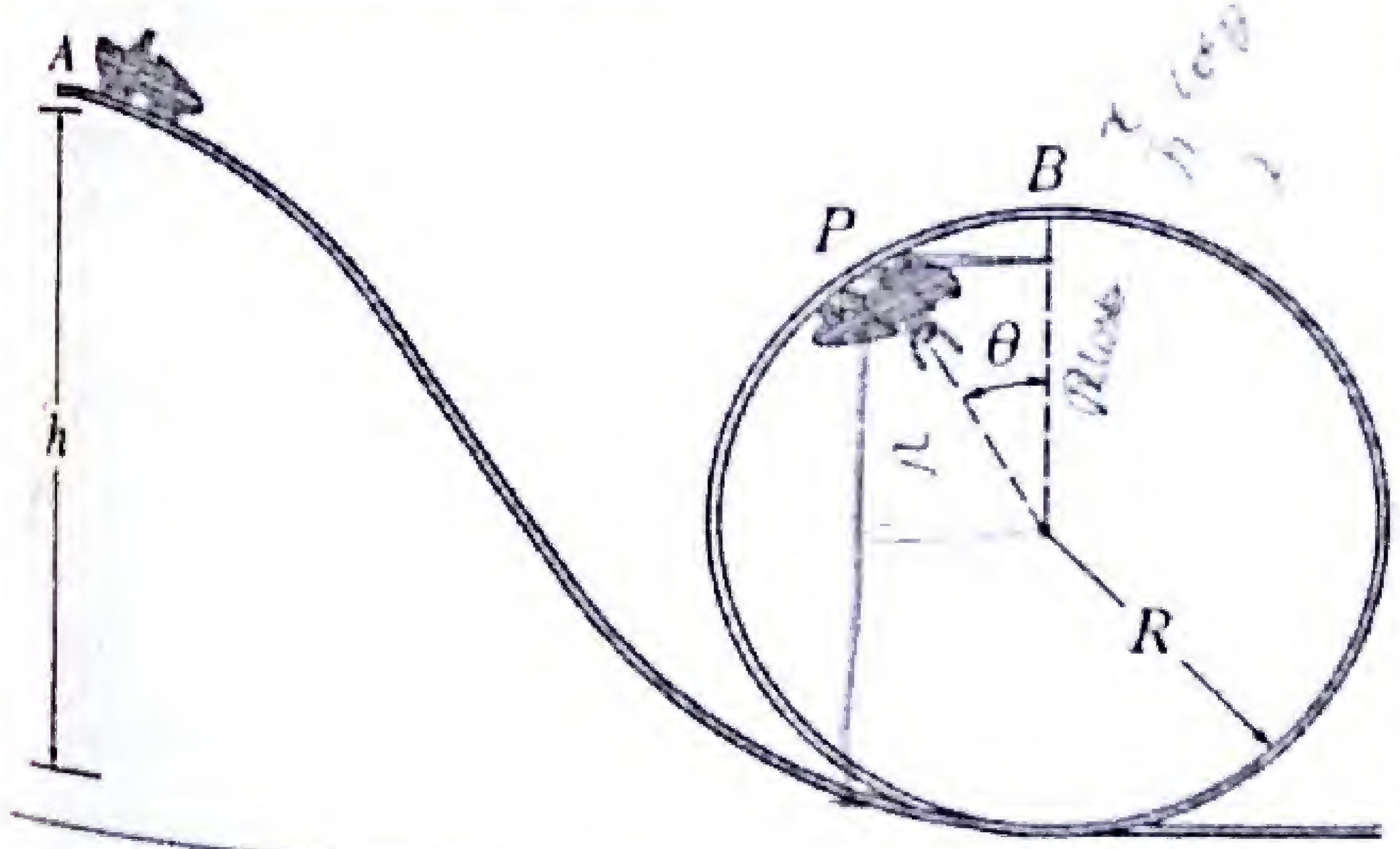


Respuesta:

$\boxed{v_A = 14\text{m/s}}$

PR- 4.15. *Rizando un rizo circular*

En un parque de diversiones, un carrito de masa m desciende sin fricción a lo largo de una pista que termina en un rizo circular de radio R.



a) Si el carrito parte del reposo, ¿cuál debe ser la mínima altura, h de caída para dar la vuelta completa al rizo?

b) Bajo las condiciones de la parte (a), ¿con qué fuerza el carrito presiona sobre la pista en un punto arbitrario P, cuyo radio vector forma un ángulo θ con la vertical?

Solución: En el punto mas alto del rizo (punto B) la fuerza normal, $\vec{N}$, que ejerce la pista es hacia abajo y en el mismo sentido que el peso $m\vec{g}$. La resultante de estas dos fuerzas provee la aceleración centrípeta. Aplicando la 2ª ley de Newton:

$$N + mg = m\frac{v_B^2}{R}$$

La mínima rapidez v_B es la necesaria para que el carrito esté a punto de perder contacto (N = 0). Despejando la velocidad:

$$v_B = \sqrt{gR} \qquad (1)$$

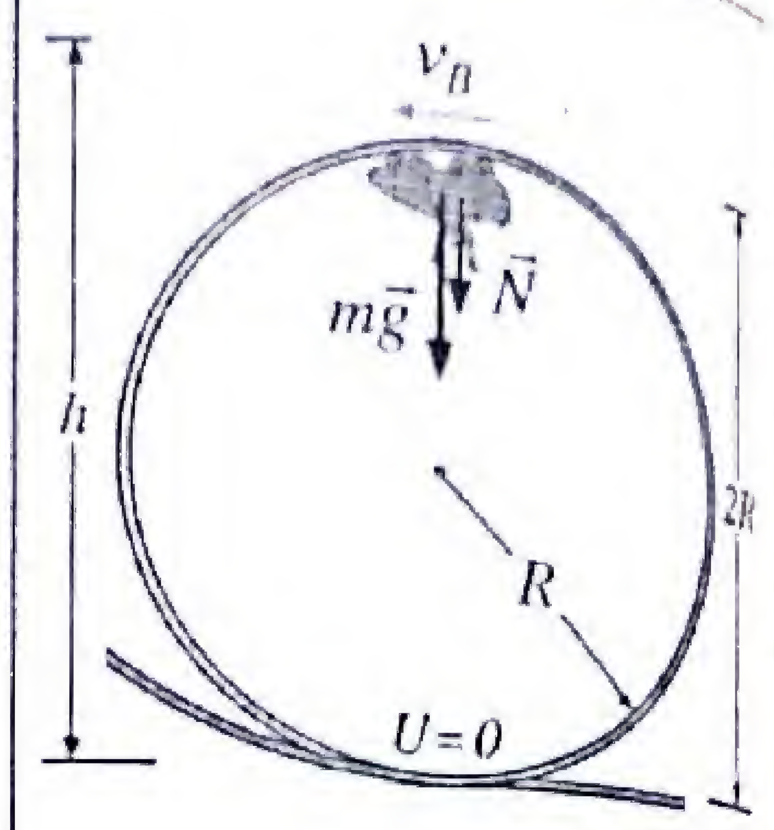
Tomando el nivel cero de energía potencial gravitacional del carrito en la parte más baja de la pista y aplicando la conservación de la energía entre A y B, tenemos:

$$U_A + K_A = U_B + K_B$$

$$mgh + 0 = mg(2R) + \frac{1}{2}mv_B^2$$

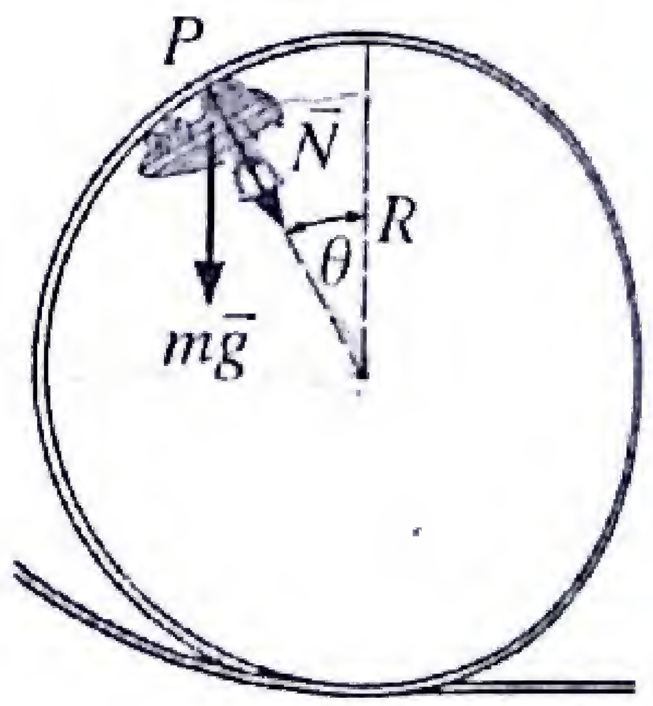
Sustituyendo la velocidad $v_B = \sqrt{gR}$, se tiene:

$$mgh = 2mgR + \frac{1}{2}mgR \quad \Rightarrow \quad h_{min} = \frac{5}{2}R$$



b) En el punto P, la aceleración centrípeta está definida por la fuerza neta que actúa en la dirección radial del rizo:

$$mg\cos\theta + N = m\frac{v_P^2}{R} \qquad (2)$$



Aplicamos la conservación de la energía entre los puntos A y P:

$$mg(\frac{5}{2}R) + \frac{1}{2}m(0)^2 = mgR(1+\cos\theta) + \frac{1}{2}mv_P^2 \qquad (3)$$

Eliminando v_P de las ecuaciones (2) y (3) encontramos:

$$N = 3mg(1-\cos\theta)$$

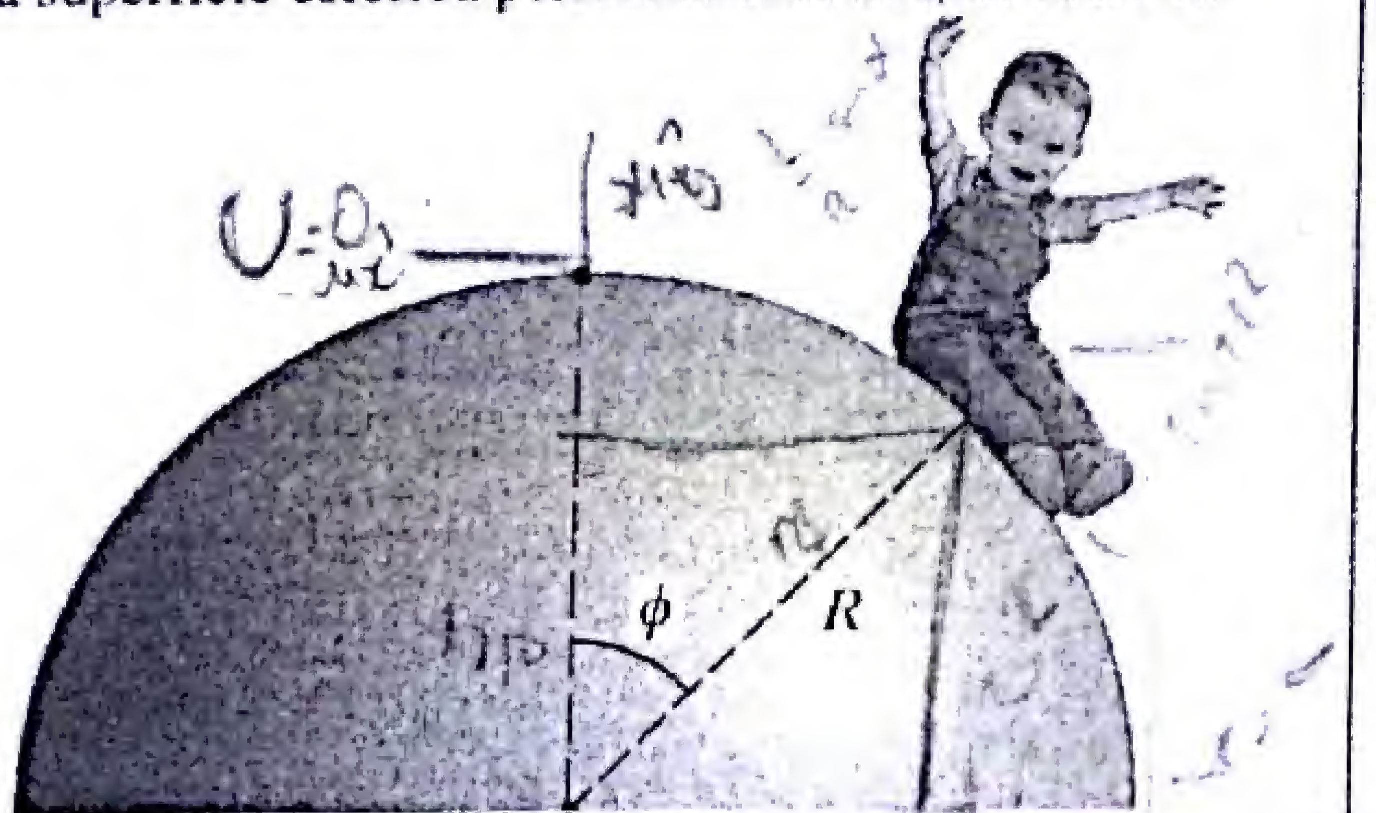
Según este resultado, la fuerza del carrito sobre la pista es distinta de cero en todo punto excepto en la parte alta donde se verifica que $N = 0$ para el punto crítico $\theta = 0°$

Respuesta:

a) $h_{min} = \frac{5}{2}R$
b) $N = 3mg(1-\cos\theta)$

PR-4.16. *¿Dónde abandona el montículo esférico?*

Una niño de masa m está sentado en la parte superior de una superficie esférica perfectamente lisa, de radio R.



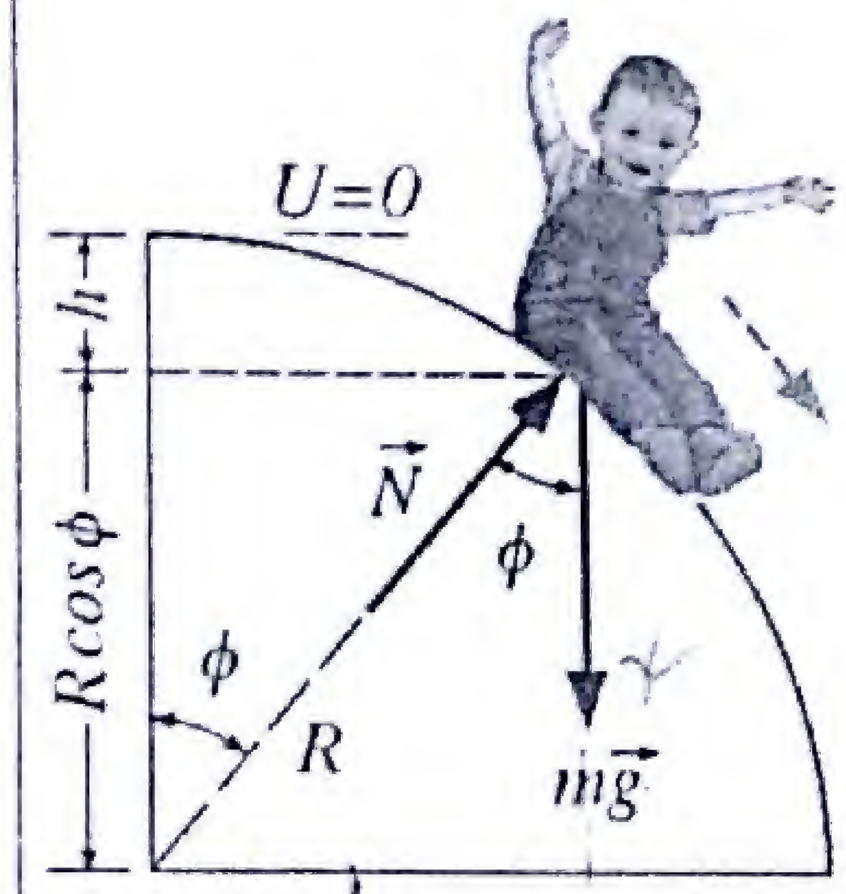
Partiendo del reposo, el niño comienza a deslizarse hacia abajo.
a) Determine el ángulo crítico en que abandona la superficie.
b) Halle la aceleración radial y la tangencial en esa posición.
c) Verifique que en la posición crítica, la aceleración total coincide con la de la gravedad.

Solución: a) Para un punto arbitrario, aplicamos la segunda ley de Newton en la dirección radial:

$$\sum F_r = mg\cos\phi - N = m\frac{v^2}{R}$$

En el punto crítico P donde pierde contacto con la superficie, la normal es cero ($N = 0$) y tenemos:

$$g\cos\phi = v_P^2/R \qquad (1)$$



La fuerza normal no realiza trabajo. Aplicando la conservación de la energía mecánica, tomando como cero de energía potencial gravitacional en la posición inicial; y en virtud de que el niño parte del reposo en ese punto, tenemos:

$$mg(0) + \frac{1}{2}m(0)^2 = -mgh + \frac{1}{2}mv_P^2$$

$$v_P^2 = 2gh \qquad (2)$$

Reemplazando la expresión (2) en la (1), tenemos:

$$g\cos\phi = \frac{2gh}{R} = \frac{2gR(1-\cos\phi)}{R}$$

$$\cos\phi = 2(1-\cos\phi), \qquad \cos\phi = 2/3$$

El ángulo crítico es: $\phi = 48,2°$

b) La aceleración radial en el punto P de despegue se halla usando la relación (1):

$$a_r = \frac{v_P^2}{R} = \frac{Rg\cos\phi}{R} = \frac{2}{3}g$$

Mientras que la aceleración tangencial depende de la fuerza tangencial:

$$a_t = \frac{F_t}{m} = \frac{mg\,sen\phi}{m} = g\sqrt{1-\cos^2\phi} = \frac{\sqrt{5}}{3}g$$

c) La aceleración total es la suma vectorial $\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_t$:

$$a = \sqrt{a_r^2 + a_t^2} = \sqrt{\frac{4}{9}g^2 + \frac{5}{9}g^2} = g$$

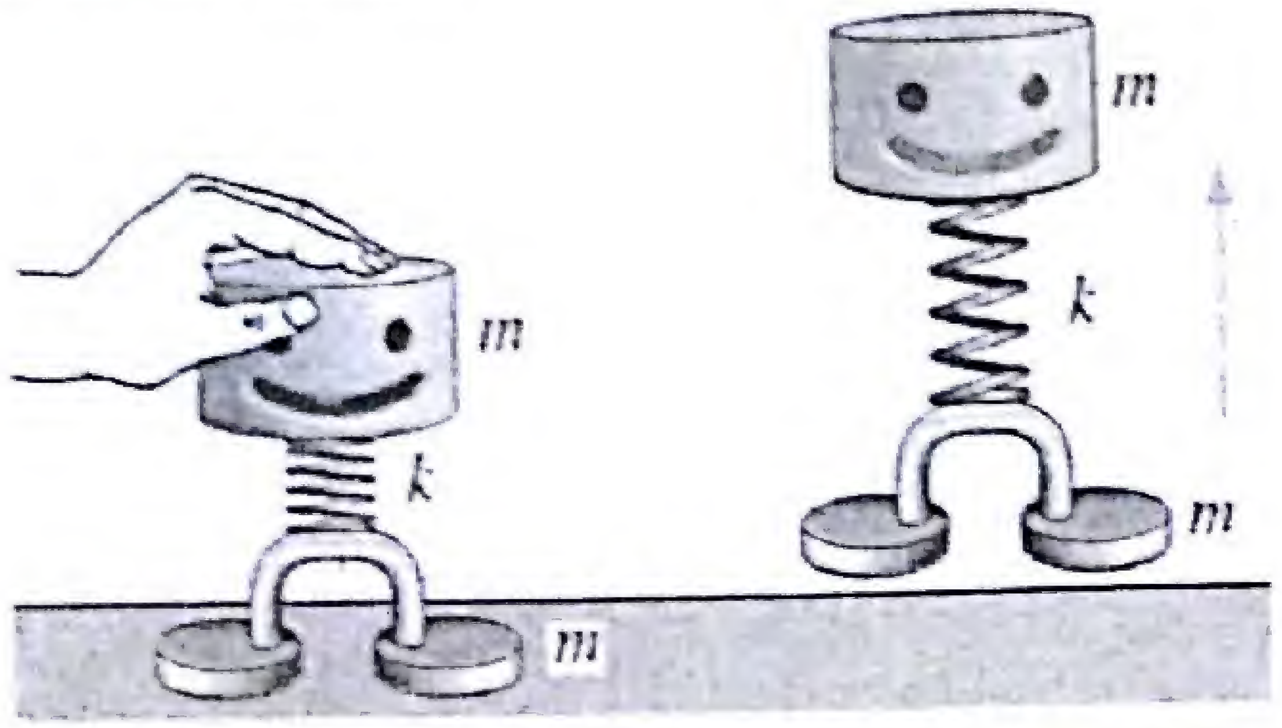
Se verifica así que, al perder contacto con la superficie, el niño cae en el aire con la aceleración de la gravedad.

Respuesta:

a) $\phi = 48,2°$
b) $a_r = \frac{2}{3}g$, $a_t = \frac{\sqrt{5}}{3}g$
c) $a = g$

PR-4.17. *Un juguete saltarín*

Un juguete saltarín consiste de dos piezas de igual masa, m, unidas mediante un resorte de masa despreciable y constante elástica k.



El juguete se coloca sobre una mesa, a continuación se presiona y luego se suelta.

¿Cuál debe ser la longitud mínima y_0 que debe estar comprimido el resorte para que al soltarlo, el juguete salte despegándose de la mesa?

Solución: Tomemos el nivel cero de energía potencial en la posición donde la pieza superior estaría sobre el resorte sin deformar (fig. a). Inicialmente el resorte está comprimido en la longitud y_0 (fig. b). Una vez que el resorte es liberado, comienza a extenderse pasando por su longitud propia hasta que finalmente queda estirado en una longitud L (Fig. c). Aplicando la conservación de la energía, se obtiene:

$$\frac{1}{2}ky_0^2 - mgy_0 = \frac{1}{2}kL^2 + mgL$$

Cuando la masa m inferior está a punto de despegarse la fuerza elástica del resorte debe equilibrar su peso:

$$mg = kL \quad \Rightarrow \quad L = mg/k$$

Sustituyendo en la expresión anterior, se obtiene una ecuación cuadrática en y_0:

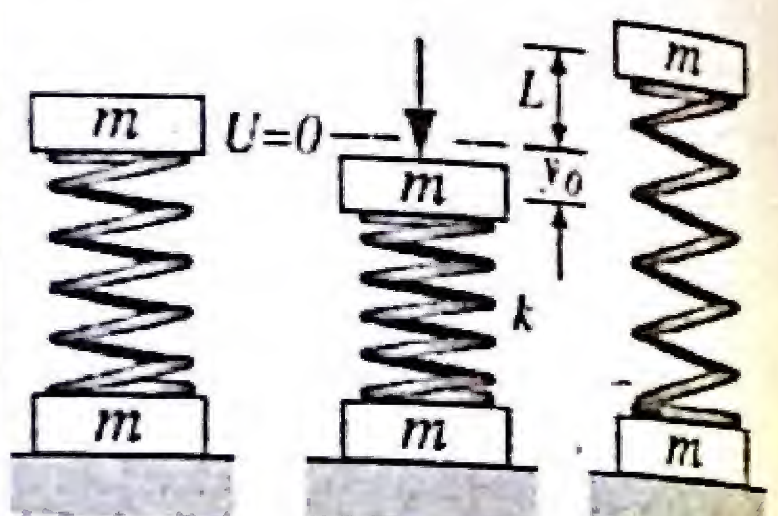
$$\frac{1}{2}ky_0^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + mg\left(y_0 + \frac{mg}{k}\right) = \frac{3}{2}\frac{mg}{k} + mgy_0$$

$$y_0^2 - 2\left(\frac{mg}{k}\right)y_0 - 3\left(\frac{mg}{k}\right)^2 = 0$$

$$\left(y_0 - \frac{3mg}{k}\right)\left(y_0 + \frac{mg}{k}\right) = 0$$

Tomando la solución positiva: $y_0 = 3mg/k$, el sistema se despega de la mesa para:

$$y_0 > 3\frac{mg}{k}$$



(a) (b) (c)

Respuesta

$$\boxed{y_0 > 3\frac{mg}{k}}$$

PR-4.18. *Amortiguamiento de un ascensor en caída*

El cable de la cabina de un ascensor cuyo peso es mg = 4000 N, se rompe cuando está a una altura d = 12 m por encima de un resorte amortiguador de constante elástica k = 10 000 N/m. Inmediatamente un dispositivo de seguridad se activa y los rieles de guía provocan una fuerza de fricción constante F_c = 1000 N que se opone al movimiento de la cabina.

a) Determine la distancia que se comprime el resorte.
b) La cabina rebota del resorte varias veces y finalmente se detiene, ¿cuál es la longitud total recorrida por la cabina durante todo el trayecto desde el instante en que se desprende hasta que finalmente queda en reposo?

Solución: a) Justo antes de chocar con el resorte, el trabajo que ha realizado la fuerza de fricción representa el cambio de la energía mecánica total:

$$W_{12} = (K+U)_2 - (K+U)_1$$

$$-F_c d = (K_2 + 0) - (0 + mgd) \quad \Rightarrow \quad K_2 = mgd - F_c d$$

La cabina choca con el resorte (posición 2), desciende y se detiene momentáneamente (posición 3) al alcanzar la máxima compresión, x del resorte. El trabajo de la fuerza no conservativa de fricción es:

$$W_{23} = (K+U)_3 - (K+U)_2:$$

$$-F_c x = \left(0 - mgx + \frac{1}{2}kx^2\right) - (K_2 + 0)$$

Sustituyendo la expresión obtenida anteriormente para K_2:

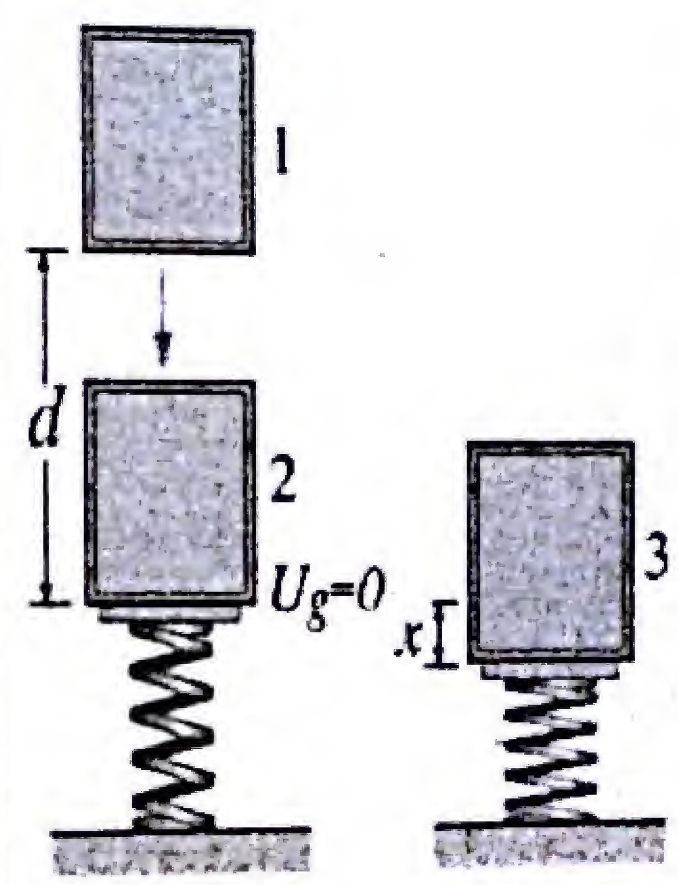
$$\frac{1}{2}kx^2 - (mg - F_c)x - (mg - F_c)d = 0$$

Sustituyendo los valores numéricos, se obtiene:

$$5000x^2 - 3000x - 36000 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3\ \text{m}.$$

b) La cabina se eleva y desciende varias veces hasta que finalmente se detiene. Si se desprecia la fricción estática, el resorte estará comprimido en equilibrio en una distancia y:

$$ky = mg \quad \Rightarrow \quad y = \frac{mg}{k} = \frac{4000\text{N}}{10000\text{N/m}} = 0{,}4\text{m}$$



En esa posición de equilibrio la energía mecánica final del sistema es:

$$E_f = \frac{1}{2}ky^2 - mgy = \frac{1}{2}(10000)(0,4)^2 - (4000)(0,4) = -800J$$

Mientras que la energía mecánica que tenía en el instante de romperse el cable era:

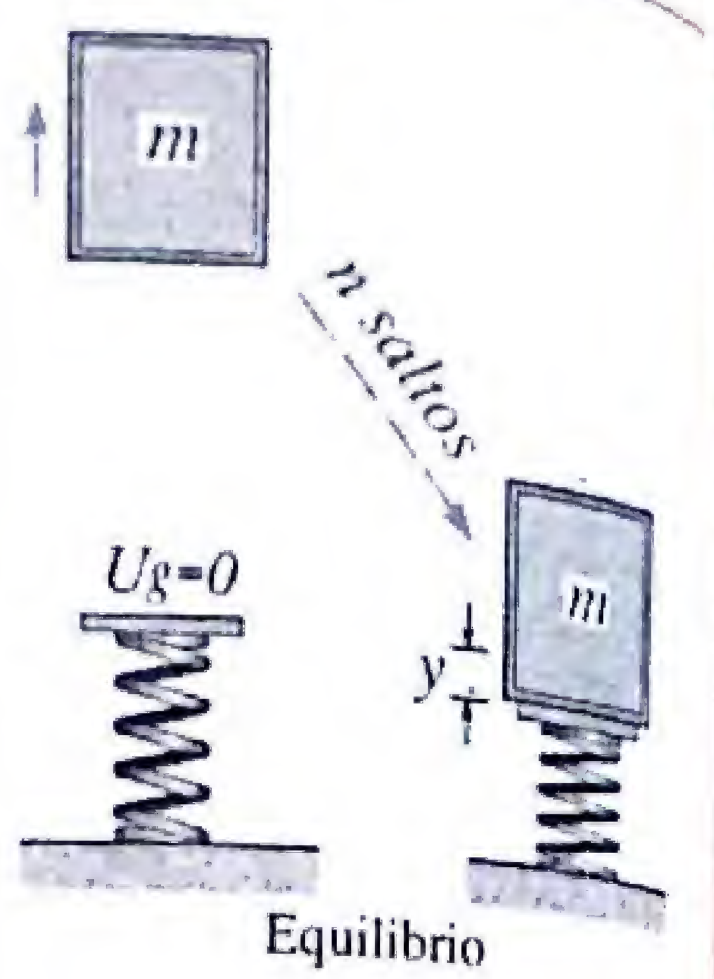
$$E_i = mgd = (4000N)(12m) = +48000J$$

La pérdida de energía mecánica es igual al trabajo neto realizado por la fuerza de fricción F_c durante los múltiples viajes de subida y de bajada:

$$W_{nc} = E_f - E_i = -800J - (+48000J) = -48800J$$

Si L es la longitud total recorrida por la cabina durante los múltiples viajes, obtenemos:

$$W_{nc} = -F_c L \quad \Rightarrow \quad L = \frac{-W_{nc}}{F_c} = \frac{-(-48800J)}{1000N} = 48,8m$$



Respuesta:

a) $x = 3$ m
b) $L = 48.8$ m

PR-4.19. *Trabajo en un camino circular*

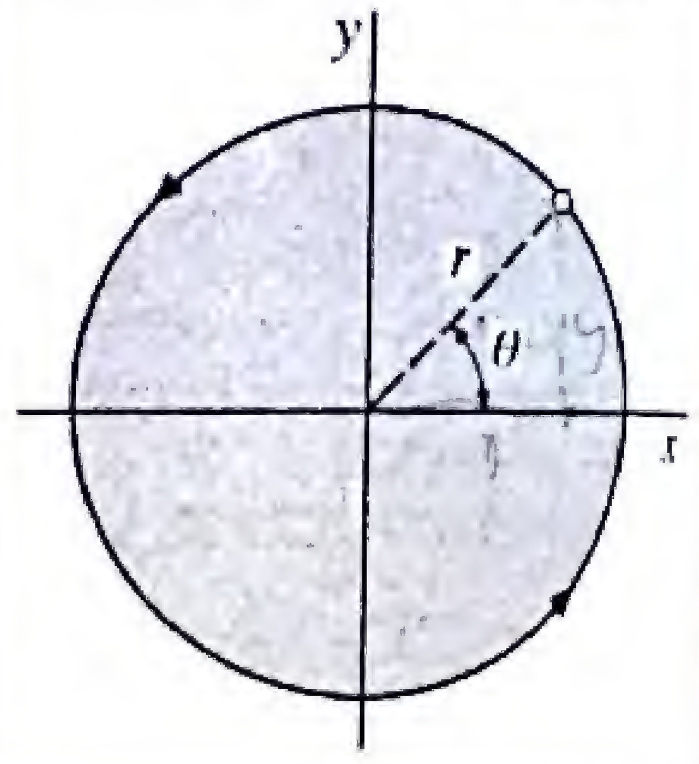
Una partícula parte del punto A y regresa al mismo punto después de recorrer una circunferencia de radio r bajo la acción de la fuerza:

$$\vec{F} = a(y\hat{x} - x\hat{y})$$

Siendo a una constante.

a) Halle el trabajo realizado.

b) ¿Será esta fuerza conservativa?



Solución: La expresión de la fuerza en coordenadas polares es:

$$\vec{F} = a(r sen\theta\hat{x} - r cos\theta\hat{y}) = -ar\hat{\theta}$$

Esto significa que, en todo punto de una circunferencia de radio r la fuerza tiene módulo constante: $|\vec{F}| = ar$, y su dirección es tangente a la circunferencia. El trabajo en el camino circular será:

$$W = \oint \vec{F} \bullet d\vec{s} = \oint (-ar\hat{\theta}) \bullet rd\theta\hat{\theta} = \int_0^{2\pi} -ar^2 d\theta = -2\pi ar^2$$

b) Como el trabajo realizado no es nulo en un camino cerrado, concluimos que la fuerza es no-conservativa.

Respuesta:

a) $W = -2\pi ar^2$
b) $W \neq 0 \Rightarrow F$ no-conservativa

PR-4.20. *¿Será conservativa o no conservativa?*

Una partícula se mueve en el plano x-y, desde el origen hasta una posición final de coordenadas (L, L) bajo la acción de una fuerza dada por la expresión:

$$\vec{F} = bx\hat{y}$$

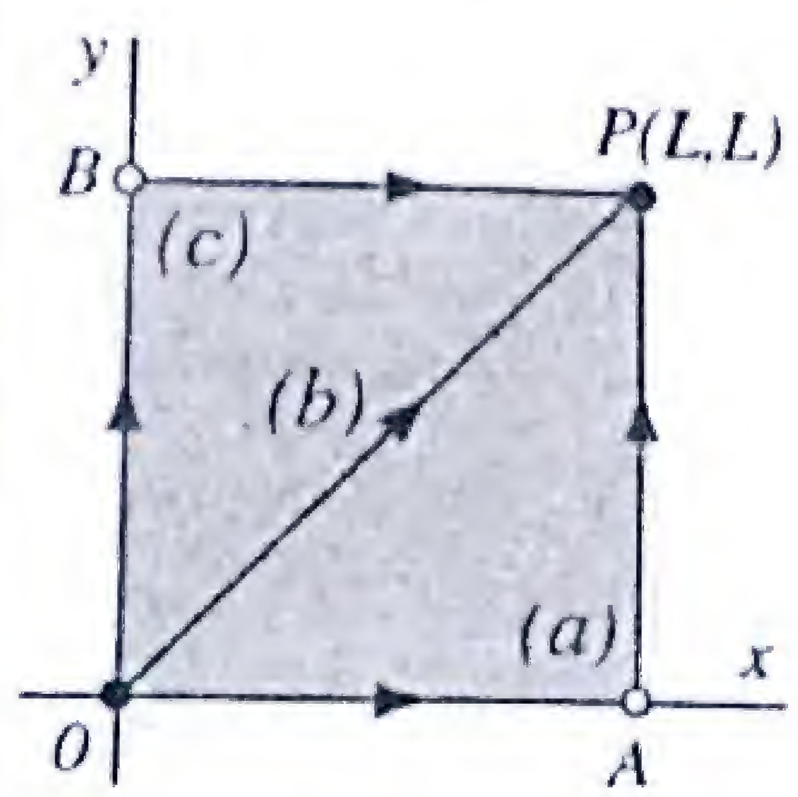
Siendo b una constante positiva. Halle el trabajo realizado sobre la partícula a lo largo de tres caminos diferentes:

a) Camino O → A → P

b) Camino O → B → P

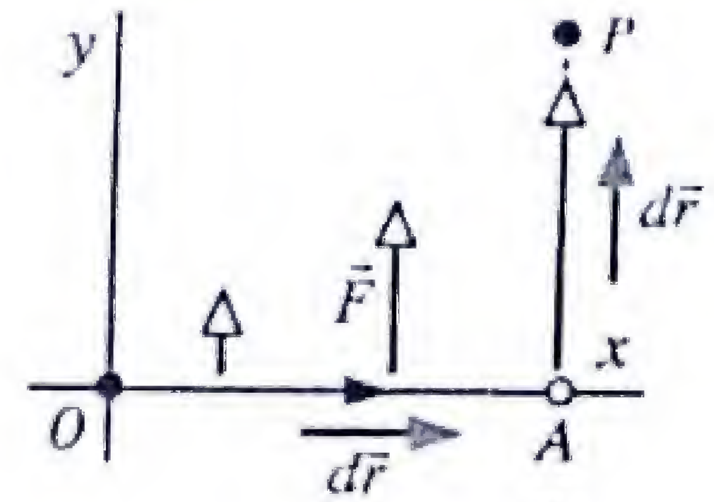
c) Camino diagonal O → P

d) ¿Es esta fuerza conservativa o no conservativa?



Solución: a) En el tramo horizontal OA, la fuerza es perpendicular al desplazamiento ($\vec{F} \perp d\vec{r}$) y el trabajo es nulo:

$$W_{OA} = 0$$



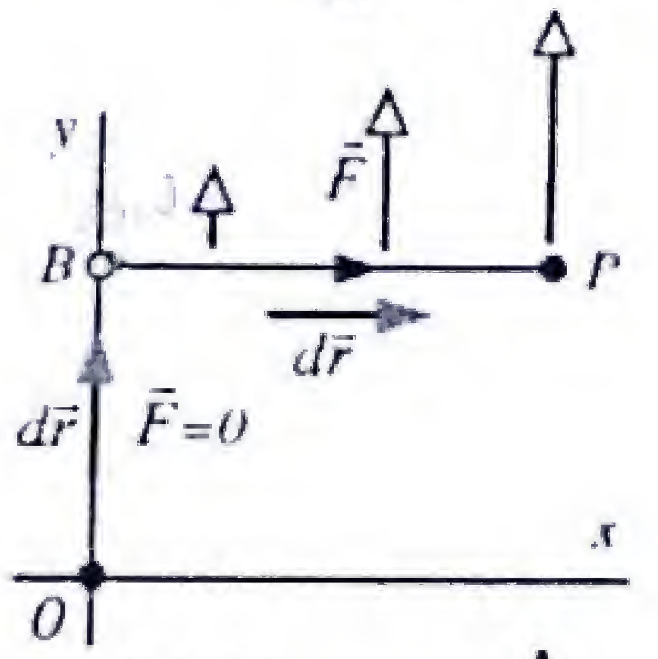
En el tramo vertical AP la fuerza es constante, $\vec{F} = bL\hat{y}$ y el trabajo es:

$$W_{AP} = \int_A^P \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_{y=0}^{y=L} bL\hat{y} \bullet dy\hat{y} = bL\int_0^L dy = bL^2$$

Por lo tanto: $$W_{OAP} = W_{OA} + W_{AP} = 0 + bL^2 = bL^2$$

b) En el tramo OB, $\vec{F} = 0$ y por tanto el trabajo es cero:

$$W_{OB} = 0$$



En el tramo BP, la fuerza y el desplazamiento son perpendiculares, y por lo tanto el trabajo también es cero:

$$W_{BP} = 0$$

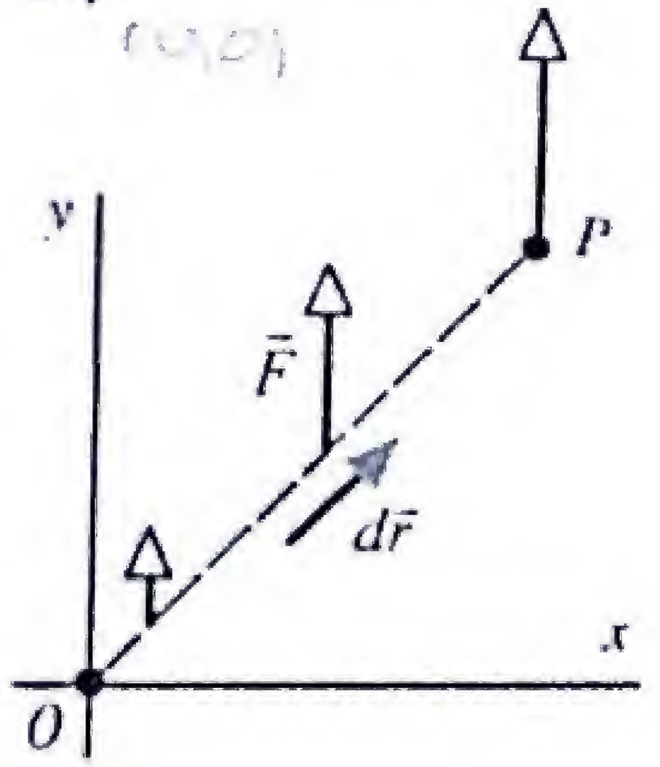
$$W_{OBP} = W_{OB} + W_{BP} = 0 + 0 = 0$$

c) En el tramo diagonal O →P se cumple $x = y$, y el producto escalar de la fuerza por el desplazamiento es:

$$\vec{F} \bullet d\vec{r} = bx\hat{y} \bullet (\hat{x}dx + \hat{y}dy) = bxdy = bydy$$

El trabajo es:

$$W_{OP} = \int_O^P \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_{y=0}^{y=L} bydy = \frac{1}{2}bL^2$$



d) Como $W_{OAP} \neq W_{OBP} \neq W_{OP}$, es decir, el trabajo es diferente para los tres caminos que conectan los mismos puntos, se concluye que esta fuerza es *no-conservativa*.

Respuesta:

a) $W_{OAP} = bL^2$, b) $W_{OBP} = 0$

c) $W_{OP} = \frac{1}{2}bL^2$

d) No es conservativa

PR-4.21. *Trabajo por tres rutas distintas*

Una partícula se mueve desde el origen $P(0,0)$ hasta un punto $Q(1,1)$ bajo la acción de una fuerza:

$$\vec{F}(x,y) = 6x^2\hat{x} + 15y\hat{y}$$

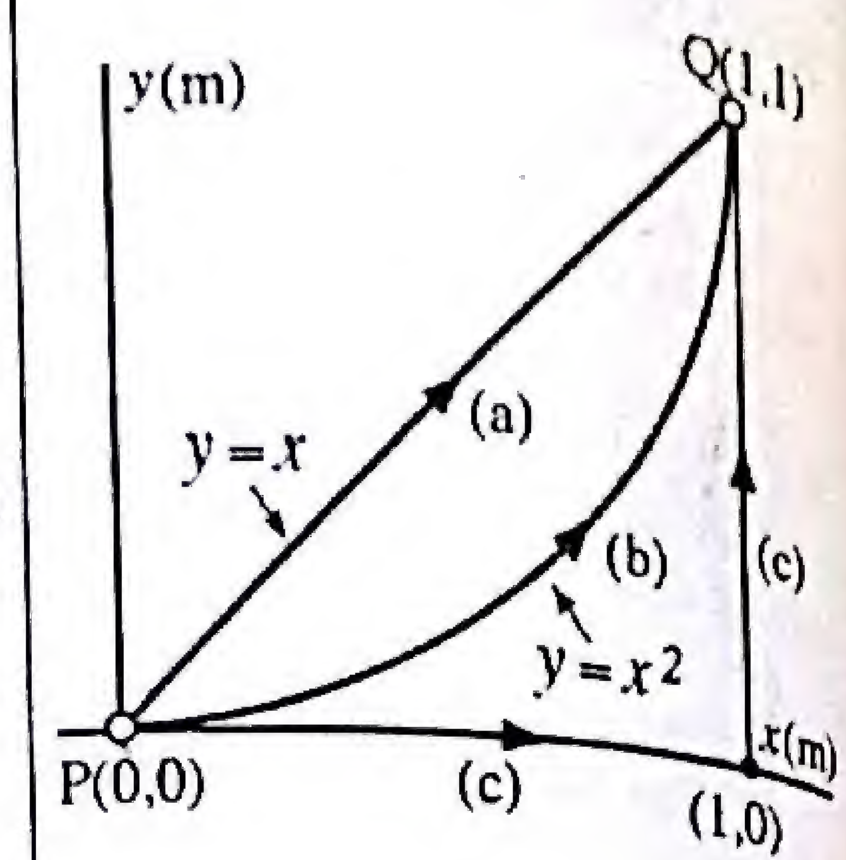
La fuerza se expresa en newtons y las distancias en metros. Determine el trabajo realizado sobre la partícula:

a) A lo largo del camino (a) recto $y = x$.

b) A lo largo del camino (b) parabólico: $y = x^2$

c) A lo largo del camino (c) indirecto.

d) ¿Será esta fuerza conservativa?



Solución: El trabajo en las diferentes rutas que conectan los puntos P y Q es:

$$W_{PQ} = \int_{0,0}^{1,1} \vec{F}(x,y)\bullet d\vec{r} =$$

$$\int_{0,0}^{1,1}(6x^2\hat{x} + 15y\hat{y})\bullet(dx\hat{x} + dy\hat{y}) = \int_{0,0}^{1,1} 6x^2dx + 15ydy$$

dy = 2x dx

(a) Por el camino recto, $y = x$:

$$W_a = \int_0^1 (6x^2 + 15x)dx = 6\frac{x^3}{3} + 15\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = +9{,}5\text{J}$$

b) Por el parabólico, $y = x^2$:

$$W_b = \int_0^1 6x^2dx + 15x^2(2xdx) = \int_0^1 (6x^2 + 30x^3)dx$$

$$W_b = 6\frac{x^3}{3} + 30\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = +9{,}5\text{J}$$

(c) Por el camino indirecto:

$$W_c = \int_0^1 6x^2dx + \int_0^1 15ydy = 6\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + 15\frac{y^2}{2}\Big|_0^1 = +9{,}5\text{J}$$

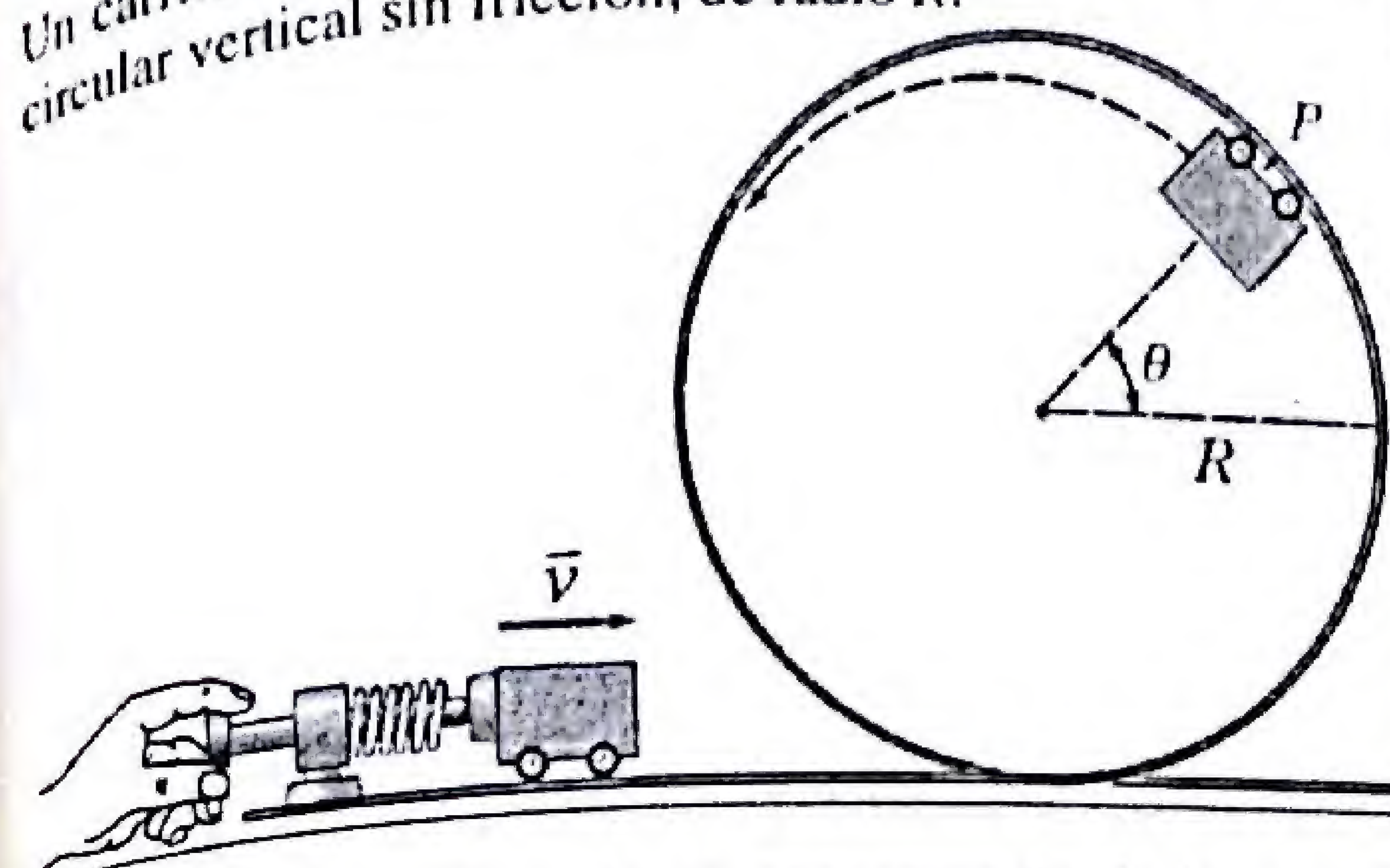
d) La fuerza $\vec{F}$ es solo función de la posición y para los tres diferentes caminos el trabajo es el mismo, por lo tanto, a la luz de estos resultados es conservativa.

Respuesta

a) $W_a = +9.5\text{J}$.
b) $W_b = +9.5\text{J}$.
c) $W_c = +9.5\text{J}$
d) $\vec{F}$ conservativa.

PR-4.22. *¿En qué punto se pierde el contacto?*

Un carrito de masa m es lanzado por el pie de una pista circular vertical sin fricción, de radio R.



a) ¿Cuál es el valor mínimo de la velocidad, v_0 para que el carrito pueda darle la vuelta completa al círculo sin perder contacto con la vía.

b) Suponga que la velocidad de lanzamiento es $v = \sqrt{3{,}5Rg}$, determine la posición angular del punto P donde el carrito perderá contacto con la pista circular.

Solución: a) Aplicando la conservación de la energía entre los puntos inferior y superior (A y B), tenemos:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mg(0) = \frac{1}{2}mv_B^2 + mg(2R) \quad (1)$$

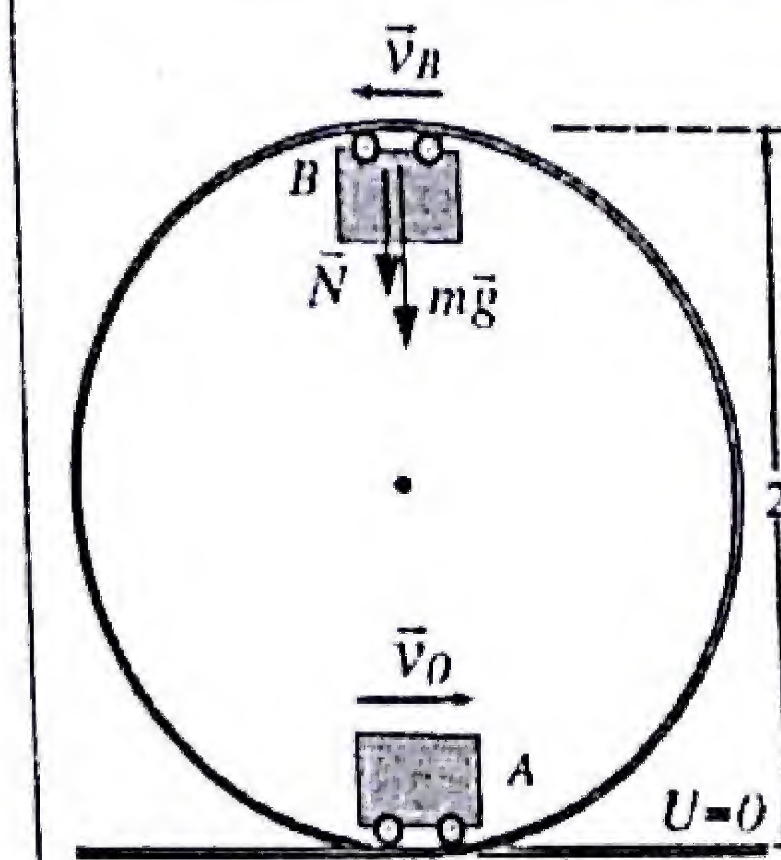
Aplicando la segunda ley de Newton en el punto B:

$$N + mg = m\frac{v_B^2}{R} \quad (2)$$

Eliminando v_B de estas dos relaciones: $\frac{mv_0^2}{R} = N + 5mg$

El mínimo valor v_0 es el necesario para que el carrito esté a punto de perder contacto ($N = 0$). Por lo tanto:

$$v_0 = \sqrt{5Rg} \quad (3)$$

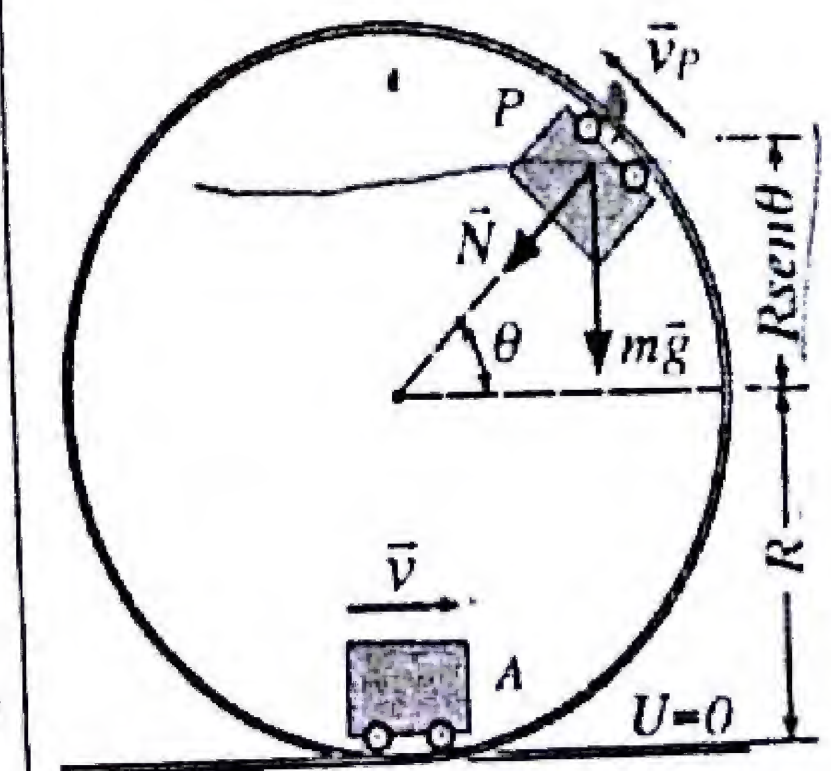


b) Para $v < v_0$, aplicamos la conservación de la energía, entre el punto inferior A y el punto P, donde se pierde contacto:

$$\frac{1}{2}mv^2 + mg(0) = \frac{1}{2}mv_P^2 + mg(R + Rsen\theta) \quad (4)$$

Aplicando en el punto P la segunda ley de Newton y poniendo la fuerza normal nula, tenemos:

$$mgsen\theta = m\frac{v_P^2}{R} \quad (5)$$



Para $v < v_0$

Eliminando v_P de las ecuaciones (4) y (5) y sustituyendo la velocidad inicial $v = \sqrt{3{,}5Rg}$ encontramos:

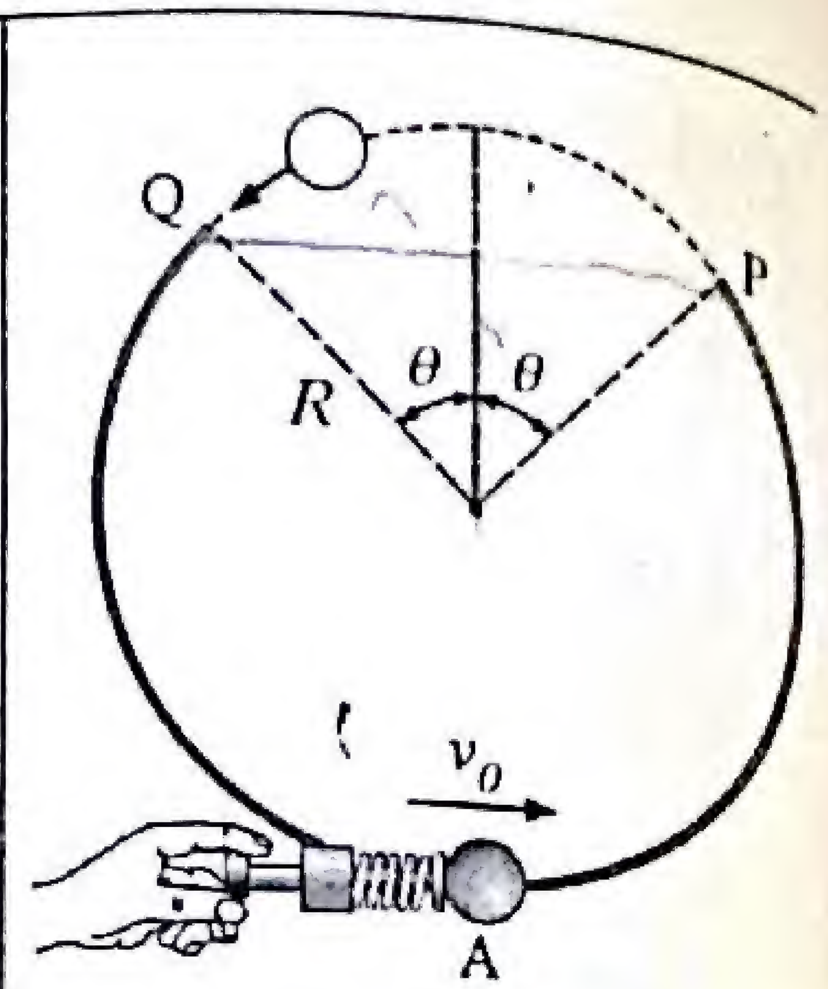
$$sen\theta = \frac{v^2 - 2Rg}{3Rg} = \frac{3{,}5Rg - 2Rg}{3Rg} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = 30^\circ$$

Respuesta:

a) $v_0 = \sqrt{5Rg}$
b) $\theta = 30^\circ$

PR-4.23. *La cuenta salta y cae de nuevo en el alambre*

Un alambre está doblado en forma de arco circular de radio R. El círculo que forma está incompleto en un ángulo 2θ. Se inserta una cuenta y desde la posición inferior se le imprime una velocidad inicial v_o. La cuenta desliza hacia arriba por el alambre sin fricción. ¿Qué valor de la velocidad inicial, v_o, es el apropiado para que la cuenta, después de desprenderse por el punto P y recorrer un trayecto en el aire, caiga de nuevo en el alambre en el punto Q?



Solución: Aplicamos la conservación de conservación de la energía, entre la posición A mas baja ($U = 0$) y el punto P en el que la cuenta abandona la pista:

$$(K+U)_A = (K+U)_P$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_P^2 + mgR(1+\cos\theta)$$

El alcance horizontal es:

$$PQ = 2Rsen\theta,$$

También de las relaciones cinemática podemos escribir:

$$PQ = v_x t = (v_P\cos\theta)\left(\frac{2v_P sen\theta}{g}\right) = \frac{2v_P^2 sen\theta\cos\theta}{g}$$

Por lo tanto:

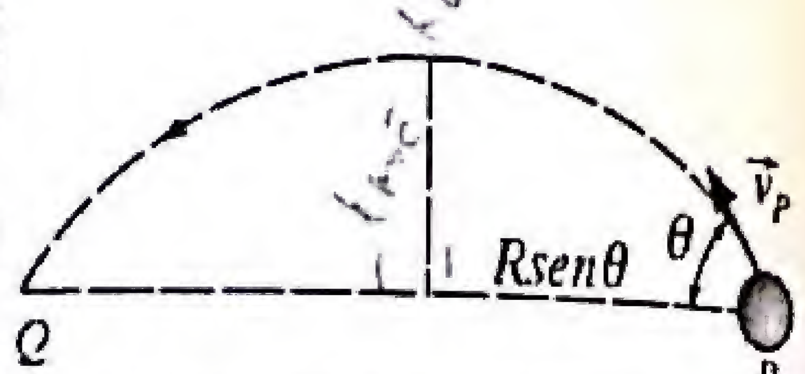
$$2Rsen\theta = \frac{2v_P^2 sen\theta\cos\theta}{g} \quad\Rightarrow\quad v_P^2 = Rg/\cos\theta$$

Si se sustituye v_P^2 en la expresión de conservación de la energía, se obtiene:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m\frac{gR}{\cos\theta} + mgR(1+\cos\theta)$$

Despejando, obtenemos finalmente la velocidad inicial de lanzamiento:

$$v_0 = \sqrt{Rg\left[\frac{1}{\cos\theta} + 2(1+\cos\theta)\right]}$$



Trayectoria parabólica de la cuenta entre los puntos P y Q

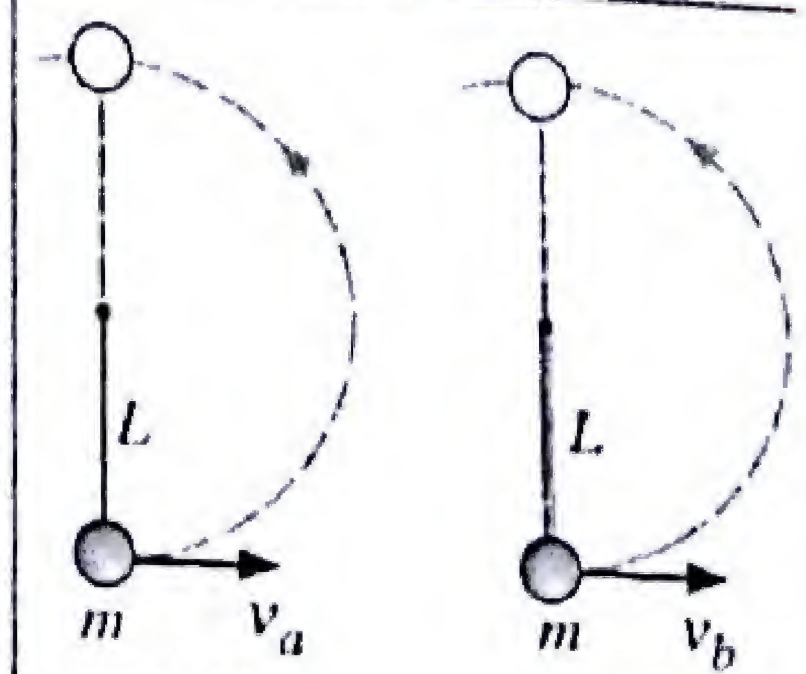
Respuesta

$$\boxed{v_0 = \sqrt{Rg\left[\frac{1}{\cos\theta} + 2(1+\cos\theta)\right]}}$$

PR-4.24. *Péndulo con hilo versus péndulo con barra*

A un péndulo de masa m y longitud L se le imprime una velocidad inicial cuando la esferita está en la posición más baja. Determine el valor mínimo de la velocidad inicial que es necesario para que de una vuelta completa. Considere los dos casos siguientes:

a) Se suspende la esfera de un hilo de masa despreciable.
b) Se suspende de una barra rígida de masa despreciable.



a) Hilo b) Barra

Solución: Tomando $U = 0$ en la posición inicial y aplicando el principio de conservación de la energía a la pelota entre esta posición y la posición mas alta:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = 2mgL + \frac{1}{2}mv_f^2 \qquad (1)$$

Caso (a): La cuerda debe aflojarse justo cuando la esferita llega al punto mas alto (tensión nula). Aplicando la 2a ley de Newton:

$$\sum F_r = mg + 0 = \frac{mv_f^2}{L} \qquad (2)$$

Combinado las ecuaciones (1) y (2), se obtiene:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = 2mgL + \frac{1}{2}mgL \quad\Rightarrow\quad v_0 = \sqrt{5gL}$$

Caso (b): La velocidad final v_f es nula y de la ecuación (1) se obtiene:

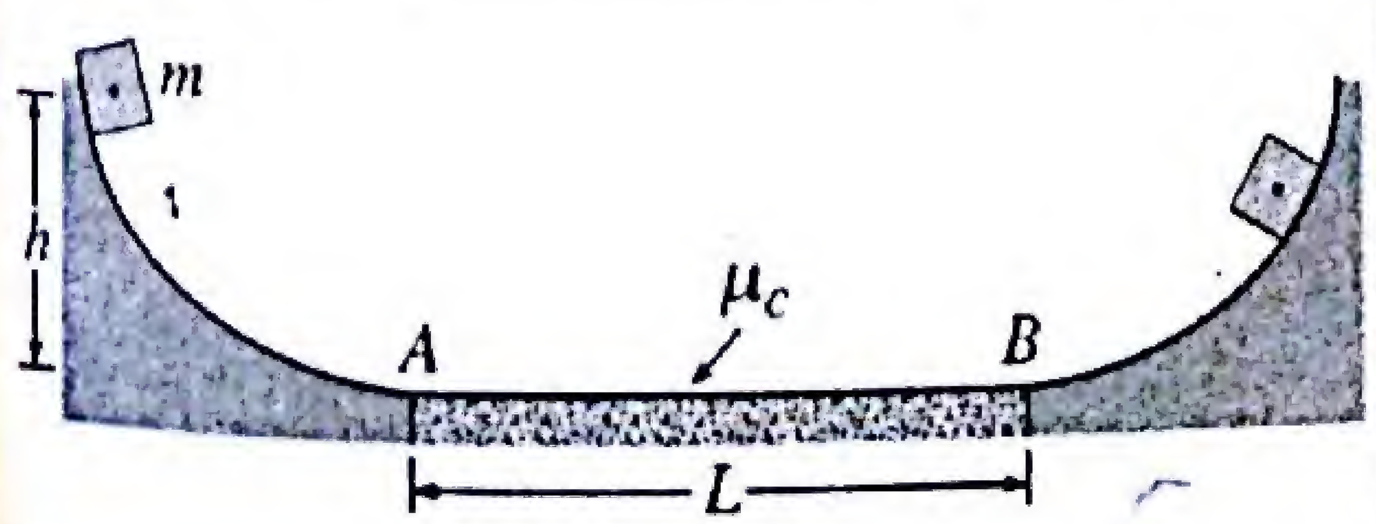
$$\frac{1}{2}mv_0^2 = 2mgL + 0 \quad\Rightarrow\quad v_0 = \sqrt{4gL}$$

Respuesta

a) $v_0 = \sqrt{5gL}$
b) $v_0 = \sqrt{4gL}$

PR-4.25. *¿Cuantos viajes realiza antes de detenerse?*

Un bloque de masa m se desliza en un recipiente cuya sección transversal tiene un perfil curvo a cada lado y una parte central plana horizontal de longitud $L = 20$ cm.

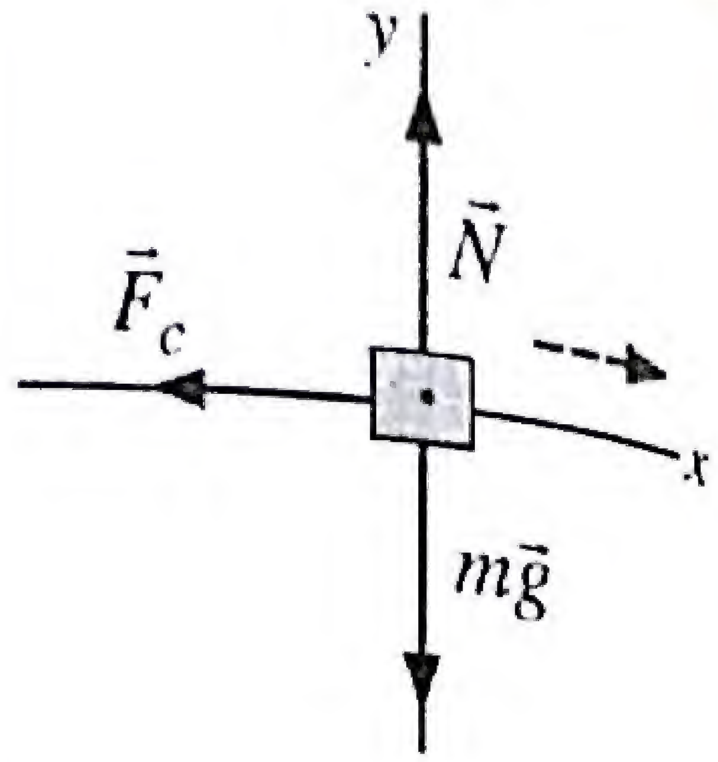


Los lados curvos no ofrecen fricción y el fondo plano es rugoso, con un coeficiente de fricción cinética $\mu_c = 0{,}2$. Si el bloque parte de reposo a una altura $h = 25$ cm:

a) ¿cuántos viajes realiza antes de detenerse?
b) ¿dónde se detendrá el bloque finalmente?

Solución: a) Como el bloque parte de reposo y finalmente se detiene, la energía potencial inicial que tenía a la altura h se invierte en trabajo contra la fuerza de rozamiento cinético (únicamente en la región horizontal). Si D es la distancia horizontal total recorrida desde que comenzó el movimiento hasta que el bloque se detuvo, entonces:

$$F_c D = \mu_c mgD = mgh$$



Simplificando, obtenemos la distancia horizontal total recorrida:

$$D = \frac{h}{\mu_c} = \frac{0{,}25\text{m}}{0{,}20} = 1{,}25\text{m}$$

El número de veces que el bloque pasa por el fondo en uno y otro sentido antes de detenerse es:

$$N = \frac{D}{L} = \frac{1{,}25\text{m}}{0{,}20\text{m}} = 6{,}25$$

Es decir pasa un total de 6 veces (3 de ida, y 3 de regreso), y aún le queda cierta reserva de energía.

b) A partir de su sexto pase por A, el bloque recorre una distancia adicional:

$$x = D - 6L = 1{,}25\text{m} - 6(0{,}2\text{m}) = 0{,}05\text{m} = 5\text{cm}$$

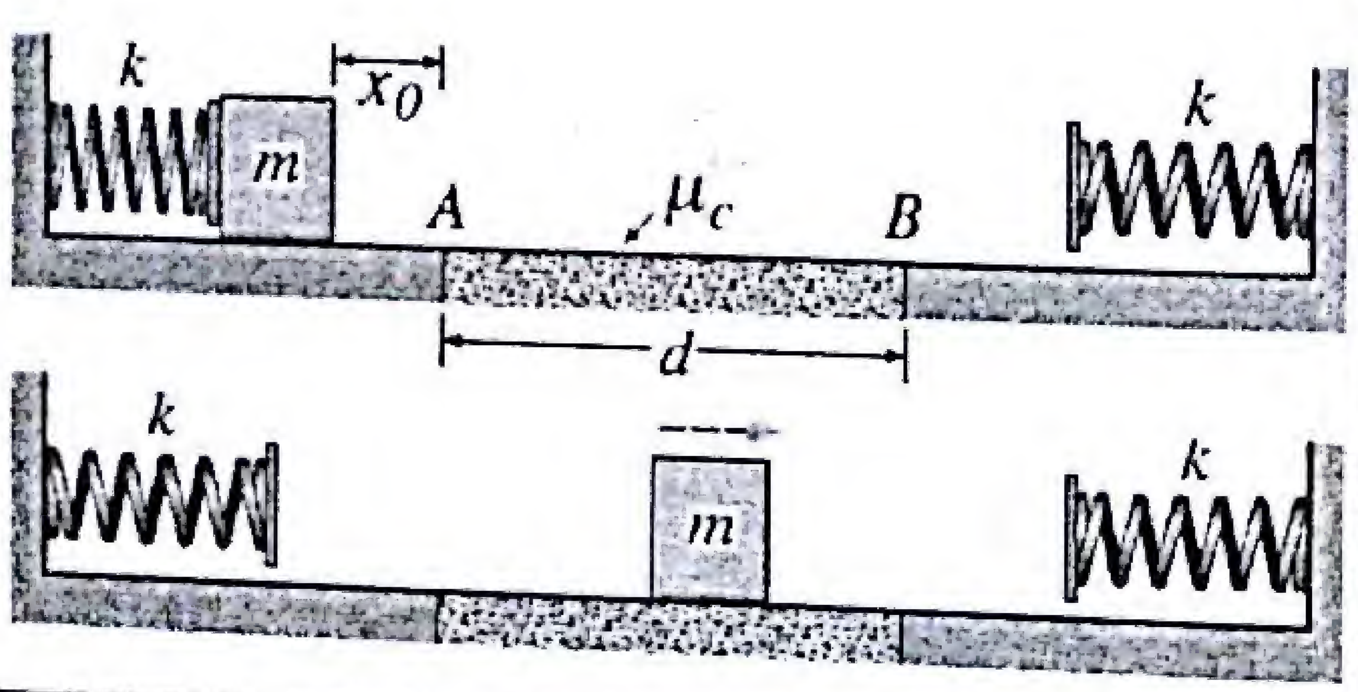
Por lo tanto, se detiene a 5 cm a la derecha del punto A.

Respuesta:

a) $N = 6{,}25$ veces
b) $x = 5$ cm de A

PR-4.26. *¿Dónde se detendrá el bloque?*

Dos resortes ideales idénticos de constante elástica k = 490 N/m., está fijos en los extremos opuestos de una superficie horizontal.



Un bloque de masa m = 1 kg comprime el resorte izquierdo en una distancia x_o = 0,1 m. y luego se suelta. La pista no tiene rozamiento, excepto la parte central AB de longitud d = 0,50 m, cuyo coeficiente de fricción cinético con el bloque $\mu_C = 0{,}08$.

a) Halle la compresión máxima del resorte de la derecha.
b) ¿dónde se detiene el bloque?

Solución: a) La máxima compresión del resorte de la derecha ocurre durante el primer choque. En ese instante el bloque queda momentáneamente en reposo. La energía elástica inicial del resorte de la izquierda se invierte en trabajo contra la fuerza de rozamiento cinético en la región rugosa y en energía elástica del resorte de la derecha:

$$\frac{1}{2}kx_0^2 = \mu_c mgd + \frac{1}{2}kx_1^2$$

Despejando x_1 tenemos:

$$x_1 = \sqrt{x_0^2 - 2\mu_c mgd/k}$$

$$x_1 = \sqrt{(0{,}1\text{m})^2 - \frac{2(0{,}08)(1\text{kg})(9{,}8\text{m/s}^2)(0{,}5\text{m})}{490\text{N/m}}} = 0{,}092\text{m}$$

b) Cada vez que el bloque recorre la región rugosa AB, pierde por fricción una cantidad de energía: $\Delta E_c = \mu_c mgd$. El número de veces que recorre esta distancia es la fracción:

$$N = \frac{E_0}{\Delta E_c} = \frac{kx_0^2}{2(\mu_c mgd)}$$

$$N = \frac{(490\text{N/m})(0{,}1\text{m})^2}{2(0{,}08)(1\text{kg})(9{,}8\text{m/s}^2)(0{,}5\text{m})} = 6{,}25$$

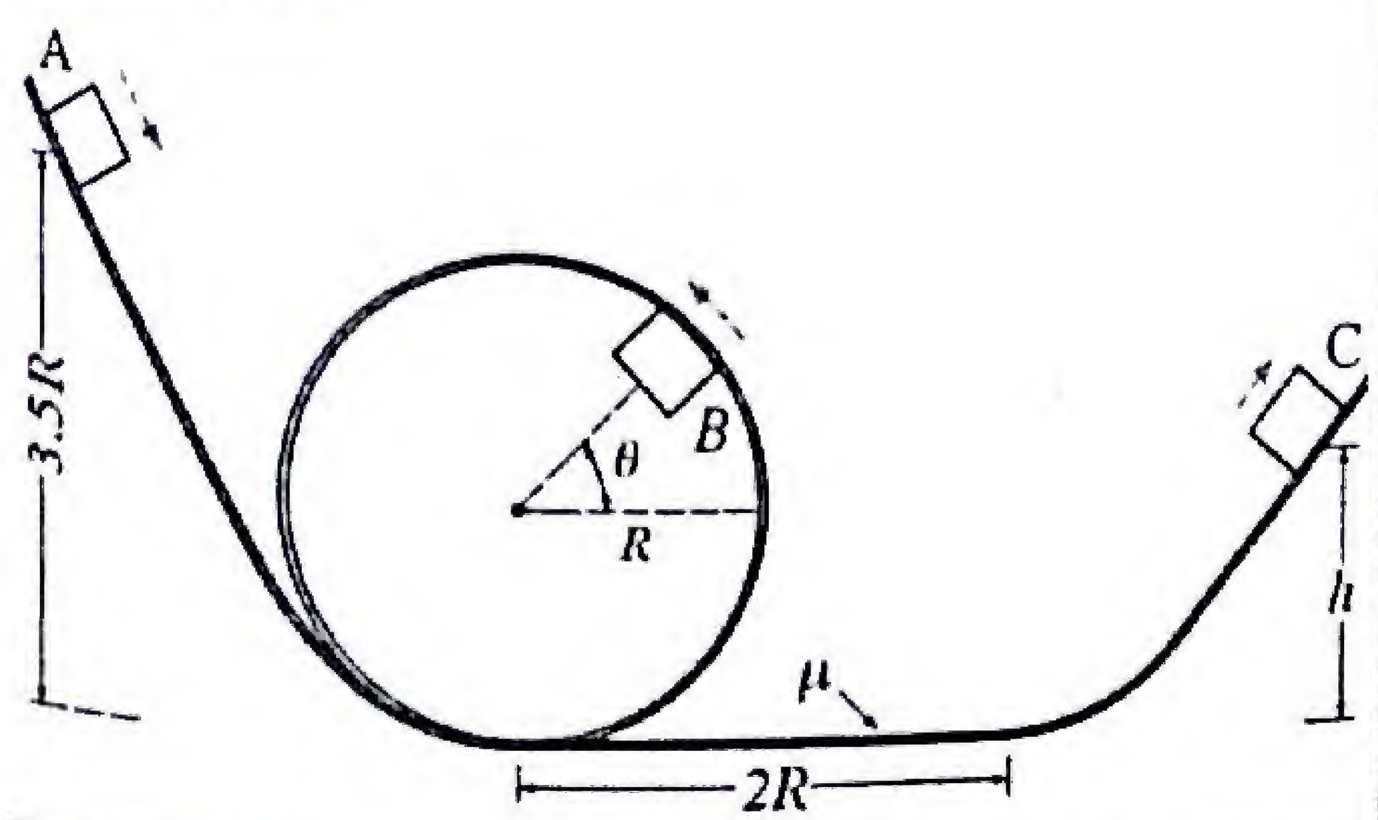
Esto significa que el bloque recorre seis veces la distancia AB y después del último rebote con el resorte de la izquierda se detiene a una distancia Δx = 0,25x(0,5m) = 0,125 m a la derecha del punto A.

Respuesta:

a) x_1 = 9,2 cm.
b) A 12,5 cm a la izquierda del punto B.

PR-4.27. *Rizando el rizo circular II*

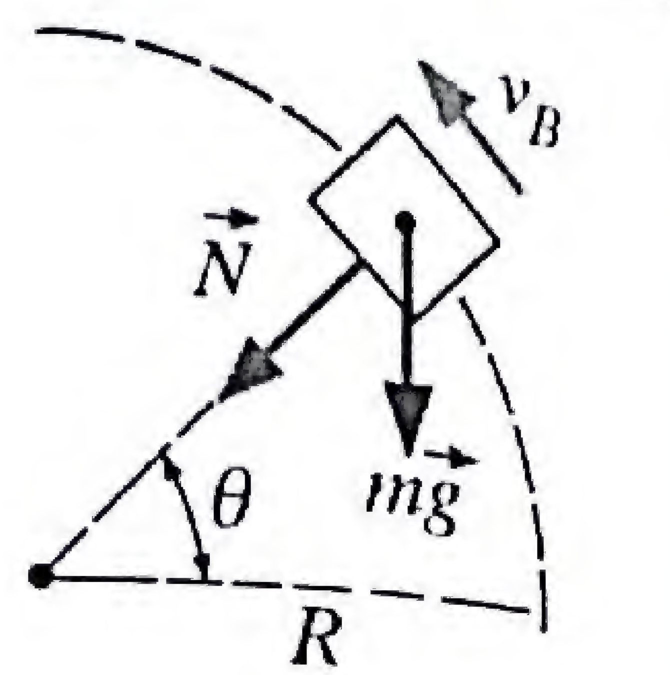
Un bloque de masa m parte del reposo y desciende por la pista mostrada.



No existe rozamiento, excepto en el tramo recto de longitud $d = 2R$, donde el coeficiente cinético es μ = 0,25. Determine:

a) La velocidad del bloque cuando llega al punto B del rizo a un ángulo $\theta = 30°$.
b) El valor de la fuerza normal sobre el bloque en el punto B.
c) La máxima altura h que alcanza el bloque en el punto C al final de la pista.

Solución: a) Tomando como nivel de referencia de energía potencial a la altura $y = 0$, y aplicando la conservación de la energía mecánica total entre el punto inicial A y el punto intermedio B, se obtiene:



$$K_A + U_A = K_B + U_B$$

$$0 + mg(3.5R) = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgR(1 + sen30°)$$

Despejando, se obtiene la velocidad en el punto B:

$$mv_B^2 = 2mgR(3.5 - 1 - 0.5) \quad \Rightarrow \quad v_B = \sqrt{4Rg}$$

b) Aplicando la segunda ley de Newton en el punto B:

$$\sum F_r = N + mgsen30° = m\frac{v_B^2}{R}$$

$$N = m\frac{v_B^2}{R} - mgsen30° = m\frac{4Rg}{R} - mg\frac{1}{2} = 3{,}5mg$$

c) La fuerza de rozamiento cinético realiza un trabajo negativo sobre el bloque y provoca una disminución de la energía durante su recorrido entre los puntos A y C:

$$(K_C - K_A) + (U_C - U_A) = W_c$$

$$(0 - 0) + (mgh - 3.5mgR) = -\mu mg(2R)$$

$$h = (3.5 - 2\mu)R = [3.5 - 2(0{,}25)]R = 3R$$

Respuesta:

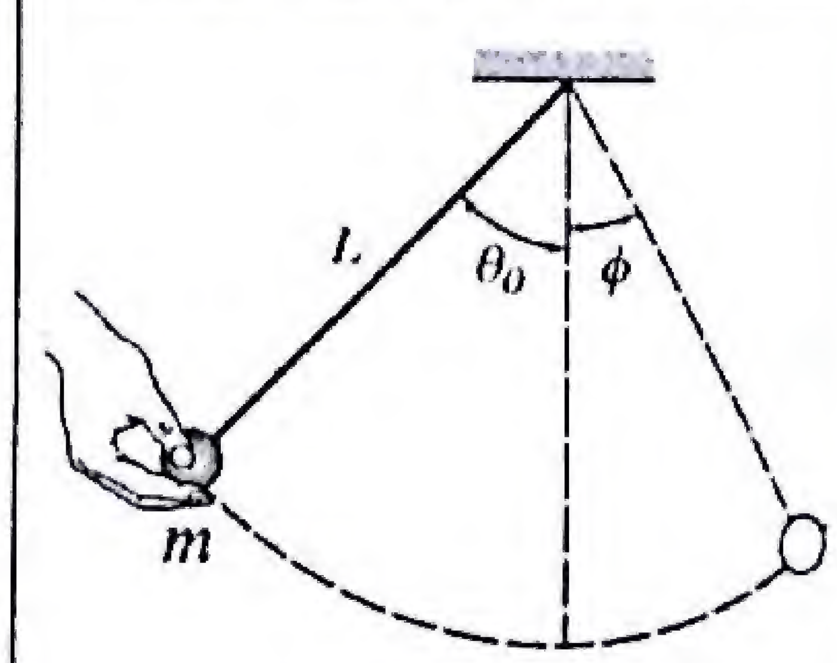
a) $v_B = \sqrt{4Rg}$.
b) $N = 3{,}5mg$
c) $h = 3R$

PR-4.28. *A cierto ángulo se romperá el hilo del péndulo*

Una esferita de masa $m = 5$ kg se suspende de un hilo, se aparta hasta que el hilo forma un ángulo θ_0 con respecto a la vertical y luego se suelta.

a) Halle la tensión de la cuerda en función del ángulo ϕ.

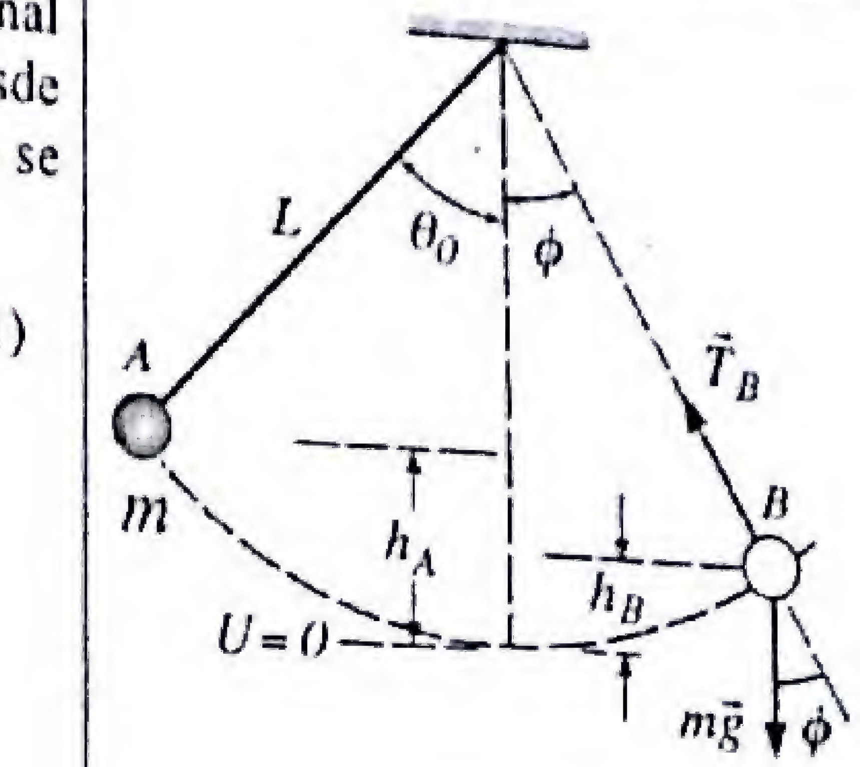
b) Si la esfera se suelta desde la posición horizontal del hilo ($\theta_0 = 90°$) y este sólo puede soportar una tensión máxima de 127,3 N, ¿a qué ángulo ϕ se romperá el hilo?



Solución: Las fuerzas radiales son la tensión de la cuerda y la componente del peso. La resultante de éstas provee la aceleración centrípeta. Aplicando la 2a ley de Newton:

$$\sum F_r = T_B - mgcos\phi = m\frac{v_B^2}{L} \qquad (2)$$

Tomemos el nivel cero de energía potencial gravitacional en la posición mas baja de la esfera. En el recorrido desde A hasta el punto B la energía mecánica del sistema se conserva:



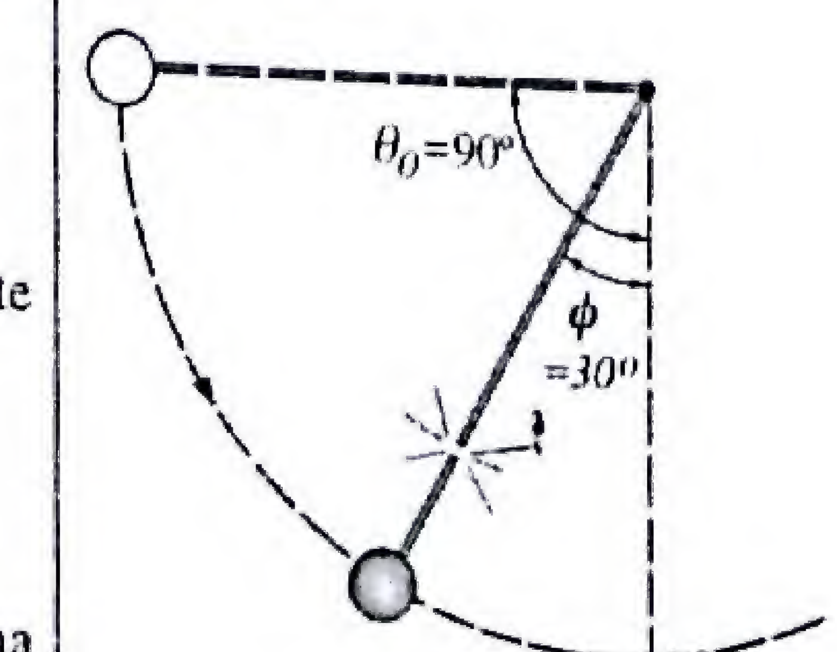
$$mgh_A + \frac{1}{2}m(0)^2 = mgh_B + \frac{1}{2}mv_B^2 \qquad (1)$$

Eliminando v_B de estas ecuaciones, tenemos:

$$T_B = mgcos\phi + \frac{2mg}{L}(h_A - h_B)$$

La diferencia de alturas es: $h_A - h_B = L(cos\phi - cos\theta_0)$, por lo tanto la tensión de la cuerda es:

$$T_B = mg(3cos\phi - 2cos\theta_0)$$



b) En el caso particular cuando el hilo está inicialmente horizontal ($\theta_0 = 90°$), la expresión anterior queda:

$$T(\phi) = 3mgcos\phi$$

De acuerdo a esta expresión la tensión se hace máxima cuando el hilo alcanza la posición vertical ($\phi = 0°$).

Si la máxima tensión permitida para el hilo es 127,3 N, el hilo se rompe para un ángulo:

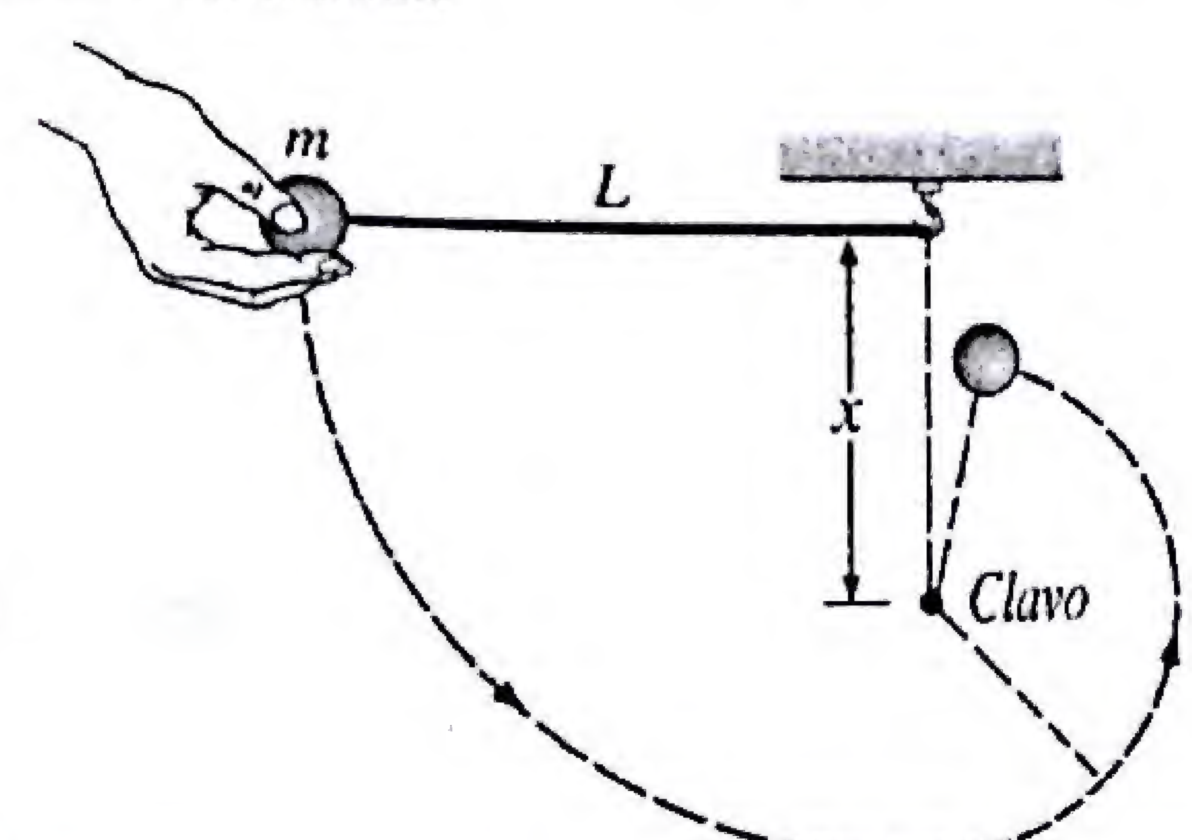
$$\phi_c = arccos(\frac{T_{max}}{3mg}) = arccos[\frac{127{,}3N}{3(5kg)(9{,}8m/s^2)}] = 30°$$

Respuesta:

a) $T_B = mg(3cos\phi - 2cos\theta_0)$
b) $\phi_c = arccos(\frac{T_{max}}{3mg}) = 30°$

PR-4.29. *El péndulo interrumpido de Galileo*

Una esferita de masa m, que está atada a un hilo de longitud L, se suelta desde el reposo con el hilo en la posición horizontal:



Cuando la esferita pasa por la posición mas baja, el hilo vertical pega con un clavo que está fijo a una distancia x por debajo del punto de suspensión. Demuestre que, para que la esferita de una vuelta completa alrededor del clavo, el valor mínimo de la distancia x debe ser:

$$x_{min} = \frac{3}{5}L$$

Solución: El clavo está estacionario no realiza trabajo sobre la cuerda y por lo tanto se conserva la energía. Tomemos el nivel cero de energía potencial gravitacional en la parte más baja de la trayectoria. Al soltar la esferita, su energía potencial inicial en la posición inicial, A, es $U_A = mgL$ y cuando alcanza el tope de la trayectoria circular de radio r en la posición final B, su energía potencial será:

$$U_B = 2mgr = 2mg(L-x)$$

Aplicando la conservación de la energía entre las posiciones A y B:

$$(K+U)_A = (K+U)_B$$

$$\frac{1}{2}m(0)^2 + mgL = \frac{1}{2}mv_B^2 + 2mg(L-x) \qquad (1)$$

Para hallar la velocidad en B aplicamos la segunda ley de Newton. La fuerza centrípeta que es responsable del movimiento circular es la resultante de la tensión de la cuerda y el peso de la esferita:

$$\sum F_r = T + mg = m\frac{v_B^2}{r} = m\frac{v_B^2}{(L-x)}$$

Para que la esferita pase por B con la menor velocidad posible, la tensión T de la cuerda debe ser nula; de modo que la velocidad está dada por:

$$mg = m\frac{v_B^2}{(L-x)} \qquad \Rightarrow \qquad v_B = \sqrt{g(L-x)} \qquad (2)$$

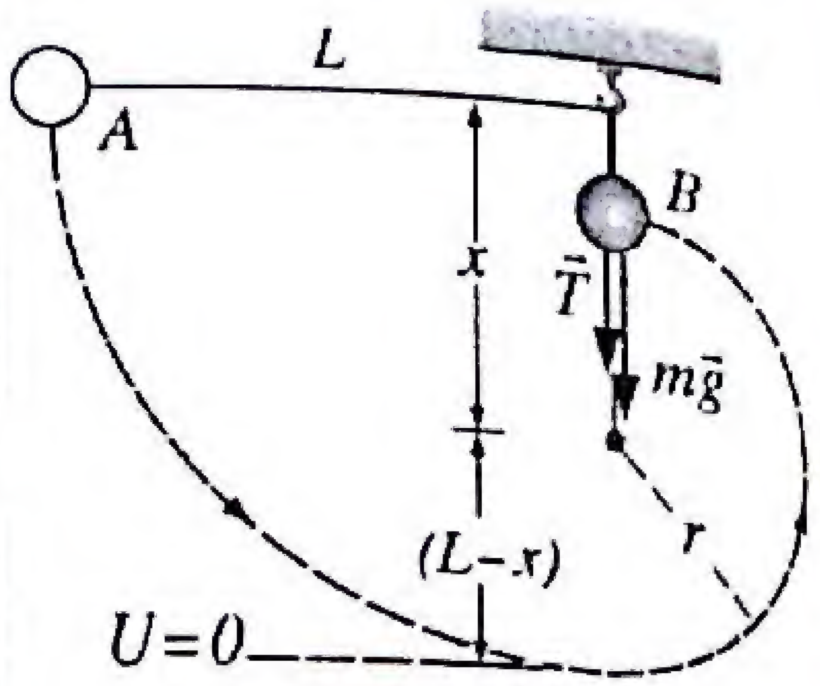
Reemplazando este resultado en la ecuación (1) obtenemos:

$$mgL = 2mg(L-x) + \frac{1}{2}mg(L-x)$$

Despejando, encontramos el valor mínimo de la distancia x para que la esferita de una vuelta completa alrededor del clavo:

$$x_{min} = \frac{3}{5}L$$

Si x es mayor que este valor (cuando el punto B está más bajo), la velocidad de la esferita allí será mayor y ésta tendrá suficiente energía para rotar, enrollando así el hilo continuamente alrededor de la clavija.



Respuesta:

$$\boxed{x_{min} = \frac{3}{5}L}$$

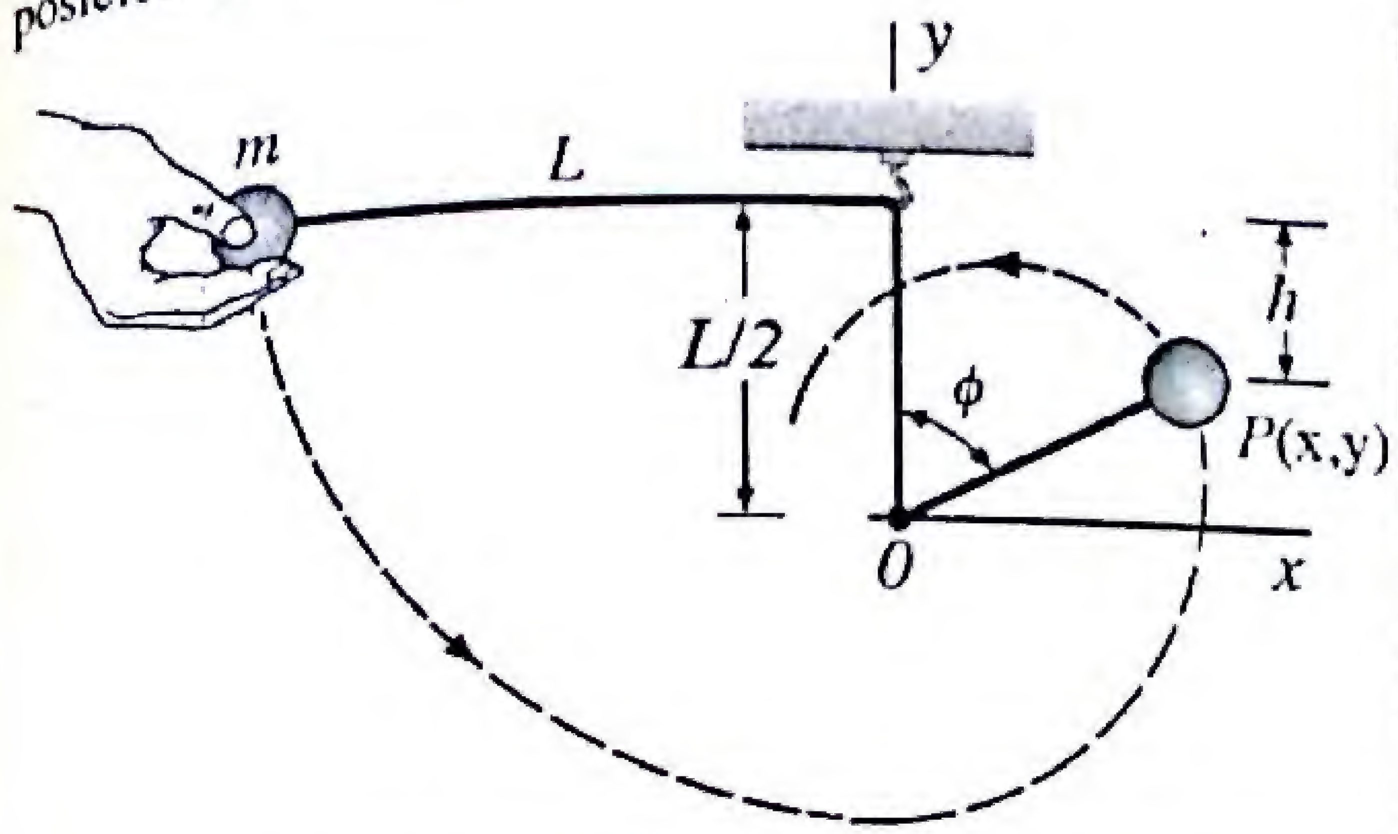
PR-4.30. *¿Dónde se afloja la cuerda?*

Una esferita de masa m que está atada a un hilo de longitud $L = 2$ m se suelta en reposo con el hilo en posición horizontal.

Cuando la esferita pasa por la posición mas baja, el hilo pega con un clavo en O que está fijo a una distancia $L/2$ por debajo del punto de suspensión.

a) Halle las coordenadas del punto $P(x,y)$ en que la cuerda se afloja y la esferita abandona su trayectoria circular alrededor del clavo.

b) ¿Cuál es la velocidad de la esferita en ese punto?



Solución: Por conservación de la energía, la energía cinética en el punto P será igual a la disminución de energía potencial de la esferita desde el punto de partida ($\Delta K = -\Delta U$):

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh = mg\frac{L}{2}(1-\cos\phi)$$

En el punto P, la cuerda se afloja (tensión nula) y por la segunda ley de Newton:

$$\sum F_r = mg\cos\phi = m\frac{v^2}{(L/2)}$$

Eliminando mv^2 de estas dos ecuaciones, se obtiene:

$$\frac{1}{2}\frac{L}{2}mg\cos\phi = mg\frac{L}{2}(1-\cos\phi) \qquad \Rightarrow \qquad \cos\phi = 2/3$$

Las coordenadas del punto P son:

$$x = \frac{L}{2}sen\phi = \frac{L}{2}\sqrt{1-\cos^2\phi} = \frac{\sqrt{5}}{6}L = \frac{\sqrt{5}}{3}m$$

$$y = \frac{L}{2}\cos\phi = \frac{L}{2}\frac{2}{3} = \frac{1}{3}L = \frac{1}{3}m$$

b) La magnitud de la velocidad en el punto P es:

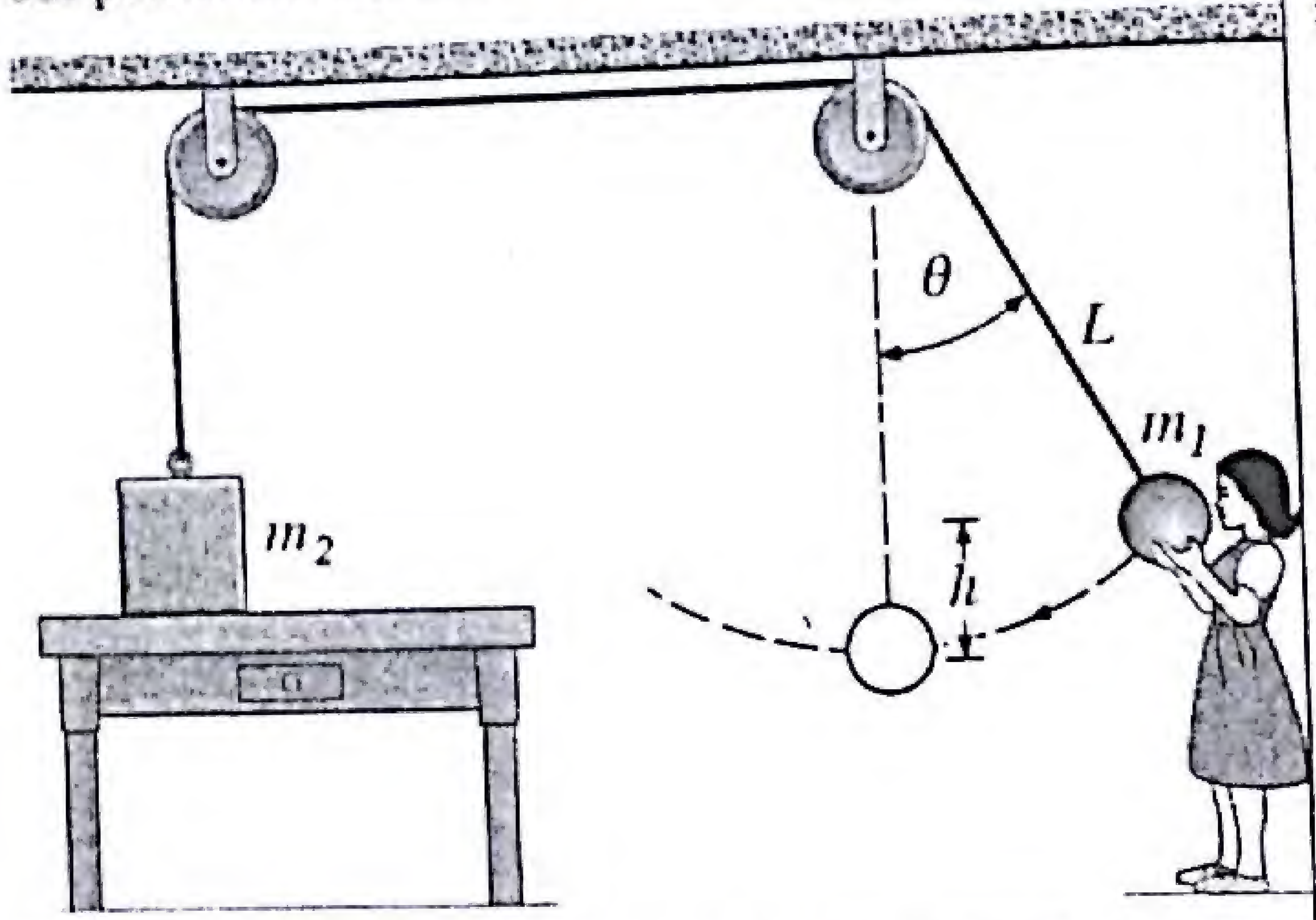
$$v_P = \sqrt{gL(1-\cos\phi)} = \sqrt{(9{,}8\text{m/s}^2)(2\text{m})(1-2/3)} = 2{,}56\text{m/s}$$

Respuesta

a) $x = \frac{\sqrt{5}}{3}$m, $y = \frac{1}{3}$m
b) $v_P = 2{,}56$m/s

PR-4.31. *La tensión del péndulo levanta al bloque*

Una pelota de masa m_1=1,4 kg está conectada a un bloque de masa m_2= 1 kg por una cuerda que pasa por dos poleas sin fricción.



Inicialmente la pelota se sostiene suspendida a una distancia L de la polea y el bloque descansa sobre una mesa horizontal.

¿Desde qué ángulo mínimo θ (respecto a la vertical) habrá que soltar la pelota para provocar que el bloque se levante de la mesa?

Solución: La tensión T de la cuerda será máxima cuando el péndulo está en posición vertical. Aplicando la conservación de la energía entre ese punto y el punto de partida:

$$m_1gh + 0 = 0 + \frac{1}{2}m_1v^2$$

$$m_1gh = m_1gL(1-cos\theta) = \frac{1}{2}m_1v^2$$

Aplicando la segunda ley de Newton a la pelota m_1 en el punto mas bajo:

$$\sum F_r = T - m_1g = m_1\frac{v^2}{L}$$

Si eliminamos v^2 de este par de ecuaciones, obtenemos:

$$T = m_1g(3-2cos\theta)$$

El bloque se despegará de la mesa cuando la tensión T sea igual a su peso m_2g:

$$m_1g(3-2cos\theta) = m_2g$$

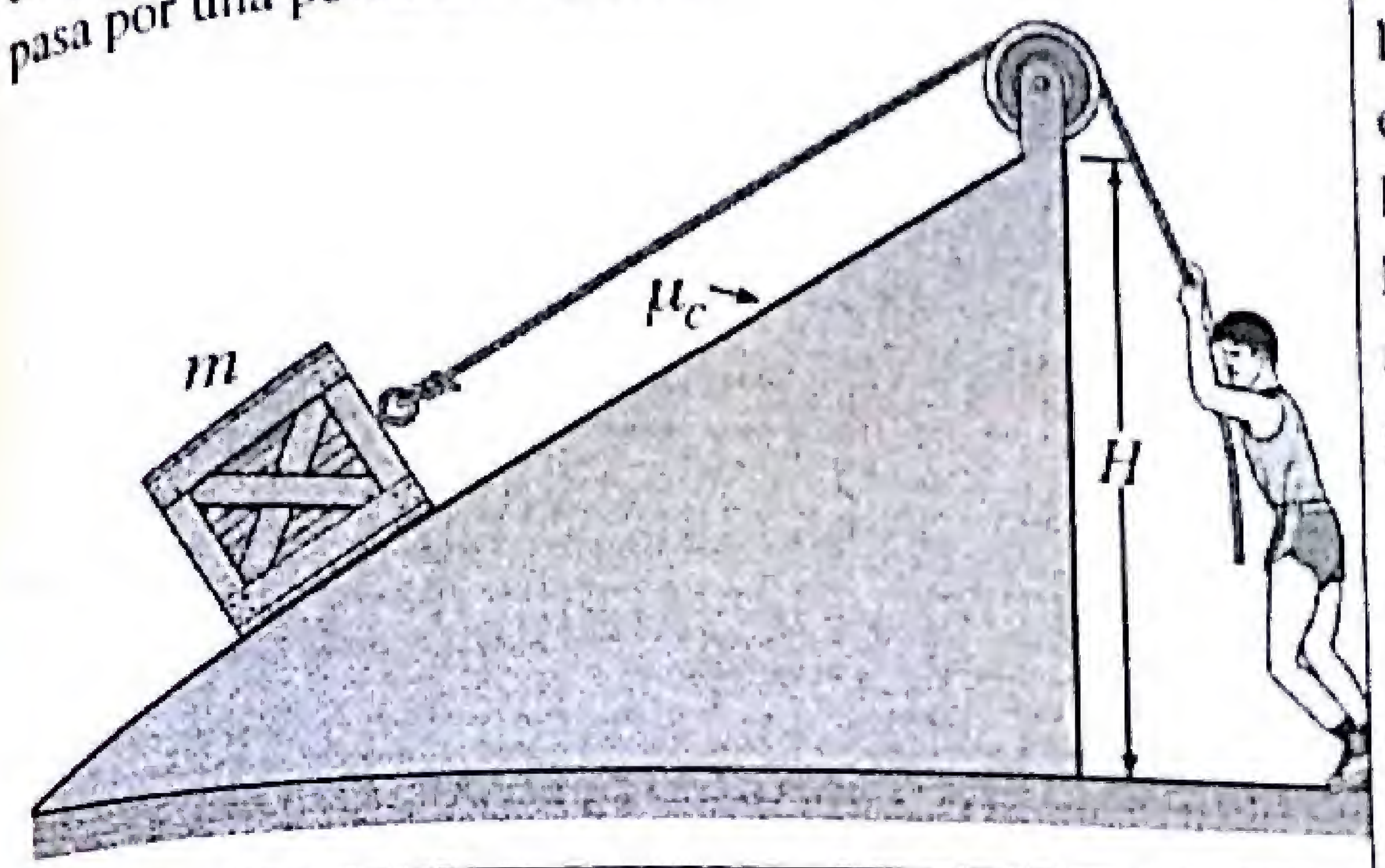
$$cos\theta = \frac{1}{2}(3-\frac{m_2}{m_1}) = \frac{1}{2}(3-\frac{1{,}4\text{kg}}{1\text{kg}}) = 0{,}8 \quad \Rightarrow \quad \theta = 36{,}9°$$

Respuesta

$$\boxed{cos\theta = \frac{1}{2}(3-\frac{m_2}{m_1}) \quad \theta = 36{,}9°}$$

PR-4.32. *La cuerda se rompe y el cajón desciende*

Un cajón de masa m es jalado lentamente hacia arriba de un plano inclinado de altura H, mediante una cuerda que pasa por una polea sin fricción.



El trabajo neto que realiza el hombre para elevar el cajón hasta la altura H es W. Cuando el cajón está en lo alto del plano, se rompe la cuerda y el cajón se desliza hacia abajo. ¿Qué velocidad final alcanzará el cajón cuando llega al pie del plano?

Solución: El trabajo W realizado por el hombre se emplea en vencer la fuerza de fricción y en aumentar la energía potencial gravitacional del cajón. La conservación de la energía durante la subida se escribe:

$$W = mgH + W_c$$

Siendo W_c el trabajo de la fricción. La conservación de la energía durante la bajada del cajón es:

$$mgH = \frac{1}{2}mv^2 + W_c$$

Eliminando W_c de este par de ecuaciones, se obtiene la velocidad de llegada del cajón al pie del plano inclinado:

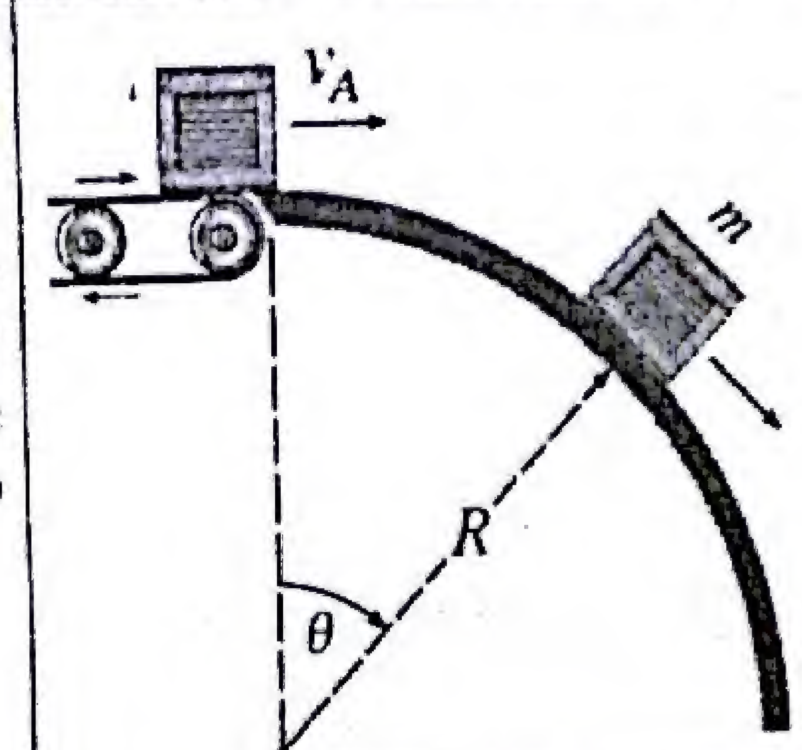
$$mgH = \frac{1}{2}mv^2 + W - mgH \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{4gH - \frac{2W}{m}}$$

Respuesta

$$\boxed{v = \sqrt{4gH - \frac{2W}{m}}}$$

PR-3.33. *¿A qué ángulo se perderá el contacto?*

En una fábrica, son transportados paquetes de masa m = 10 kg, por una banda que los lanza a una velocidad v_0 = 2 m/s sobre una rampa sin rozamiento que tiene forma de arco circular de radio R = 1 m. Determine el ángulo crítico, θ_c, para el cual cada paquete abandona la rampa.



Solución: Aplicando la conservación de la energía mecánica entre las posiciones A y B del cajón:

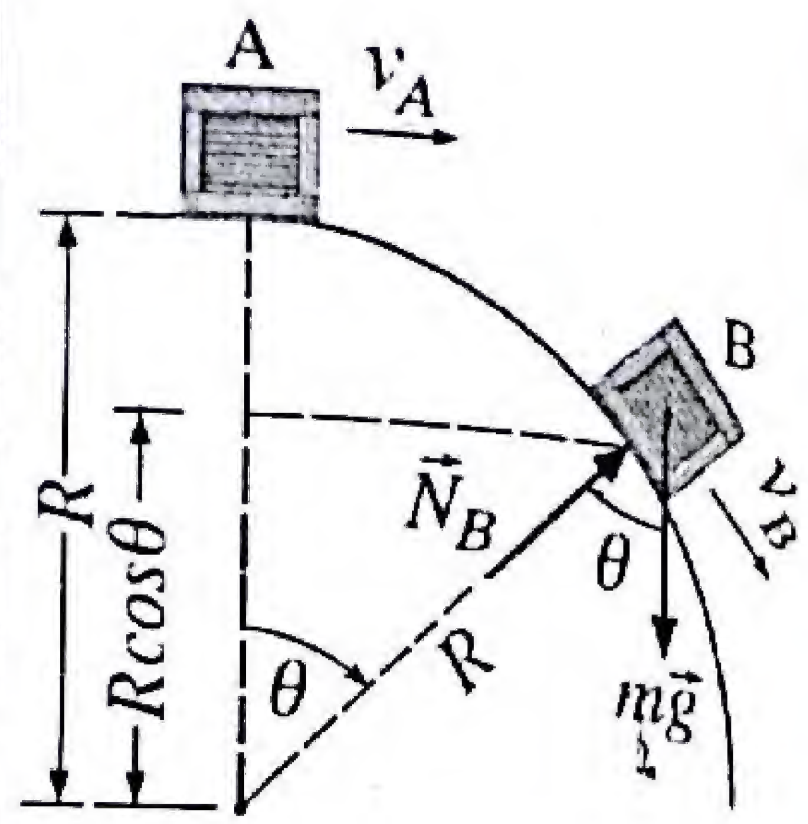
$$K_A + U_A = K_B + U_B$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgR = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgRcos\theta)$$

$$mgR(1-cos\theta) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \qquad (1)$$

Aplicando la segunda ley de Newton en la dirección radial, cuando el paquete está en la posición B:

$$\sum F_r = -N_B + mgcos\theta = m\frac{v_B^2}{R} \qquad (2)$$



Si el paquete pierde contacto con la rampa, la fuerza normal es nula, por lo tanto:

$$mgcos\theta = m\frac{v_B^2}{R}$$

Despejando mv_B^2 de esta ecuación y sustituyéndolo en la ecuación (1) se obtiene:

$$2mgR(1-cos\theta) = mgRcos\theta - mv_A^2$$

$$cos\theta = \frac{v_A^2 + 2gR}{3gR} = \frac{(2\text{m/s})^2 + 2(9{,}8\text{m/s}^2)(1\text{m})}{3(9{,}8\text{m/s}^2)(1\text{m})} = 0{,}803$$

El cajón se despega de la superficie de la rampa a un ángulo:

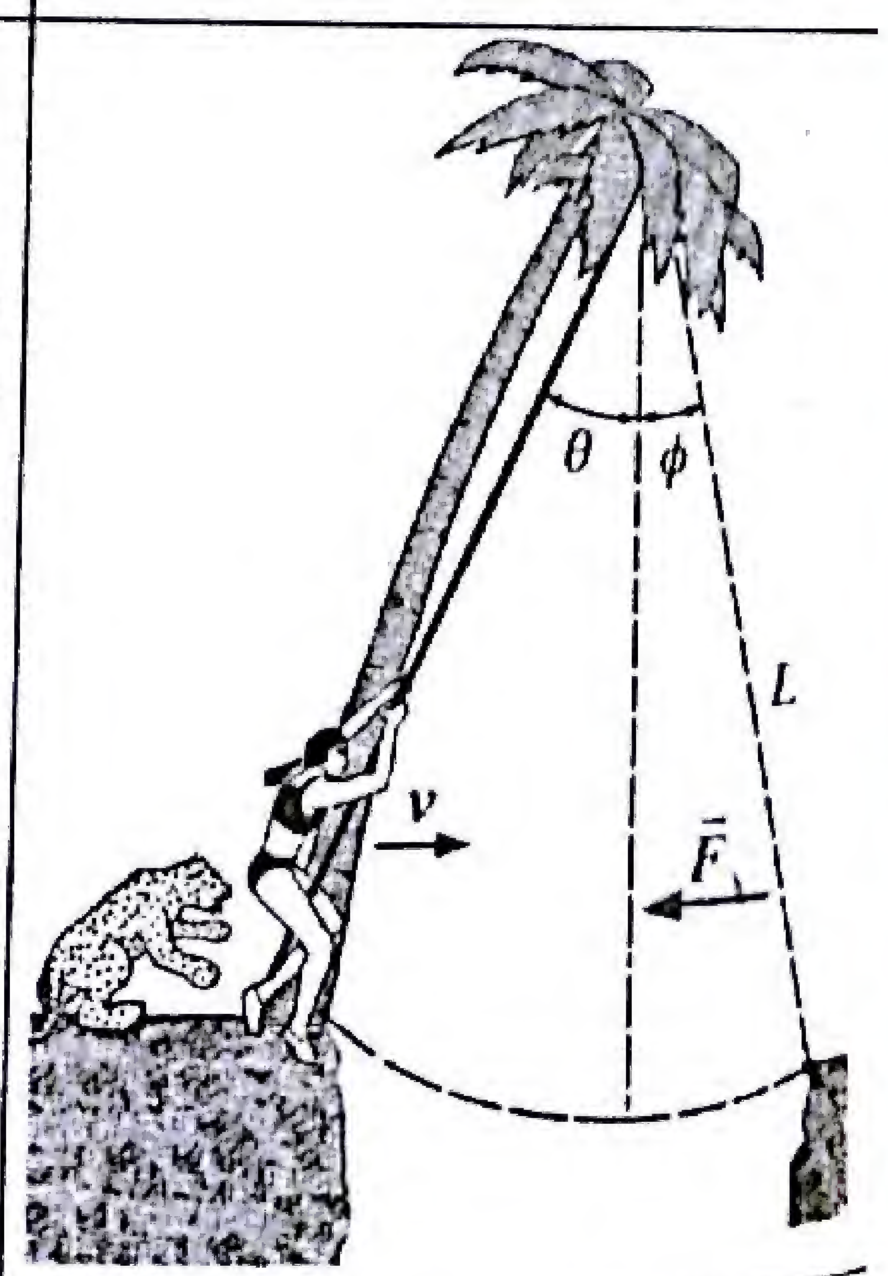
$$\theta = 36{,}6°$$

Respuesta:

$\boxed{\theta = 36{,}6°}$

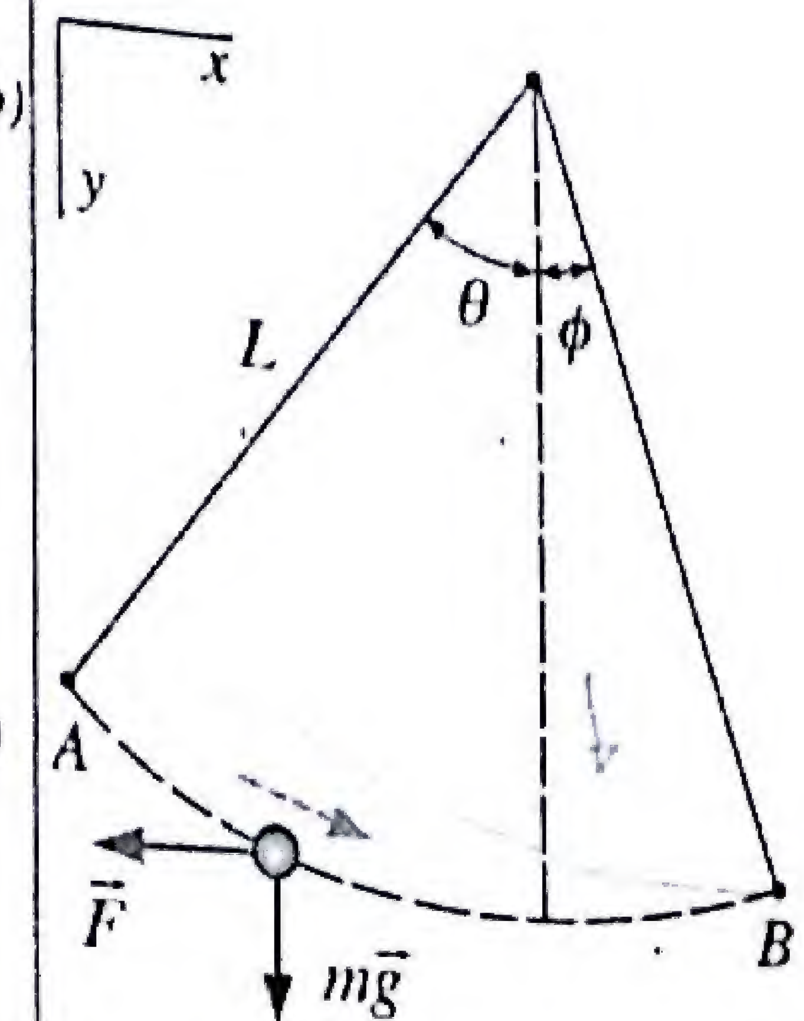
PR-4.34. *Agarrada de un bejuco para pasar al otro lado*

Para escapar de la persecución de un tigre, Jane la mujer de Tarzan, corre a toda prisa y se balancea en un bejuco de longitud L = 50 m y masa despreciable que está suspendido de un árbol, formando inicialmente un ángulo θ = 53° con la vertical. Para poder llegar al otro lado del foso, el bejuco debe alcanzar un ángulo final ϕ = 37° con la vertical Pero en ese trayecto, Jane también debe vencer la oposición de una fuerza horizontal constante, F = 120 N, que está siendo ejercida por el viento. Si la masa de Jane es m = 60 kg, ¿con qué velocidad mínima debe empezar su movimiento?



Solución: La fuerza del viento $\vec{F}$ es horizontal y opuesta al desplazamiento; el trabajo que realiza es:

$$W_F = \int \vec{F} \bullet d\vec{r} = -F\int_A^B dx = = -F\Delta x = -F(Lsen\theta + Lsen\phi)$$



Este corresponde a un cambio de energía potencial:

$$\Delta U_F = -W_F = +F(Lsen\theta + Lsen\phi)$$

Por otra parte, el trabajo de la fuerza de gravedad es:

$$W_g = \int \vec{F}_g \bullet d\vec{r} = mg\int_A^B dy = mg\Delta y = mg(Lcos\phi - Lcos\theta)$$

Este corresponde a un cambio de energía potencial:

$$\Delta U_g = -W_g = -mg(Lcos\phi - Lcos\theta)$$

Como las dos fuerzas que realizan trabajo sobre Jane, la de gravedad y la del viento, son conservativas, la energía mecánica total (cinética mas potencial) debe permanecer constante: $\Delta K + \Delta U_g + \Delta U_F = 0$

$$(0 - \frac{1}{2}mv^2) - mg(Lcos\phi - Lcos\theta) + F(Lsen\theta + Lsen\phi) = 0$$

Despejando, obtenemos la velocidad de partida:

$$v = \sqrt{\frac{2FL}{m}(sen\theta + sen\phi) - 2gL(cos\phi - cos\theta)}$$

$$v = \sqrt{\frac{2(120)50}{60}(\text{sen}53 + \text{sen}37) - 2(9{,}8)50(\cos 37 - \cos 53)}$$

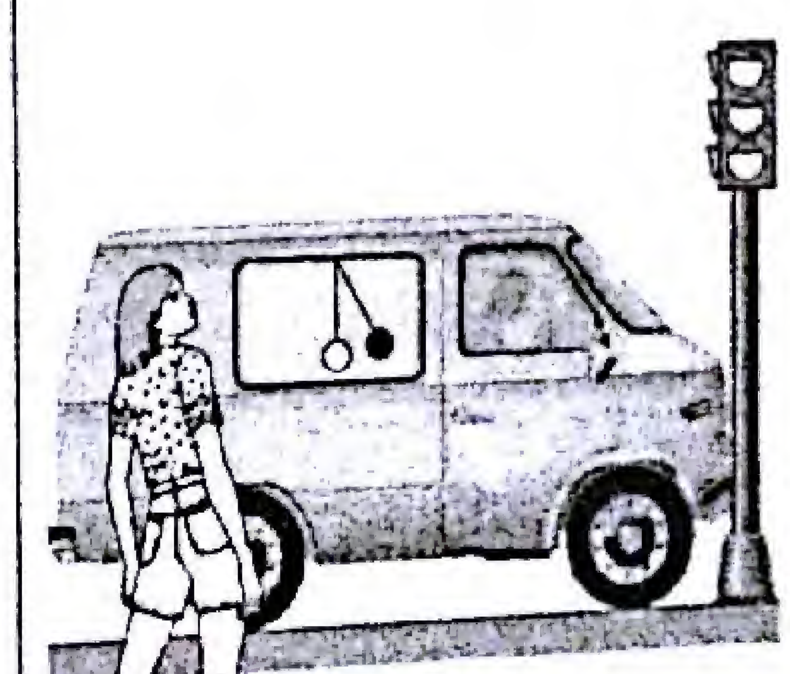
$$v = 9.2 \text{ m/s}$$

Respuesta

$\boxed{v = 9.2 \text{ m/s}}$

PR-4.35. *Una buena observadora*

Una pelota de masa m = 1 kg cuelga del techo de una camioneta, mediante una cuerda de longitud L = 1 m. La camioneta se mueve hacia la derecha a una velocidad constante, v_o y choca contra un poste, quedando detenido instantáneamente. Una estudiante desde la acera observa que la pelota se balancea y estima que el hilo alcanza un ángulo máximo θ = 53,1° con la vertical. Según esta apreciación, ¿cuál era la velocidad de la camioneta?



Solución: Como la cuerda no realiza trabajo sobre la pelota, la energía mecánica total se conserva durante el choque:

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

Tomando como nivel cero de energía potencial en la posición inicial de la pelota, tenemos:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mg(0) = \frac{1}{2}m(0)^2 + mgh$$

$$v_0^2 = 2gh$$

La altura final de ascenso está relacionada con la longitud del péndulo y el ángulo máximo θ:

$$h = L(1 - \cos\theta)$$

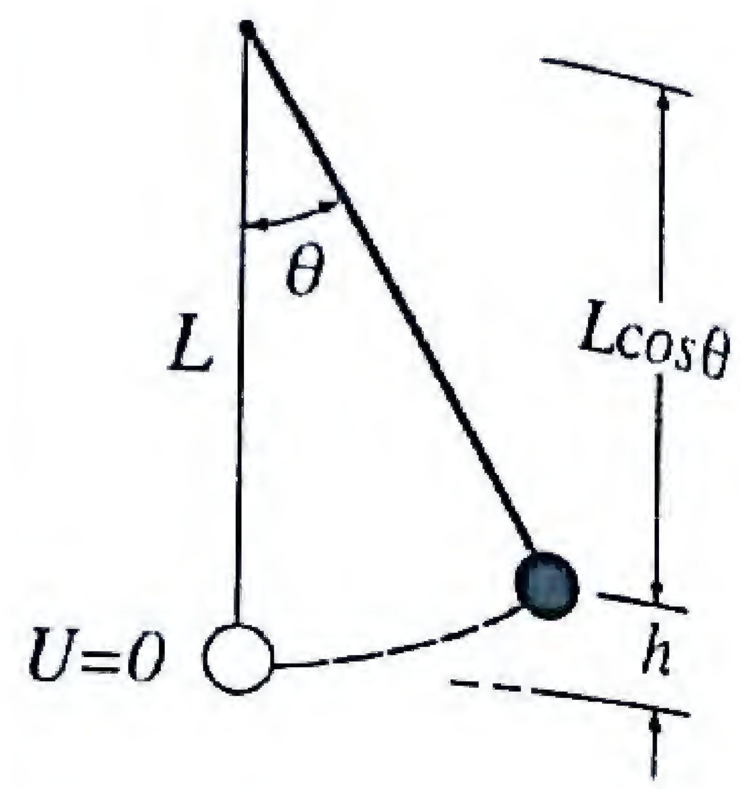
Por lo tanto tenemos:

$$v_0^2 = 2gL(1 - \cos\theta)$$

Por lo tanto, la velocidad inicial del camión era:

$$v_0 = \sqrt{2gL(1 - \cos\theta)}$$

$$v_0 = \sqrt{2(9{,}8\text{m/s}^2)(1\text{m})(1 - \cos 53{,}1°)} = 2{,}8\text{m/s} = 10{,}1\text{km/h}$$



Respuesta:

$\boxed{v_0 = \sqrt{2gL(1 - \cos\theta)} = 2{,}8\text{m/s}}$

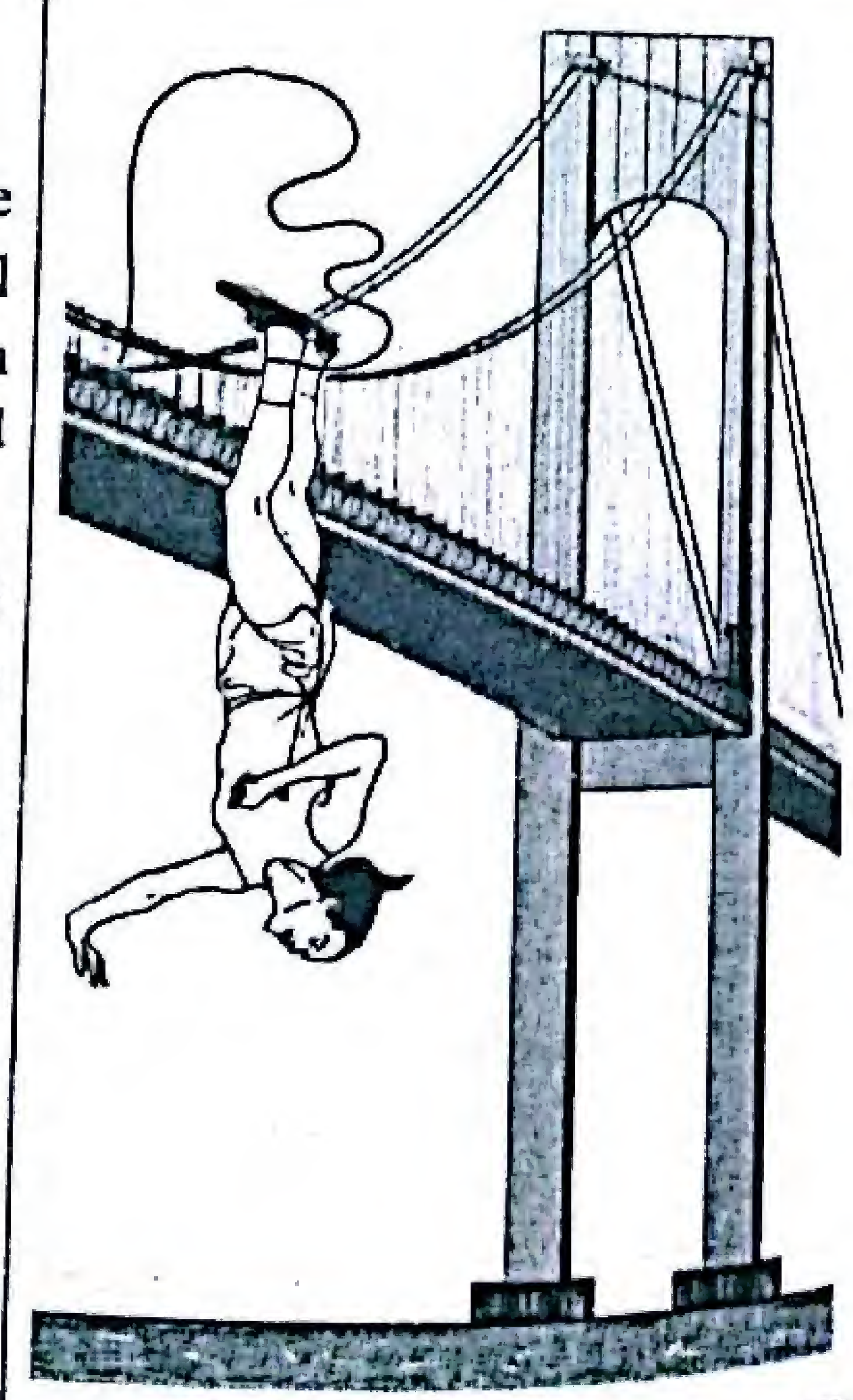
PR-4.36. *Salto desde un puente en bungee*

Una estudiante de masa m = 61,2 kg salta en bungee desde un puente a una altura H = 62 m sobre el nivel del agua. La cuerda es de masa despreciable y posee una longitud natural L_0 = 40 m y una constante de elasticidad k = 180 N/m.

a) Al final del descenso, se detiene y luego rebota, ¿a qué altura sobre el nivel del agua queda su pie en ese instante?

b) ¿Cuál es la fuerza neta sobre ella en el momento de alcanzar esa posición inferior?

c) La estudiante queda en reposo después que cesan las oscilaciones, ¿a qué altura desde el nivel del agua quedará suspendida finalmente?



Solución: a) Aplicando la conservación de la energía mecánica, $\Delta K + \Delta U_g + \Delta U_e = 0$ y tomando en cuenta que $\Delta K = 0$:

$$[0 - mg(d + L_0)] + (\frac{1}{2}kd^2 - 0) = 0$$

Siendo d el estiramiento máximo de la cuerda. Sustituyendo los valores numéricos, la ecuación cuadrática queda:

$$\frac{1}{2}kd^2 - mgd - mgL_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad 90d^2 - 600d - 24000 = 0$$

La raíz positiva es la que tiene significado físico, d = 20 m. Por lo tanto, su pie quedará a una distancia por encima del nivel del agua:

$$h = H - L_0 - d = 62\text{m} - 40\text{m} - 20\text{m} = 2\text{m}$$

b) En esa posición la fuerza neta es la resultante de la fuerza elástica de la cuerda $\vec{F}_e$ y el peso $m\vec{g}$:

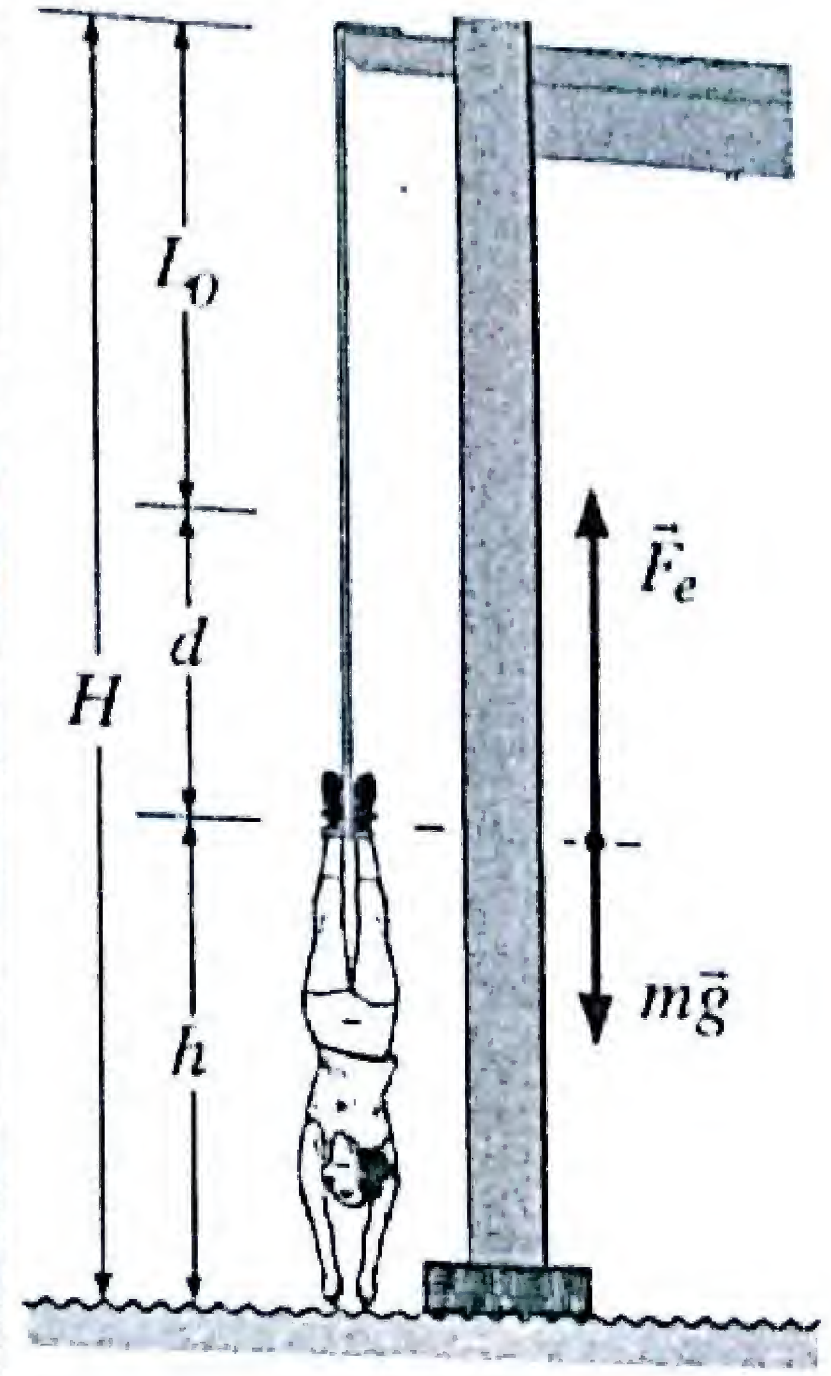
$$F = kd - mg = (180\frac{\text{N}}{\text{m}})(20\text{m}) - (61{,}2\text{kg})(9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}) = 3000\text{N}$$

c) En la posición final de equilibrio, la fuerza neta es cero y el estiramiento Δy de la cuerda viene dado por:

$$k\Delta y = mg \quad \Rightarrow \quad \Delta y = \frac{mg}{k} = \frac{(61{,}2\text{kg})(9{,}8\text{m/s}^2)}{180\text{N/m}} = 3{,}33\text{m}$$

Por lo tanto, la estudiante quedará finalmente suspendida a una altura por encima del nivel del agua:

$$l = H - L_0 - \Delta y = 62\text{m} - 40\text{m} - 3{,}33\text{m} = 18{,}7\text{m}$$

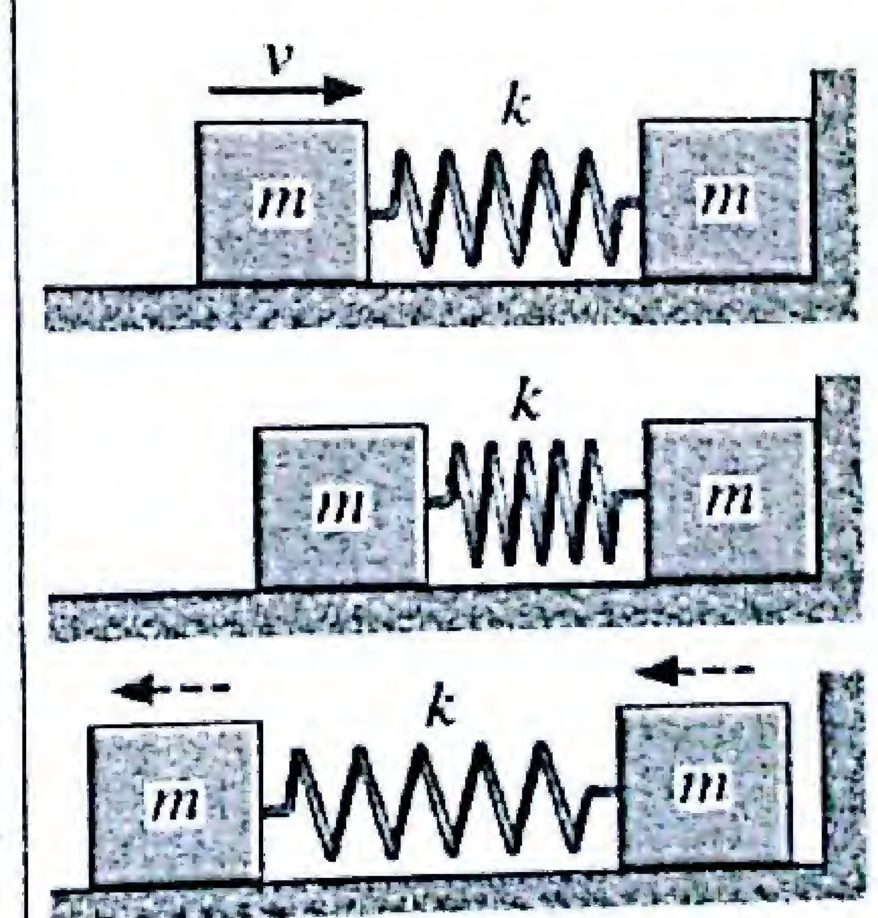


Respuesta:

a) $h = 2$m
b) F = 3000N
c) $l = 18{,}7$m

PR-4.37. *Hay que despegar el bloque de la pared*

Dos bloques de igual masa, m, están sobre el piso horizontal, unidos por medio de un resorte de constante elástica k. El bloque de la derecha se encuentra apoyado sobre una pared. Entre los bloques y la mesa existe fricción, y supongamos que los coeficientes estático y cinético tienen igual valor $\mu_e = \mu_c = \mu$. ¿Cuál debe ser la mínima velocidad inicial v que debe comunicársele al bloque de la izquierda para lograr que el bloque de la derecha se despegue de la pared?



Solución: Cuando el bloque de la izquierda queda detenido, en ese instante el resorte se ha comprimido en una longitud x_1. La fuerza de fricción ($F_c = \mu_c N = \mu_c mg$) realiza un trabajo negativo sobre el sistema disminuyendo su energía:

$$\Delta K + \Delta U_e = W_c$$

$$(0 - \frac{1}{2}mv^2) + (\frac{1}{2}kx_1^2 - 0) = -F_c x_1$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}kx_1^2 + \mu mgx_1 \qquad (1)$$

El bloque se devuelve hacia la izquierda de nuevo, el resorte recupera su longitud natural, y luego se va estirando hasta alcanzar una longitud x_2, donde el bloque se detiene momentáneamente. Aplicando de nuevo la conservación de la energía:

$$(0-0) + (\frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2) = -\mu mg(x_1 + x_2)$$

$$\frac{1}{2}kx_1^2 = \mu mg(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}kx_2^2 \qquad (2)$$

De esta última ecuación se deduce que:

$$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \frac{2\mu mg}{k}(x_1 + x_2)$$

$$x_1 - x_2 = 2\frac{\mu mg}{k} \qquad (3)$$

Para que el bloque de la derecha se despegue de la pared, la fuerza elástica que ejerce el resorte debe vencer la fuerza de roce estático, es decir: $kx_2 = \mu mg$. Sustituyendo en la relación (3), se obtiene:

$$x_1 = 3\mu mg / k$$

Sustituyendo a su vez x_1 en la relación (1), encontramos:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}k(\frac{3\mu mg}{k})^2 + \mu mg(\frac{3\mu mg}{k}) = \frac{15}{2}\frac{\mu^2 m^2 g^2}{k}$$

La velocidad inicial de lanzamiento debe ser:

$$v = \sqrt{\frac{15\mu^2 mg^2}{k}}$$

Respuesta

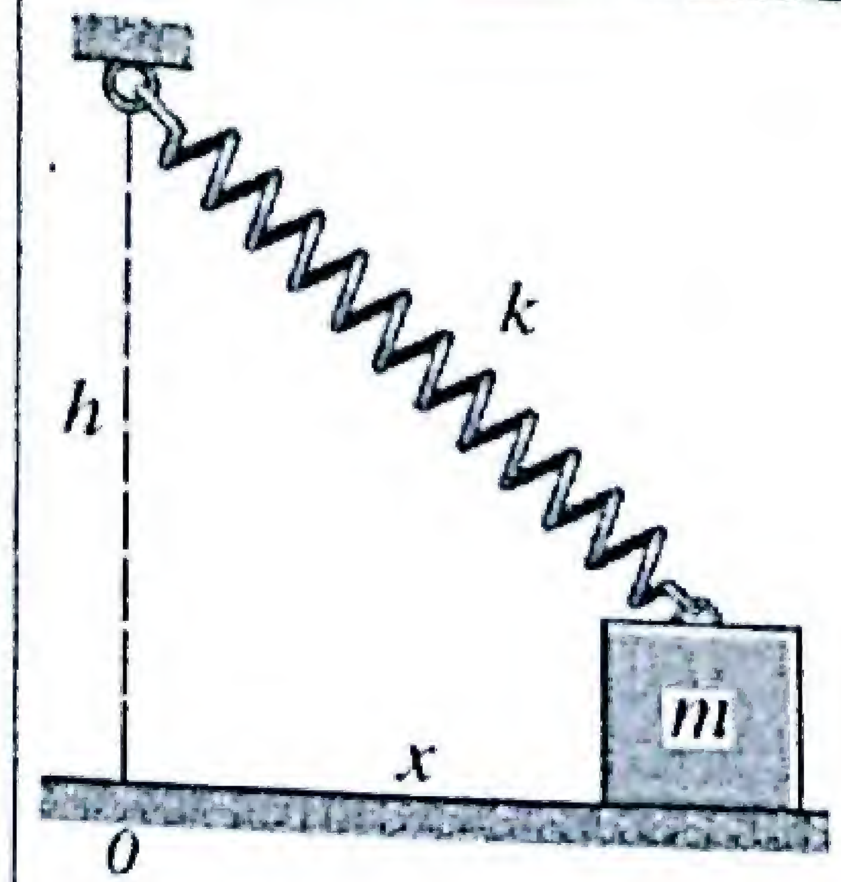
$$\boxed{v = \sqrt{\frac{15\mu^2 mg^2}{k}}}$$

PR-4.38. *Fuerza sobre un bloque ligado a un resorte*

Un bloque de masa m está restringido a moverse sobre un plano horizontal sin fricción a lo largo del eje x. El bloque está atado a un resorte de constante elástica k y longitud sin deformación, L. El otro extremo del resorte está fijo en un punto de coordenadas $x = 0$, $y = h$, siendo $h < L$.

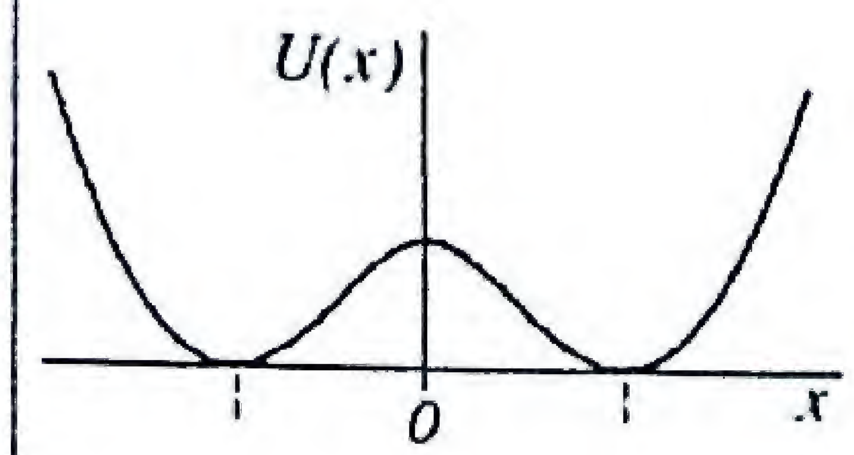
a) Determine la energía potencial y la fuerza neta que actúa sobre el bloque

b) ¿Cuáles son los posiciones de equilibrio?



Solución: a) Tomemos el cero de energía potencial gravitacional el nivel de la mesa ($U_g = 0$). Cuando el bloque está a distancia x, la longitud del resorte es $\sqrt{h^2 + x^2}$, de modo que la energía potencial total es puramente elástica:

$$U(x) = \frac{1}{2}k\Delta L^2 = \frac{1}{2}k(\sqrt{h^2 + x^2} - L)^2$$

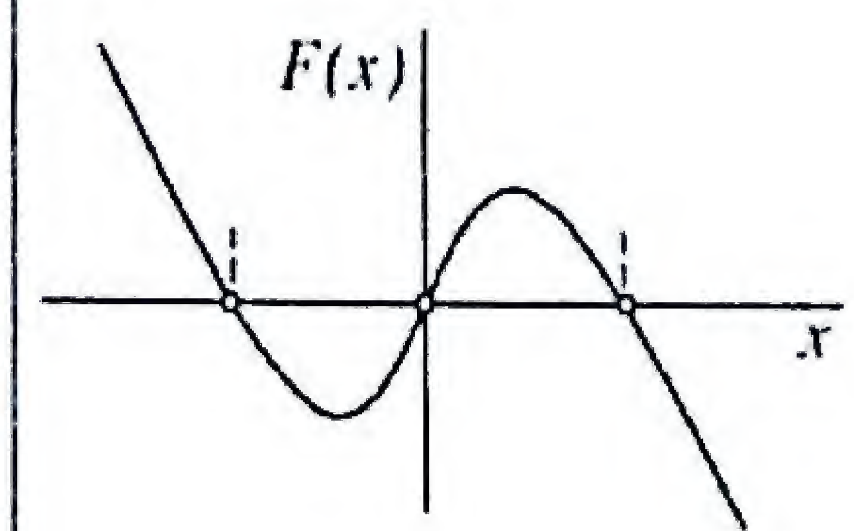


La fuerza sobre el bloque es la derivada de la energía potencial:

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx}[\frac{1}{2}k(\sqrt{h^2 + x^2} - L)^2]$$

$$F(x) = -\frac{1}{2}k(2)(\sqrt{h^2 + x^2} - L)\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{h^2 + x^2}}$$

$$F(x) = -\frac{k(\sqrt{h^2 + x^2} - L)x}{\sqrt{h^2 + x^2}}$$



b) Hay tres posiciones de equilibrio del bloque, donde $F = 0$:

En el punto $x = 0$ donde $U(x)$ tiene un máximo, el resorte está bajo compresión, el equilibrio es *inestable* ya que si el bloque es desplazado ligeramente hacia un lado, la fuerza tiende a alejarlo aún más en esa dirección.

En los puntos $x = \pm\sqrt{L^2 - h^2}$ donde $U(x)$ es mínima, el equilibrio es *estable* ya que si el bloque es desplazado ligeramente hacia un lado, la fuerza se dirige hacia el lado contrario y tiende a regresarlo a su posición de equilibrio.

Respuesta

a) $U(x) = \frac{1}{2}k(\sqrt{h^2 + x^2} - L)^2$

b) $F(x) = -\frac{k(\sqrt{h^2 + x^2} - L)x}{\sqrt{h^2 + x^2}}$

$x = 0, \pm\sqrt{L^2 - h^2}$

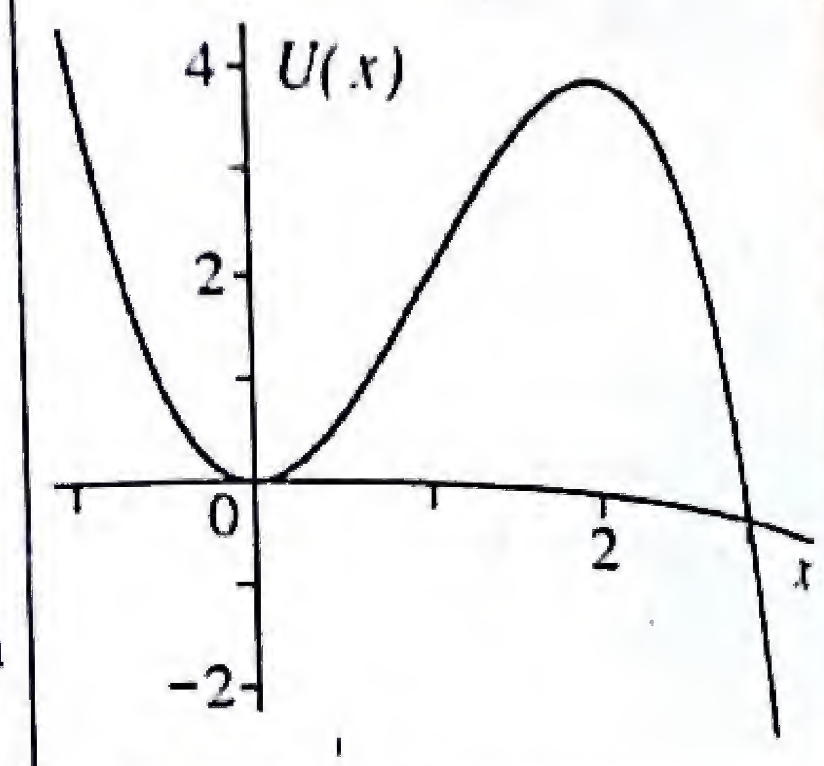
PR-4.39. *Partícula oscilante en un pozo de potencial*

Una partícula se mueve a lo largo del eje x en una región donde la energía potencial está dada por:

$$U(x) = x^2(3-x)$$

Donde $U(x)$ está en Joules y la distancia x en metros.

a) Determine los puntos de equilibrio.
b) ¿En que región la fuerza apunta hacia la izquierda?
c) ¿Cuál sería la mayor energía mecánica de la partícula para que pueda tener un movimiento oscilatorio?



Solución: (a) Para los puntos de equilibrio, la fuerza sobre la partícula es nula, por lo tanto:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -3x(2-x) = 0$$

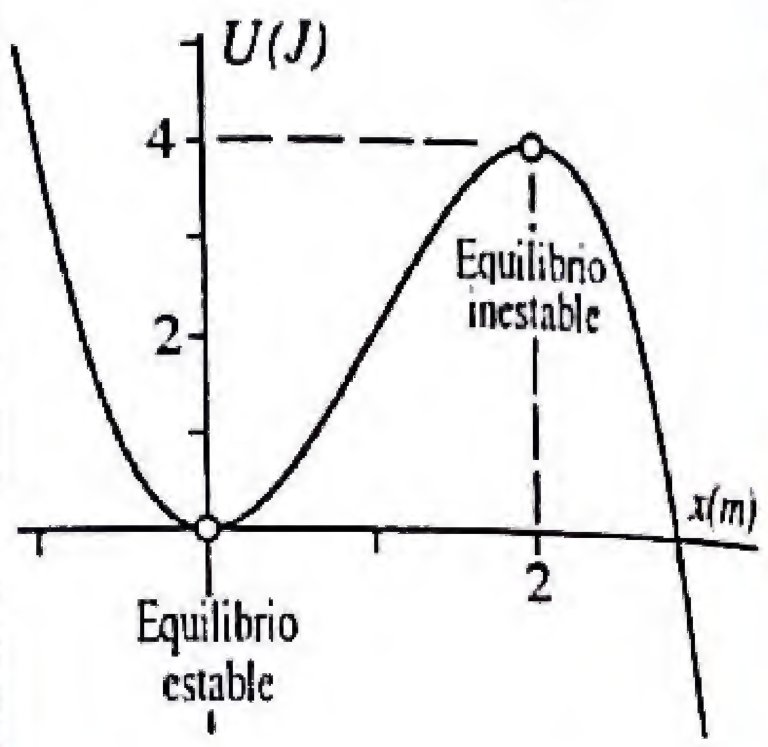
Los puntos de equilibrio son: $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$.

b) La fuerza es negativa en la región entre los puntos $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$. La segunda derivada de $U(x)$ *es:*

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 6(1-x)$$

Esta segunda derivada es positiva en el punto $x_1 = 0$ y corresponde a un equilibrio *estable*. Es negativa para el punto $x_2 = 2$ y corresponde a un equilibrio *inestable*.

c) Si la energía total E de la partícula es inferior a 4 J, estará confinada oscilando en el pozo de potencial. Si la energía de la partícula excede el valor de 4J, entonces escapará del pozo.



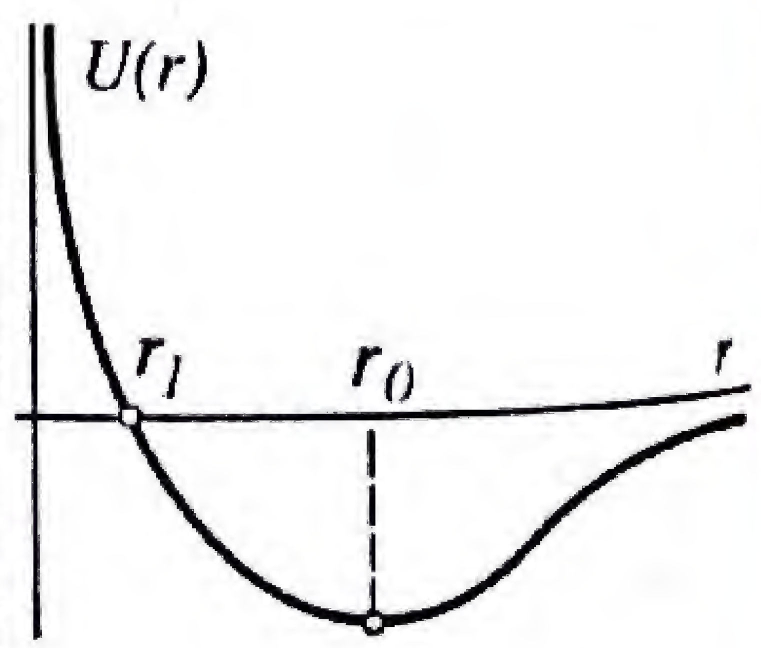
Respuesta

a) En $x = 0$ equilibrio estable.
En $x =$ 2 m inestable.
b) $0 < x <$ 2m.
c) Si $E <$ 4 J. La partícula oscila.

PR-4.40. *Energía de una molécula diatómica*

La energía potencial de dos átomos en una molécula diatómica puede ser aproximada por la función de Lennard-Jones, la cual se muestra en el gráfico de $U(r)$ en función de la distancia r entre átomos, siendo A y B constantes.

a) ¿Para qué valor de r presenta $U(r)$ un mínimo?
b) ¿Para qué valores de r se hace nula $U(r)$?
c) Describa el movimiento cuando $E < 0$ y cuando $E > 0$.
d) ¿Cuál es la fuerza que un átomo ejerce sobre el otro?
e) ¿Cuál es la energía de amarre de los dos átomos ?



$$U(r) = -\frac{A}{r^6} + \frac{B}{r^{12}}$$

Solución: a) Para hallar los puntos de equilibrio se deriva $U(r)$ con respecto a r y el resultado se iguala a cero:

$$\frac{dU(r)}{dr} = \frac{6A}{r^7} - \frac{12B}{r^{13}} = 0 \quad \Rightarrow \quad r_0 = (\frac{2B}{A})^{1/6}$$

La segunda derivada en este punto $r = r_0$, resulta positiva:

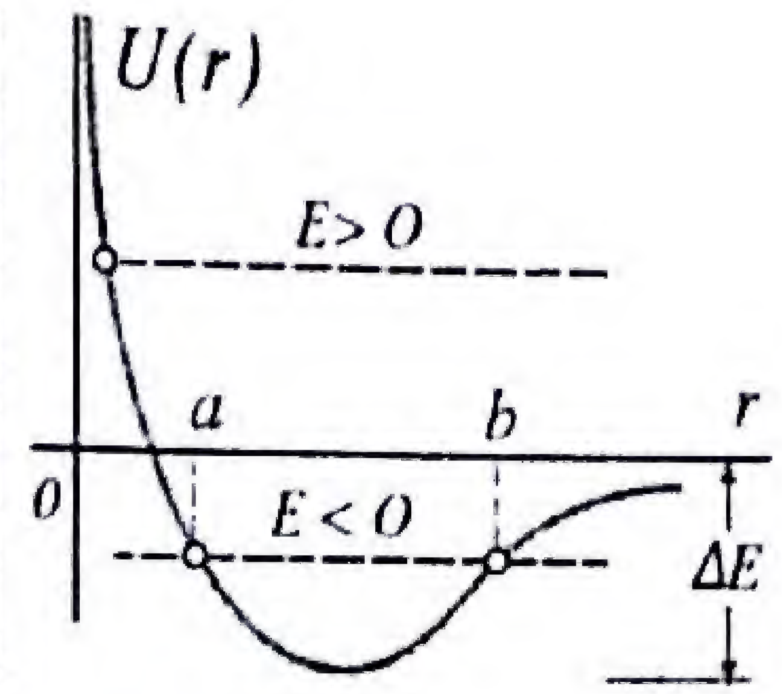
$$\frac{d^2U}{dr^2} = -\frac{42A}{r^8} + \frac{156B}{r^{14}} = -\frac{42A}{(2B/A)^{8/6}} + \frac{156B}{(2B/A)^{14/6}} > 0$$

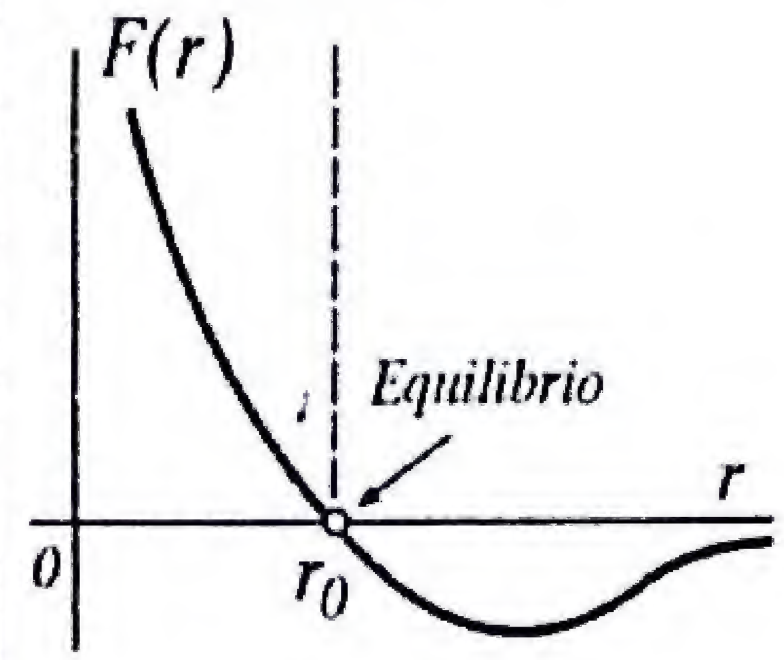
Esto significa que en r_0 hay un mínimo (equilibrio estable).

b) $U(r) \to 0$ para $r \to \infty$ y también cuando se cumple:

$$\frac{A}{r^6} = \frac{B}{r^{12}} \quad \Rightarrow \quad r_1 = (\frac{B}{A})^{1/6}$$

c) Cuando la energía total es negativa ($E < 0$) los dos átomos está ligados y su separación puede oscilar entre dos puntos a y b alrededor de r_o. Cuando la energía total es positiva ($E > 0$) hay un solo punto de retorno. Los átomos no están ligados y continuamente estarán alejándose.





d) La fuerza es: $$F_r(r) = -\frac{dU(r)}{dr} = -\frac{6A}{r^7} + \frac{12B}{r^{13}}$$

La fuerza se anula para $r = r_o$ y para $r = \infty$. La fuerza es atractiva para $r > r_o$ y es repulsiva para $r < r_o$.

e) La mínima energía corresponde a la separación $r = r_o$:

$$U(r_0) = -\frac{A}{r_0^6} + \frac{B}{r_0^{12}} = -\frac{A}{2B/A} + \frac{B}{(2B/A)^2} = -\frac{A^2}{4B}$$

Para separar los átomos a distancia $r = \infty$, donde $U(r) = 0$, se requiere suministrarles la cantidad: $\Delta E = +A^2/4B$ unidades de energía.

Respuesta:

a) Mínima para $r_0 = (\frac{2B}{A})^{1/6}$
b) U es nula para $r_1 = (\frac{B}{A})^{1/6}$
d) $F_r(r) = -\frac{6A}{r^7} + \frac{12B}{r^{13}}$
e) $\Delta E = \frac{A^2}{4B}$

VERIFICA TU COMPRENSIÓN

PE-4.01. ***Una fuerza es conservativa si...***

a) Se conserva la energía cinética del cuerpo sobre el cual actúa.

b) El trabajo que realiza es siempre positivo.

c) Conserva su magnitud y sentido.

d) No viola la segunda ley de Newton.

e) El trabajo que realiza sobre un cuerpo es independiente de la trayectoria.

PE-4.02. ***Una de estas afirmaciones no es correcta***

a) Si la energía potencial es cero, la fuerza es necesariamente cero.

b) Es posible que la energía mecánica total sea negativa pero no la energía cinética.

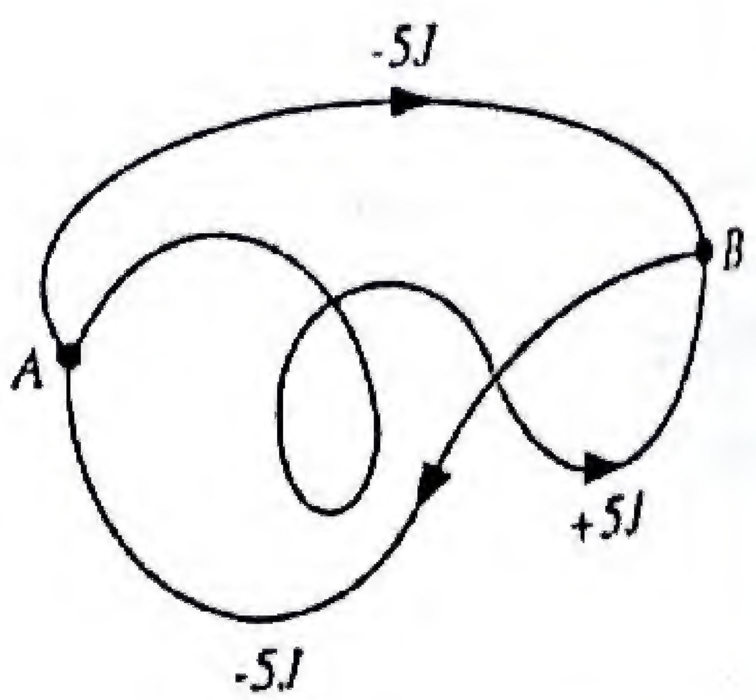
c) El valor absoluto de la energía potencial gravitacional es arbitrario.

d) La energía potencial puede asociarse sólo con una fuerza conservativa.

e) La fuerza que actúa sobre una partícula es cero en un punto donde su energía potencial pasa por un valor máximo.

PR-4.03. ***Aquí hay una fuerza no-conservativa***

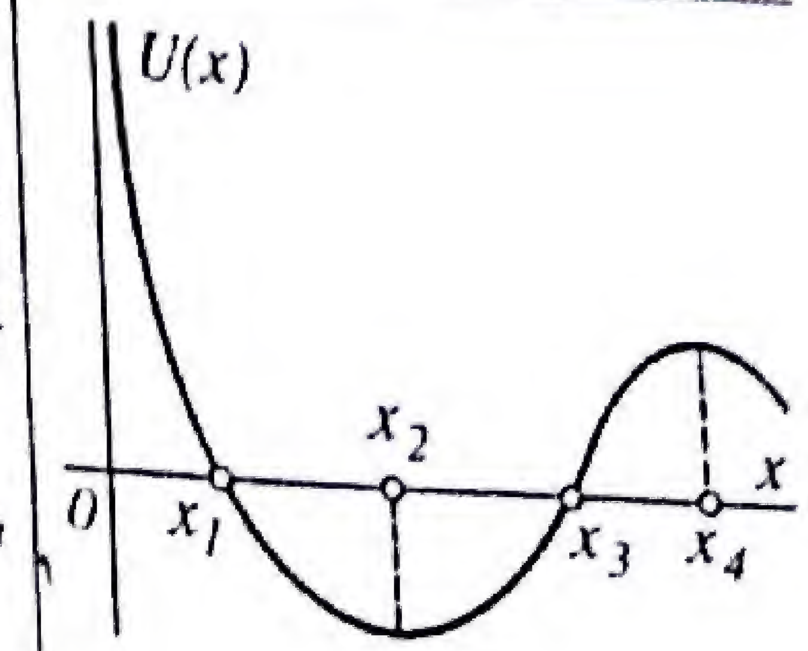
En la figura se indica el valor del trabajo neto realizado sobre un objeto que se traslada entre los puntos A y B a lo largo de tres caminos y sentidos distintos. Se sabe que en dos de los caminos mostrados actúa únicamente una fuerza conservativa pero en el tercer camino actúa, además una fuerza no-conservativa. ¿Cuál es el trabajo de la fuerza no conservativa en este camino entre A hasta B?



a) -5J b) +5J c) -10J d) -15J e) +10J

PE-4.04. ***Puntos de equilibrio***

Una partícula se mueve a lo largo del eje x, y su energía potencial en función de x está graficada en la figura. Considerando los cuatro puntos mostrados podemos decir que la fuerza es nula:

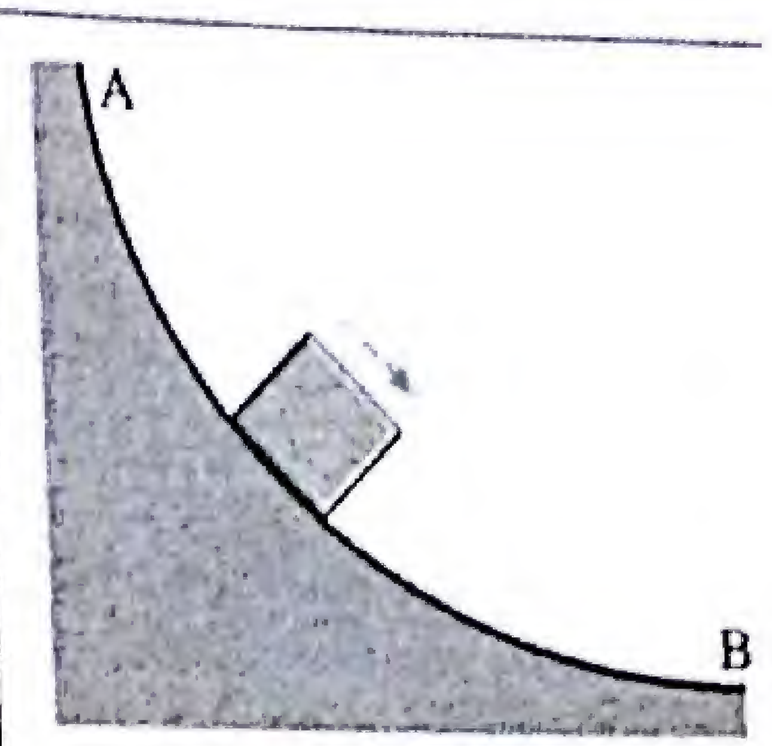


a) Sólo en x_1 b) Sólo en x_2 c) Sólo en x_3

d) En x_1 y en x_3 e) En x_2 y en x_4

PE-4.05. ***Descenso por rampa a rapidez constante***

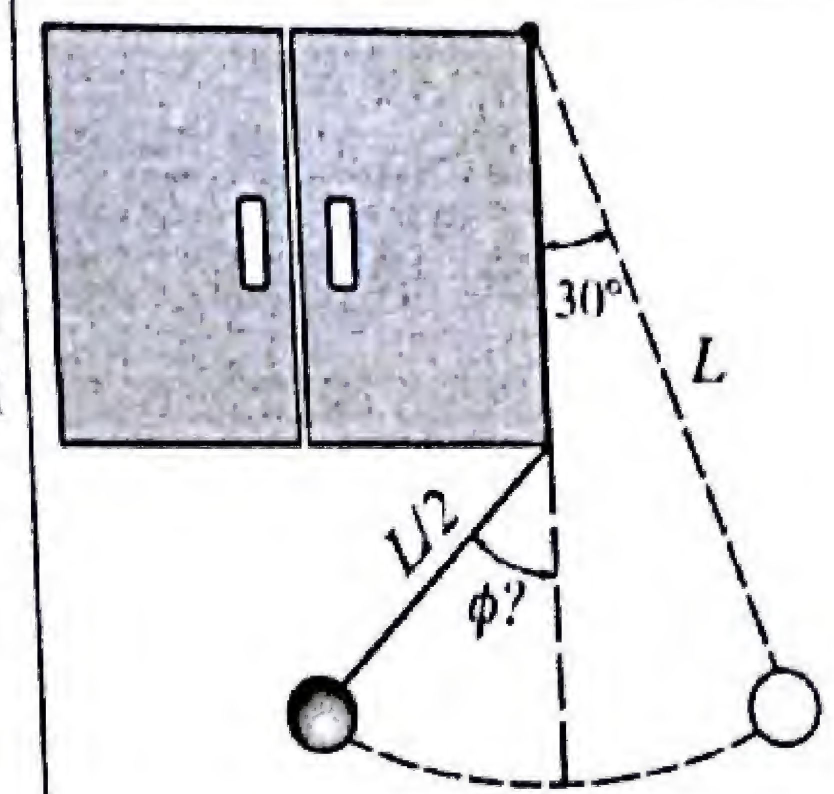
Una objeto baja por una rampa circular a *rapidez constante*. Esto significa que:



a) No debe haber fricción entre el cuerpo y la superficie.
b) El coeficiente de fricción cinética es variable.
c) El coeficiente de fricción cinética es constante.
d) La aceleración es cero.
e) El movimiento es teóricamente imposible.

PE-4.06. ***Péndulo con un obstáculo***

Un péndulo de longitud L es liberado desde una posición angular de 30°. Cuando el hilo alcanza la posición vertical tropieza con un obstáculo de altura $L/2$. Al final del recorrido, el ángulo que forma el hilo con la vertical será:



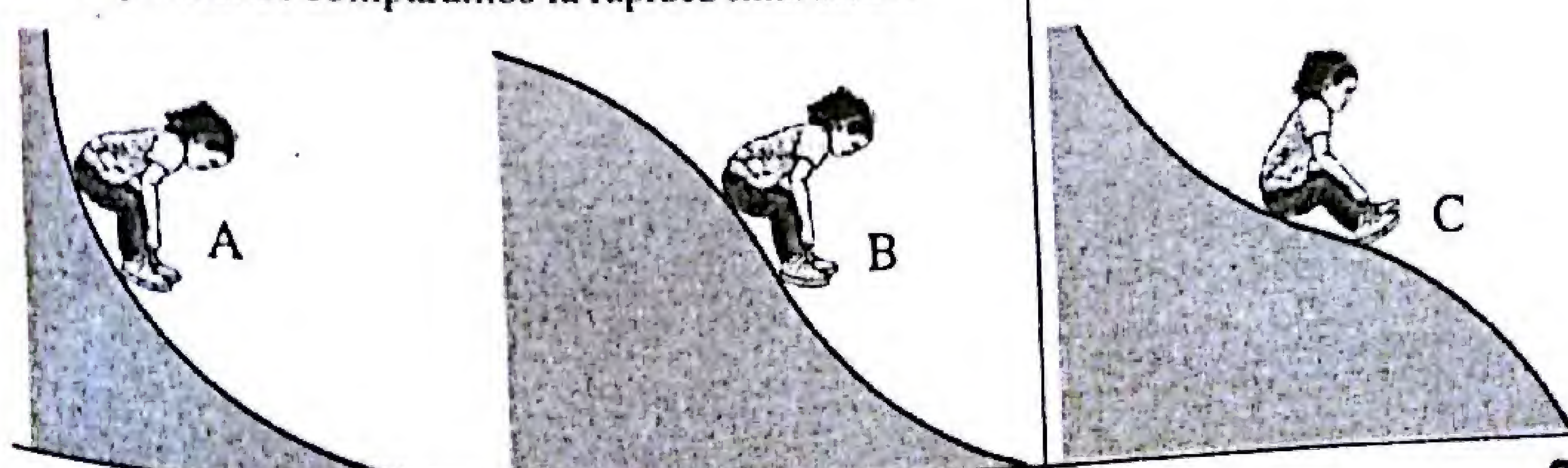
a) $\phi = 15°$ b) $\phi = 30°$ c) $\phi = 45°$

d) $\phi = 42,9°$ e) $\phi = 60°$

PE-4.07. ***Velocidad final en rampas sin fricción***

En un tobogán sin fricción, la niña parte del reposo por tres rampas diferentes A, B y C entre las mismas alturas inicial y final. Si comparamos la rapidez final será...

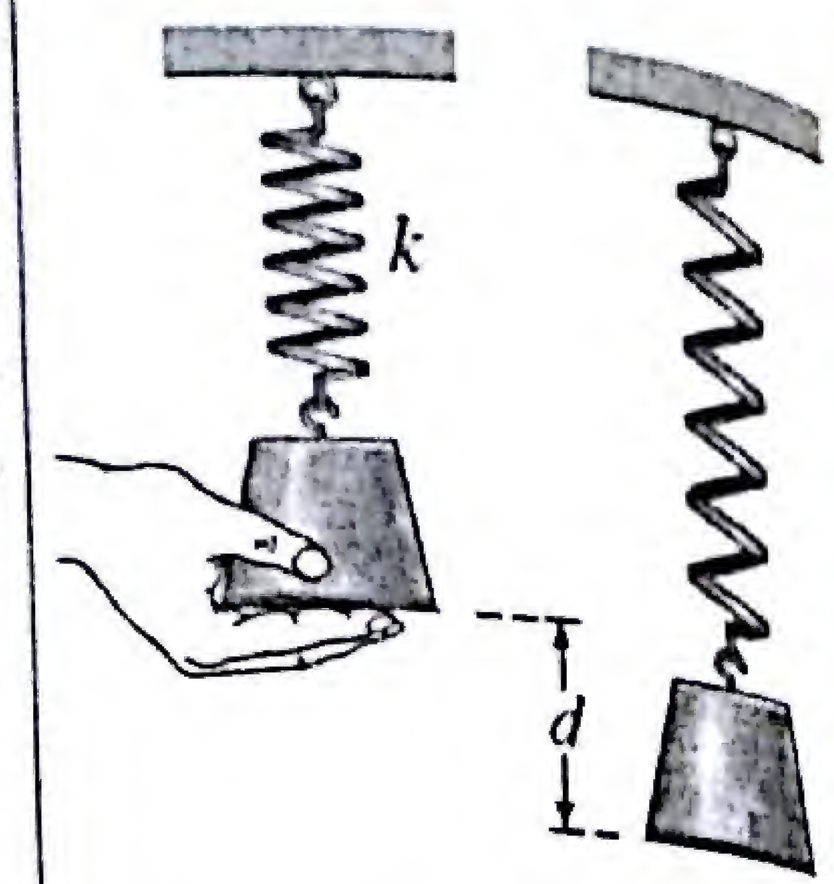
a) mayor en A. b) Mayor en B. c) Mayor en C. d) Igual



PE-4.08. *Descenso gradual vs. descenso brusco*

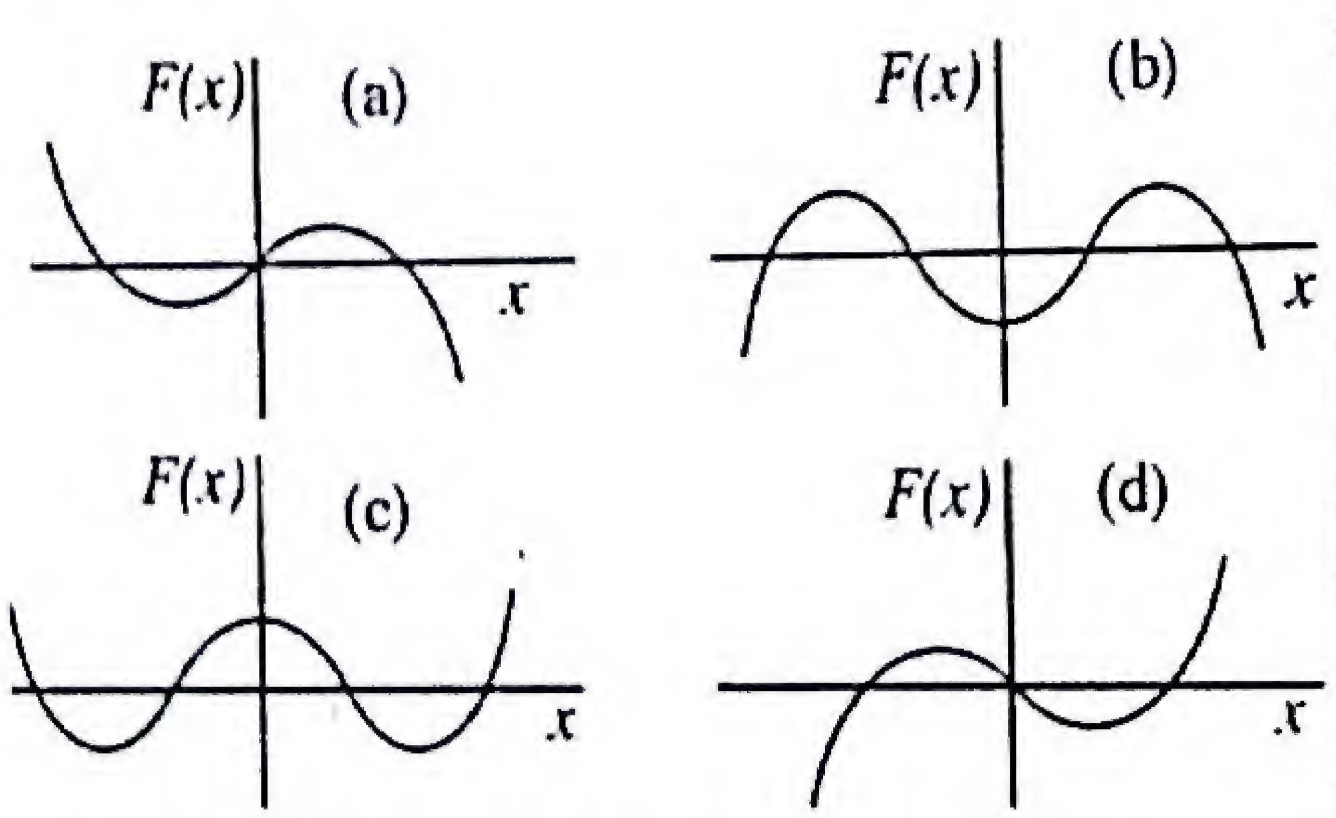
Una pesa está fija a un resorte vertical y se baja lentamente a su posición de equilibrio. El resorte queda estirado una longitud d. Si la misma pesa se fija al mismo resorte vertical, pero esta vez se deja caer súbitamente, ¿qué tanto se estirará al resorte?

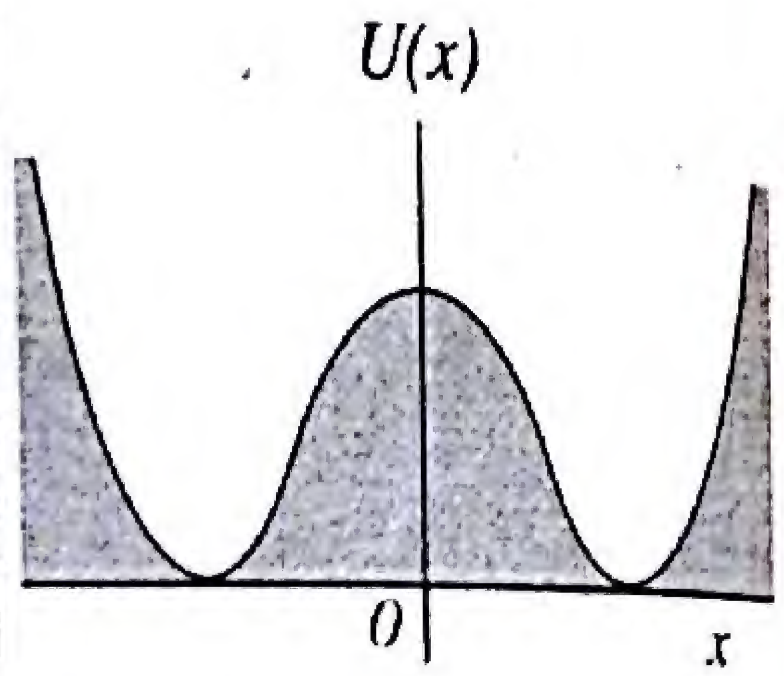
a) $d/2$ b) d c) $2d$ d) $3d$, e) $4d$



PE-4.09. *¿Cuál gráfico corresponde de la fuerza?*

En el gráfico de la derecha se representa la energía potencial de una partícula en función de la posición x. ¿Cuál de los siguientes gráficos corresponde a la fuerza en función de x?



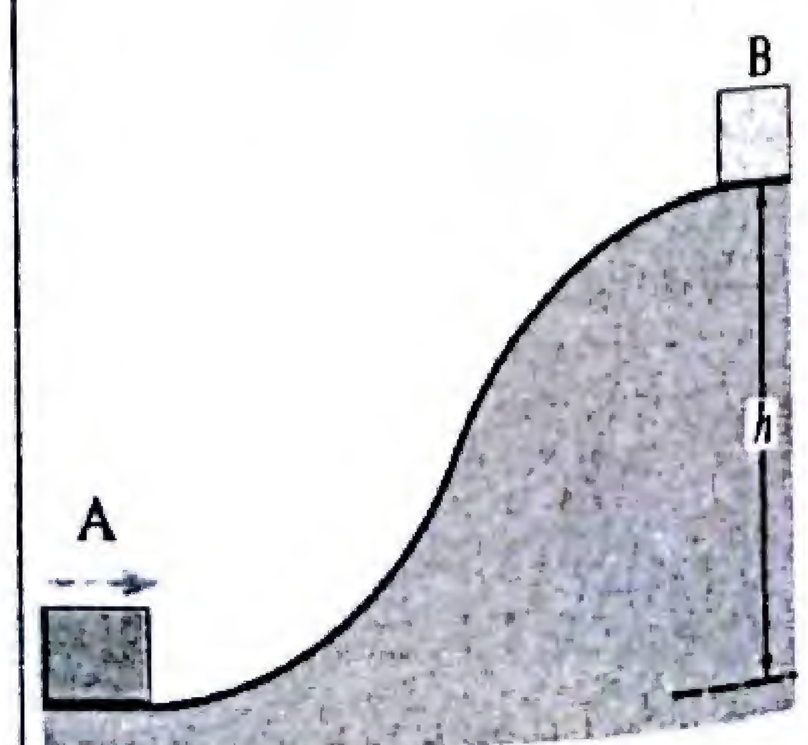


PE-4.10. *Trabajo de la fricción al remontar la cuesta*

Un bloque de masa $m = 2$ kg pasa por el punto A con una velocidad $v_A = 6$ m/s y remonta una cuesta rugosa de altura $h = 0{,}255$ m, llegando al punto B con una velocidad $v_B = 4$ m/s.

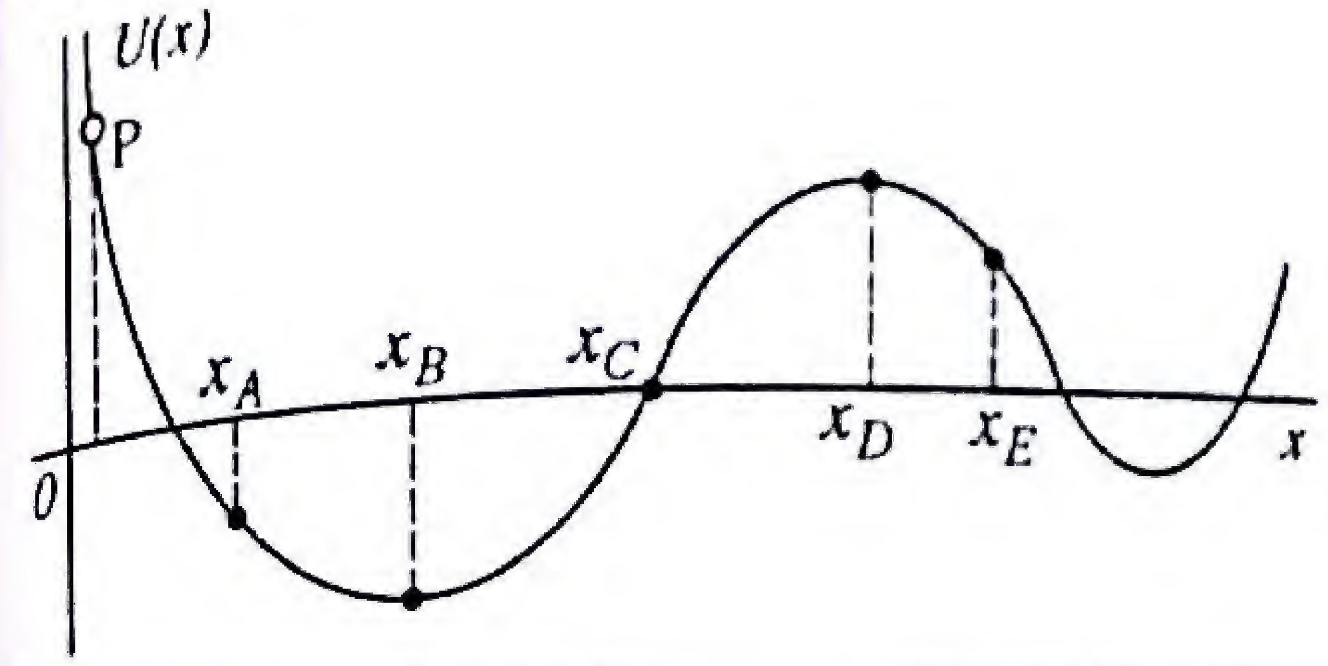
El trabajo efectuado por la *fuerza de fricción* entre A y B es aproximadamente:

a) -5J b) -10J c) -15J d) -20J e) -25J



PE-4.11. *Analizando un curva de energía potencial*

Una partícula se mueve a lo largo del eje x bajo la acción de una fuerza conservativa paralela al eje x. Esta fuerza corresponde a la función energía potencial $U(x)$ representada en la figura:

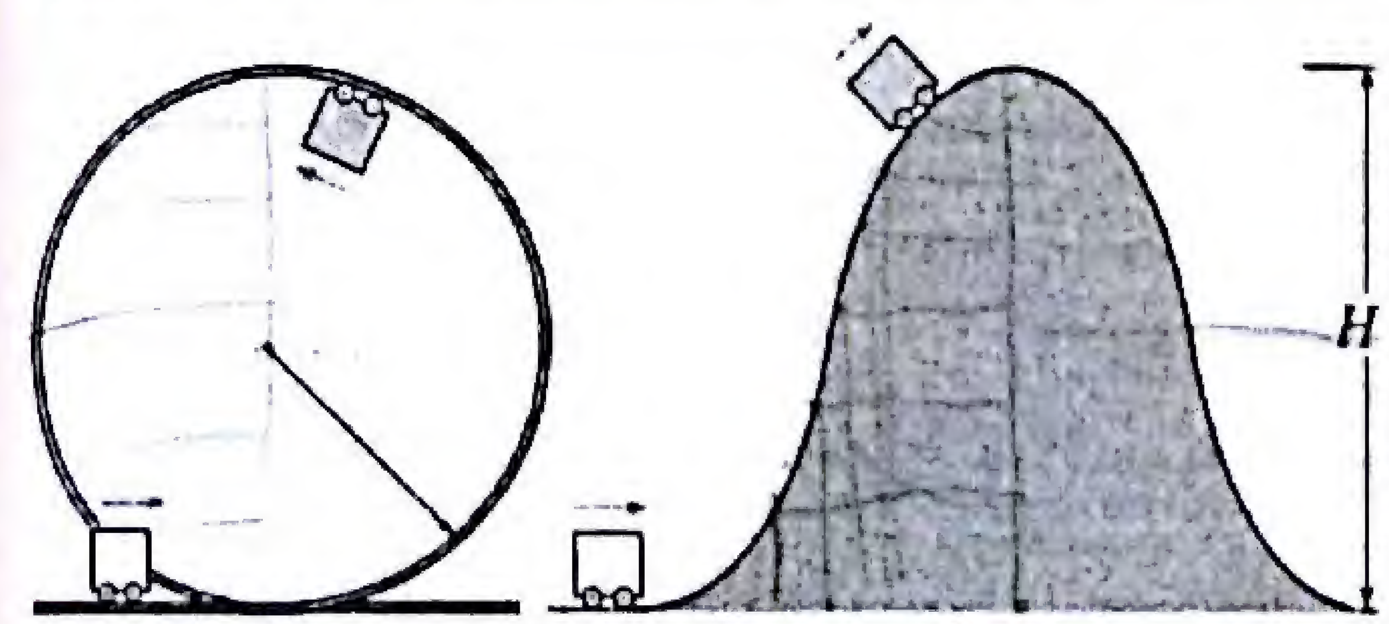


Si la partícula parte del reposo en la posición P, podemos afirmar que:

a) En x_A la fuerza apunta en sentido positivo de las x.
b) En x_B la energía cinética es mínima.
c) En x_C la fuerza es nula.
d) En x_D la energía cinética es máxima.
e) En x_E la fuerza apunta en sentido negativo de las x.

PE-4.12. *¿En cuál caso requiere mayor velocidad?*

A un pequeño bloque se le comunica una velocidad inicial para que pueda elevarse hasta una altura H después de trasladarse sin fricción, siguiendo dos caminos diferentes:



(a) Rizo Circular (b) Montículo

¿En cuál caso se requiere *menor* velocidad inicial?

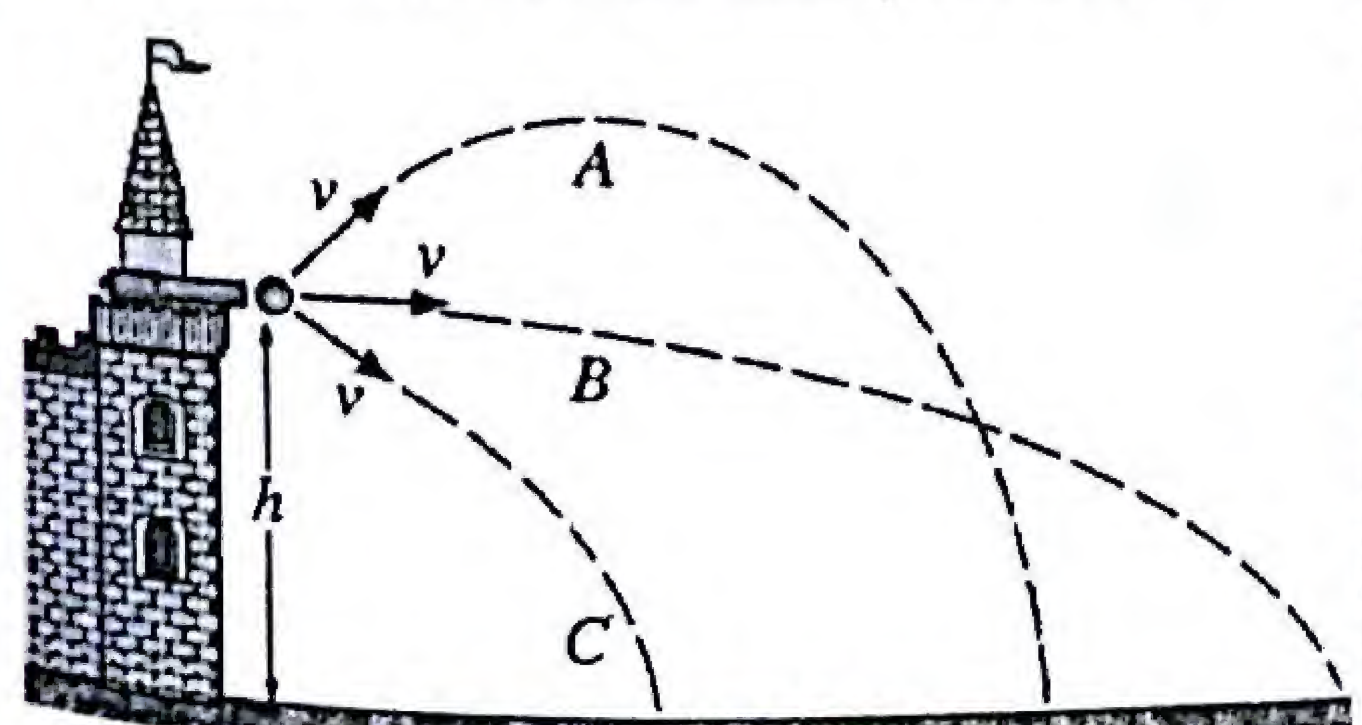
a) En el rizo circular.

b) En el montículo.

c) Igual para ambos

PE-4.13. *Tres pelotas lanzadas con igual rapidez*

Desde lo alto de una torre, son lanzadas simultáneamente tres pelotas idénticas con la misma rapidez inicial v.



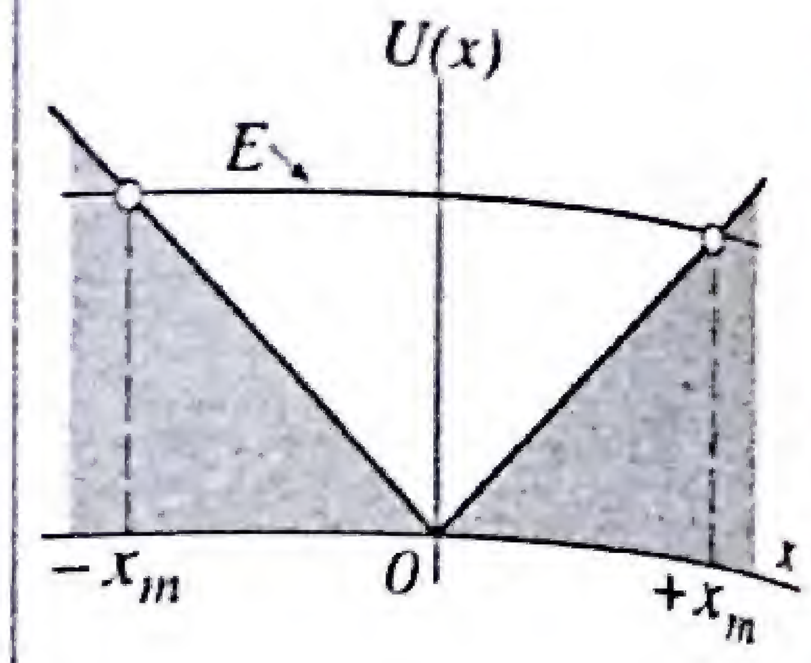
La pelota A se lanza a cierto ángulo hacia arriba, la pelota B horizontalmente y la pelota C a cierto ángulo hacia abajo. ¿Cuál pelota chocará con el suelo con mayor rapidez?

a) La pelota A
b) La pelota B
c) La pelota C
d) Las tres con igual rapidez

PE-4.14. *Partícula confinada en un pozo triangular*

Una partícula de masa $m = 2$ kg se mueve en la dirección x bajo la influencia de una fuerza descrita por la función energía potencial:

$$U(x) = 5\,|x|\ \text{J/m}$$

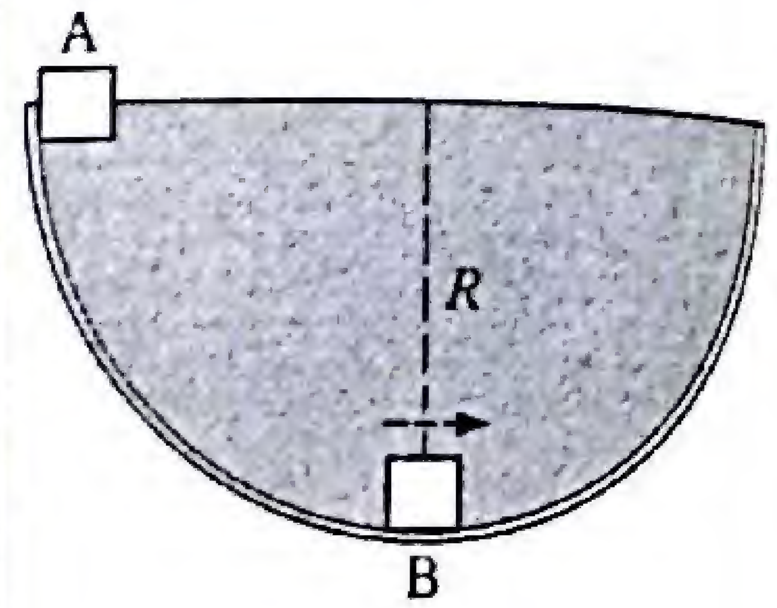


Donde x es la posición de la partícula (en metros) medida desde el origen. La energía total de la partícula es E = 12,5 J. La máxima distancia x_m que esta partícula se aleja del origen es:

a) ±1 m, b) ±2,5 m, c) ±5 m, d) ±12,5 m, e) ±62,5 m

PE-4.15. *Trabajo de la fricción en un tazón esférico*

Un pequeño bloque de masa m = 1kg parte del reposo y se desliza desde el punto A en un recipiente semiesférico de radio R = 1 m. que tiene rozamiento. Cuando pasa por el punto B lleva una velocidad v_B = 3 m/s. ¿Cuál es el trabajo de la fuerza de fricción?



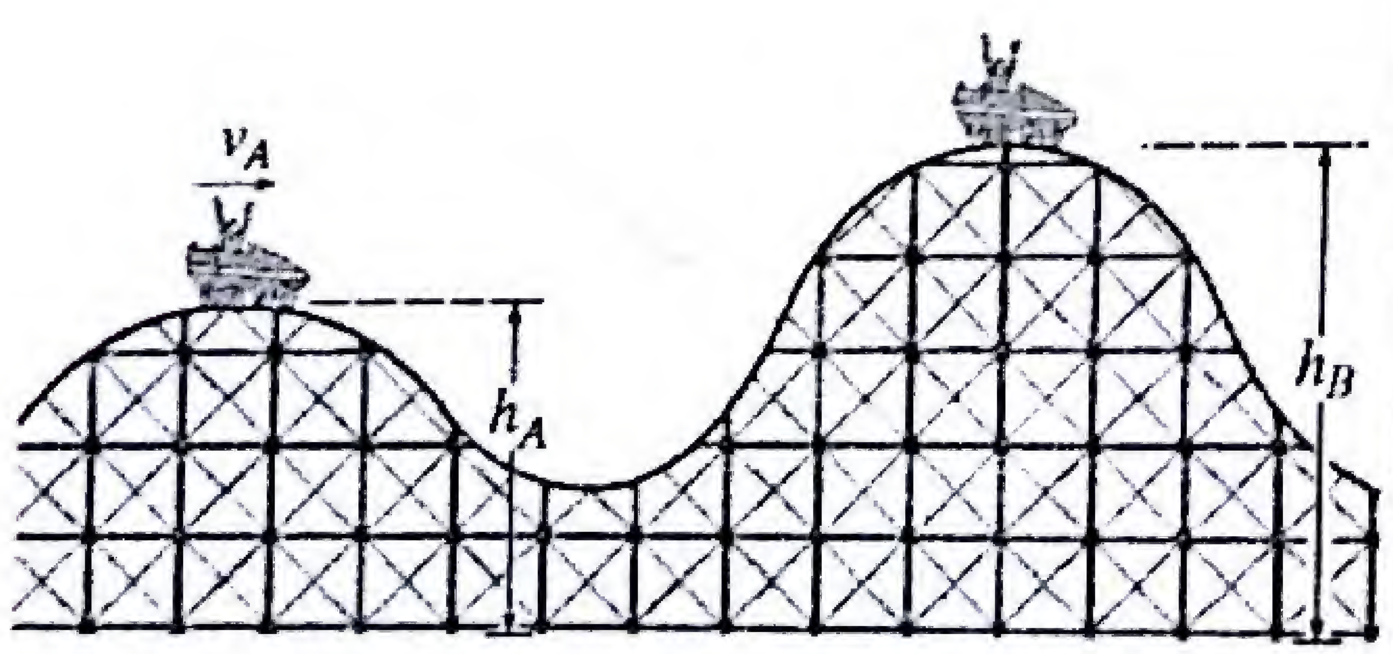
a) -3 J, b) -4,9 J, c) -5,3 J, d) -9,8 J,

e) Falta información

PE-4.16. *Diversión en una montaña rusa*

A un carrito en una montaña rusa, se le imprime una velocidad inicial v_A a una altura h_A = 5 m.

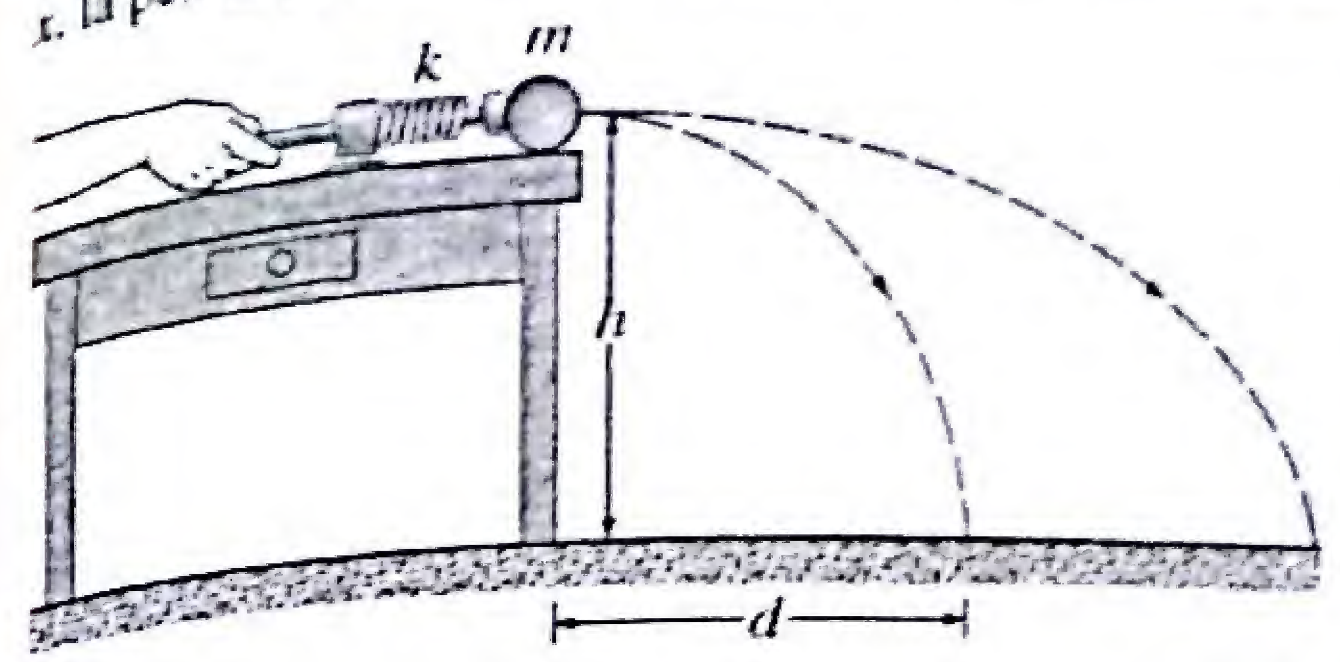
¿Cuál es la mínima velocidad v_A para que apenas llegue al punto B a la altura h_B = 7,5 m?



a) 1 m/s
b) 4 m/s
c) 5 m/s
d) 6 m/s
e) 7 m/s

PE-4.17. *Para lograr un alcance horizontal doble*

Desde una mesa de altura h se lanza horizontalmente una pelota de masa m, usando un resorte de constante elástica k. Se observa que si el resorte se comprime una distancia x, la pelota pega en el suelo a una distancia horizontal, d.

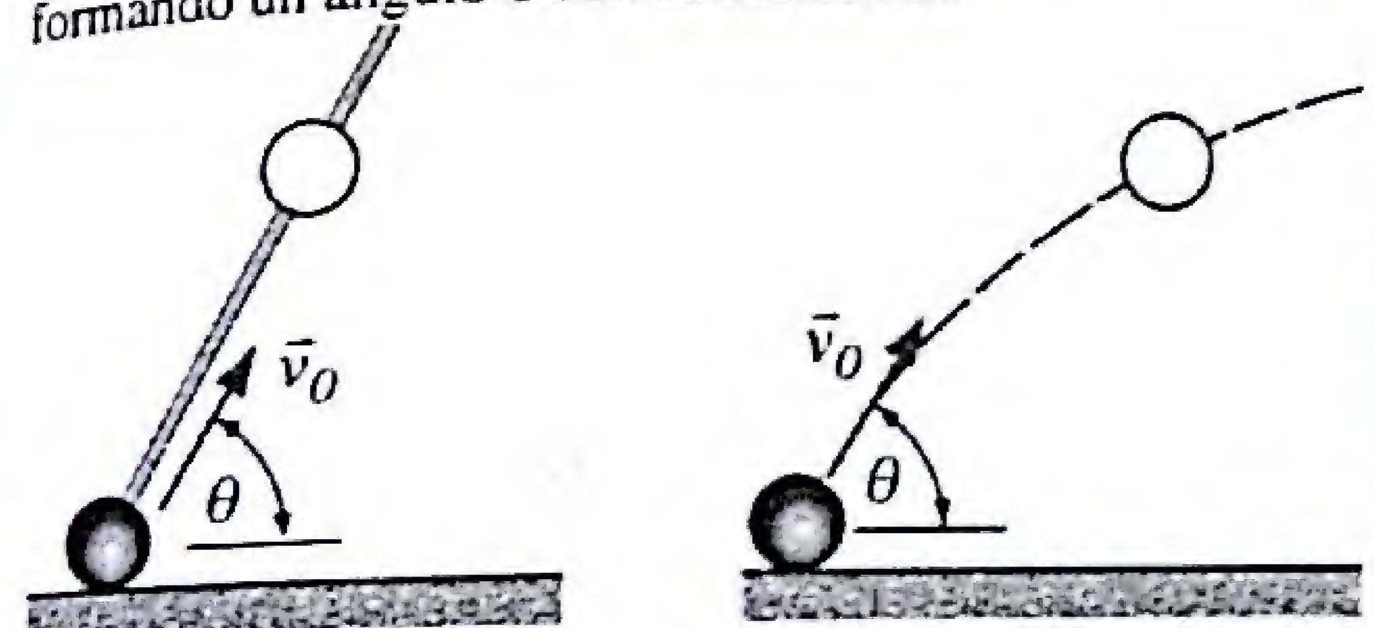


Para que la pelota pegue en el suelo hasta una distancia horizontal $2d$, la compresión del resorte debe ser:

a) $2x$
b) $\sqrt{2}x$
c) $2\sqrt{2}x$
d) $3x/2$
e) $4x$

PE-4.18. *¿Cuál esferita alcanza mayor altura?*

Dos esferitas idénticas son lanzadas a partir del mismo plano horizontal y con la misma velocidad inicial, $\vec{v}_0$, formando un ángulo θ con la horizontal.



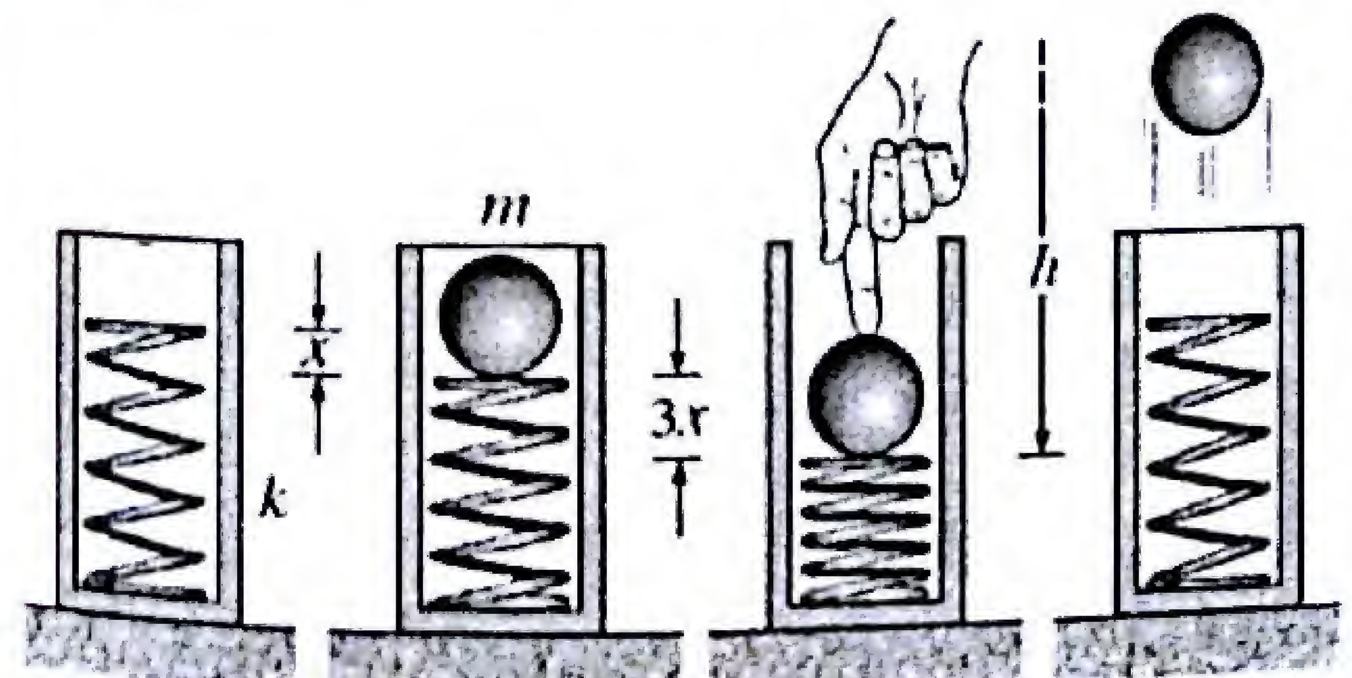
(A) (B)

La esferita A se mueve a lo largo de una guía recta inclinada y sin fricción. La esferita B se mueve libremente bajo la gravedad. ¿Cuál de las esferitas alcanza mayor altura?

a) La esferita A.
b) La esferita B.
c) A y B a igual altura

PE-4.19. *¿Hasta dónde se elevará la pelota?*

Un resorte de constante elástica k está colocado sobre una mesa con su extremo inferior fijo (fig. 1). Cuando se le coloca encima una pelota de masa m, el resorte queda comprimido una cierta distancia x (fig 2).



(1) (2) (3) (4)

A continuación se presiona la pelota y el resorte se comprime una distancia adicional, $3x$ (Fig. 3). Finalmente se libera el sistema y la pelota se eleva una altura h por encima de la posición del resorte comprimido (Fig. 4). La altura que se eleva la pelota será:

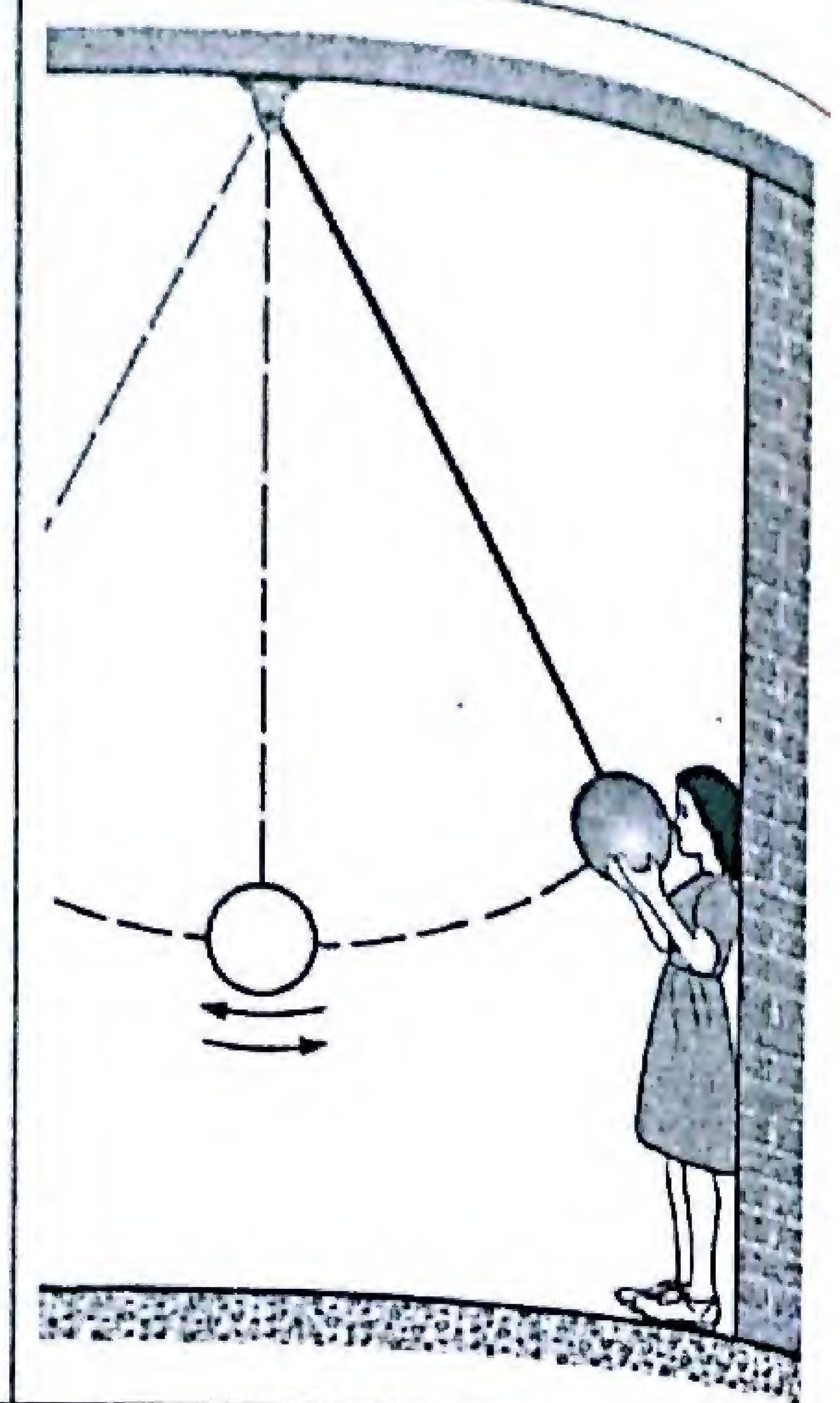
a) $h = 4x$
b) $h = 8x$
c) $h = 9x$
d) $h = 12x$
e) $h = 16x$

PE-4.20. *Prueba de fe en la conservación de la energía*

En una demostración de física de la USB, pedimos a una alumna que tome una pelota de gran tamaño que está colgada desde el techo por una cuerda muy larga, y la sostenga justo tocando la punta de su nariz. Cuando suelta la pelota, el péndulo describe un gran arco circular y luego regresa, llegando la pelota de nuevo justo frente a la nariz de la impávida alumna. Otro estudiante quiere repetir la demostración pero, en vez de soltar la pelota desde reposo, le da un empujón hacia delante. Cuando la pelota venga de regreso, el estudiante debería....

a) quedarse quieto y esperar que la pelota se detenga frente a su nariz.

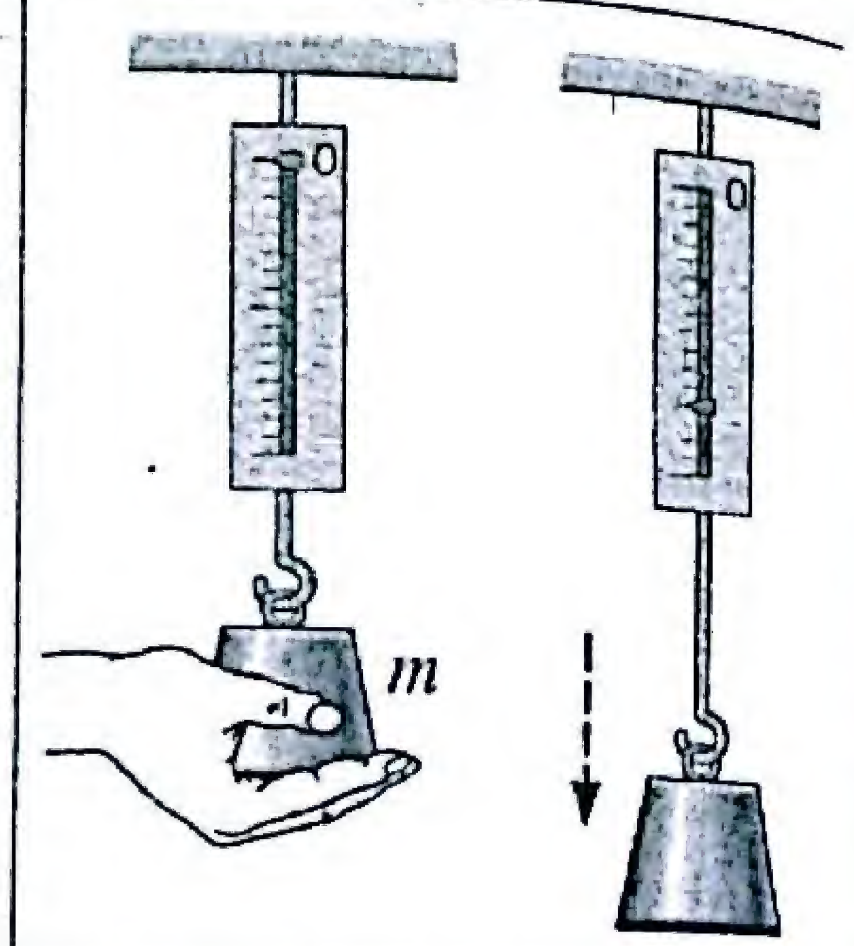
b) apartarse a un lado rápidamente porque la pelota podría aplastar su cara.



PE-4.21. *La lectura podría ser engañosa*

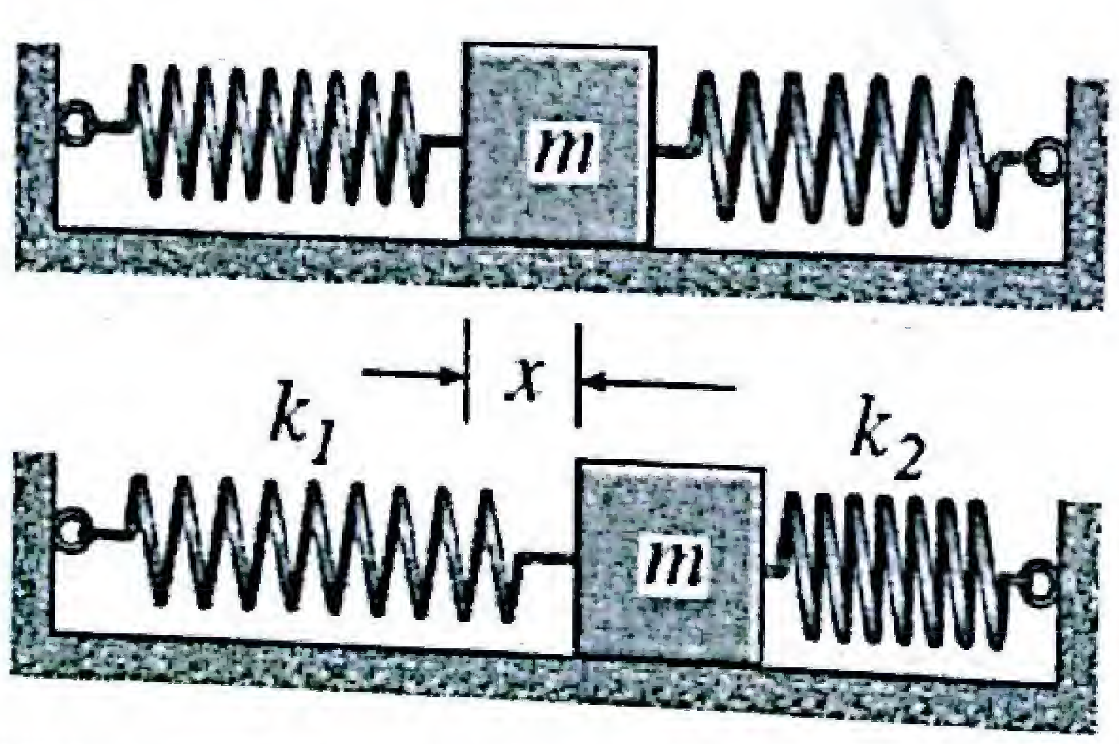
Un cuerpo de peso mg cuelga de un dinamómetro y se sujeta de tal forma que la lectura del dinamómetro sea cero. Si el cuerpo se suelta, cuál es la máxima lectura que se observa del dinamómetro?

a) $6mg$ b) $4mg$ c) $3mg$ d) $2mg$ e) mg



PE-4.22. *El bloque oscila entre dos resortes*

Un bloque de masa m = 5 kg está entre dos resortes de constantes elásticas respectivas, k_1 = 30 N/m y k_2 = 50 N/m. Inicialmente el bloque está en reposo y los resortes no están deformados.



Si el bloque es desplazado una distancia x = 25 cm y se suelta, tendrá un movimiento oscilatorio por la superficie horizontal sin fricción. ¿Con qué velocidad pasará el bloque por su posición inicial?

a) v = 20 m/s
b) v = 15 m/s
c) v = 10 m/s
d) v = 5 m/s
e) v = 1,0 m/s

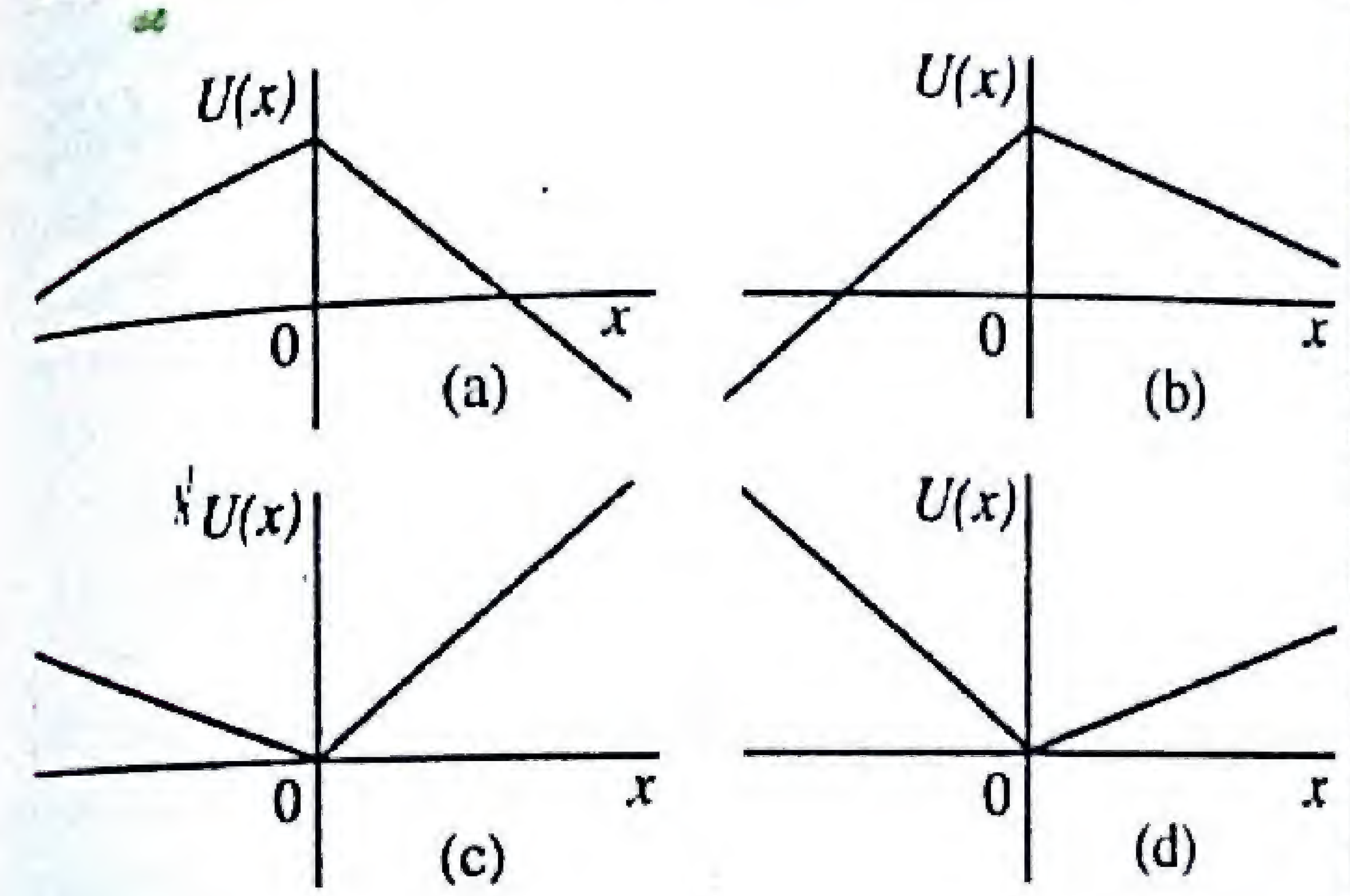
PE-4.23. *Hay fuerzas conservativas y no conservativas*

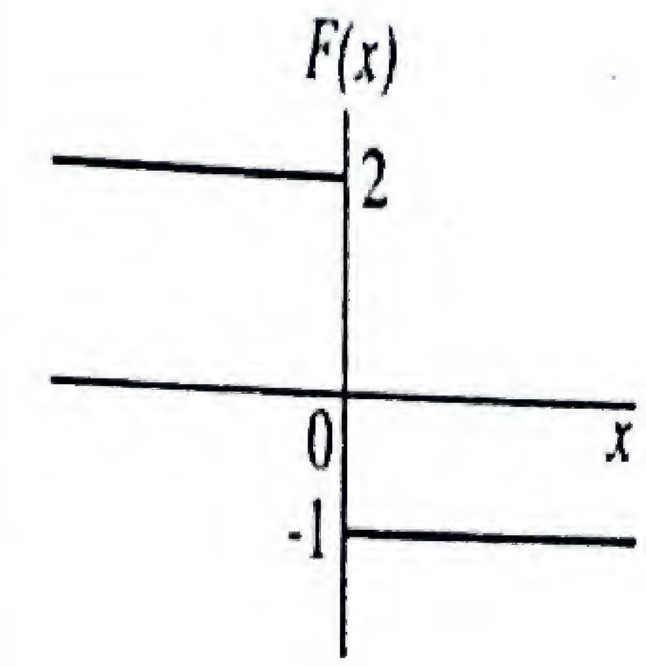
En un cierto instante una partícula tiene una energía potencial $U_A = 5\text{J}$ y una energía cinética $K_A = 5\text{J}$. Un instante posterior la partícula se encuentra en reposo $(K_B = 0)$ y tiene una energía potencial $U_B = 6\text{J}$. ¿Cuál es el trabajo realizado sobre esta partícula por las fuerzas conservativas (W_c) y por las fuerzas no conservativas (W_{nc})?

a) W_c = -2J, W_{nc} = -2J
b) W_c = +1J, W_{nc} = -1J
c) W_c = -1J, W_{nc} = -4J
d) W_c = -1J, W_{nc} = -5J
e) W_c = +4J, W_{nc} = -1J

PE-4.24. *Del gráfico de fuerza al de energía potencial*

La figura de la derecha muestra la fuerza F que actúa sobre una partícula en función de la distancia x. ¿Cuál de los siguientes sería posible para la energía potencial?

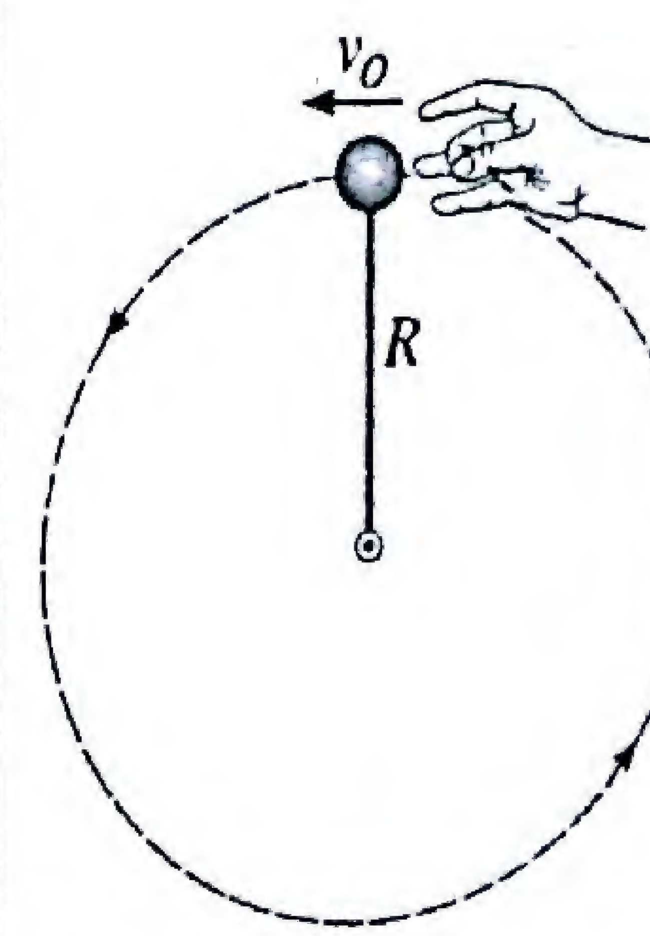




PE-4.25. *Pelota dando vueltas unida a una varilla*

Una pelota de masa m = 0,5 kg está unida a una varilla de longitud R =10,2 cm y masa despreciable, cuyo otro extremo se ha instalado a un eje sin rozamiento. Al comienzo, la pelota se encuentra directamente por encima del eje. ¿Qué *velocidad mínima* es necesaria darle a la pelota en esa posición para que gire y vuelva a su posición original?

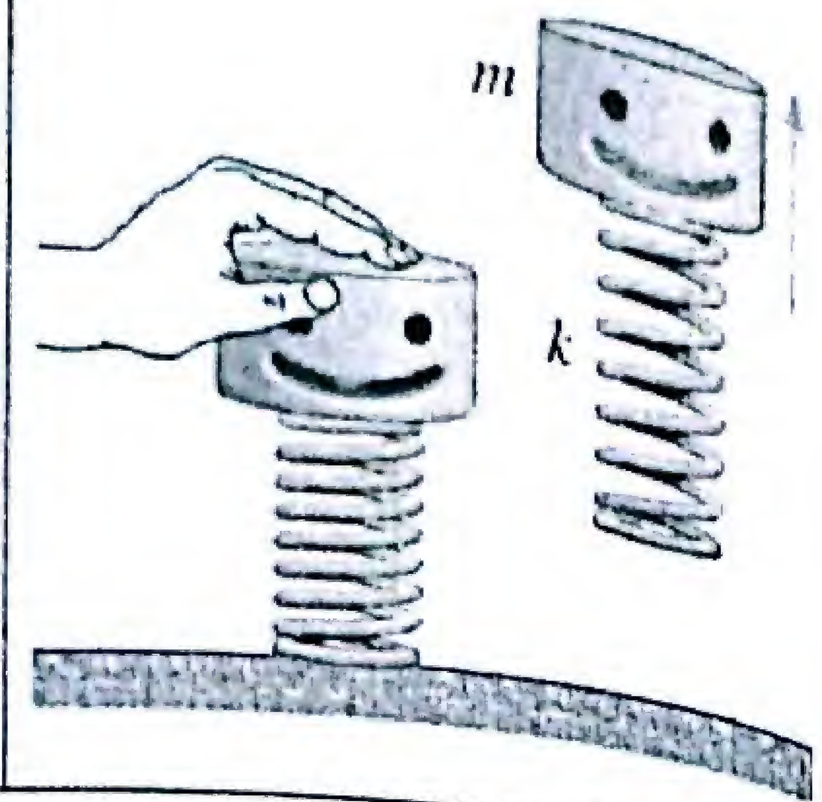
a) 0 m/s, b) 0,5 m/s, c) 1,0 m/s, d) 6 m/s e) 12 m/s



PE-4.26. ***Juguete saltarín II***

Un juguete saltarín se compone de una pieza de plástico de masa m = 100 g que está unida a un resorte de constante elástica k = 1470 N/m y de masa despreciable. Si comprimimos el resorte en 2 cm, hasta qué altura se elevará el juguete?.

a) 10 cm, b) 14,7 cm, c) 30 cm, d) 49 cm, e) 60 cm



CAP. 4: *RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS*

	a	b	c	d	e
4.01					✓
4.03			✓		
4.05		✓			
4.07				✓	
4.09	✓				
4.11	✓				
4.13				✓	
4.15			✓		
4.17	✓				
4.19		✓			
4.21				✓	
4.23			✓		
4.25	✓				

	a	b	c	d	e
4.02	✓				
4.04					✓
4.06				✓	
4.08			✓		
4.10			✓		
4.12		✓			
4.14		✓			
4.16					✓
4.18	✓				
4.20		✓			
4.22					✓
4.24				✓	
4.26			✓		

5

MOMENTO LINEAL Y CHOQUES

En el capítulo anterior hemos estudiado la ley de la conservación de la energía, destacando la facilidad que su empleo brinda en la resolución de problemas de dinámica. Otra magnitud física que también se conserva en circunstancias específicas es el momento lineal o cantidad de movimiento. El momento lineal de un cuerpo es una magnitud vectorial que se define como el producto de la masa por la velocidad de dicho cuerpo. El momento lineal es un concepto muy útil para analizar las colisiones o choques que involucran objetos que van desde partículas del mundo atómico hasta los de escala macroscópica como carros en los accidentes de tránsito. En un choque, interaccionan dos o más cuerpos entre sí, durante un tiempo corto; la fuerza de interacción es muy grande y puede variar de una manera muy compleja. Cuando ocurre la interacción entre los cuerpos dentro de un sistema aislado, se transmite un cierto momento lineal de un cuerpo a otro, pero el momento lineal total del sistema siempre se conserva, sin importar la naturaleza de las fuerzas que existan entre ellos. Esto permite determinar fácilmente el resultado de dicha interacción sin necesidad del estudio detallado de las fuerzas que intervienen. Es importante establecer la diferencia entre choques elásticos e inelásticos. En un *choque elástico* la energía cinética total se conserva, a diferencia del *choque inelástico* en el cual la energía cinética total cambia. En ambos tipos de choques el momento lineal se redistribuye entre los cuerpos pero el momento lineal total siempre se conserva. La conservación del momento lineal es una ley fundamental de la física, que es aplicable aún en el mundo atómico y nuclear donde deja de tener validez la mecánica newtoniana.

En este capítulo Ud. encontrará aspectos relacionados con:

- Momento lineal.
- Impulso y momento lineal.
- Ley de conservación del momento lineal.
- Choques o colisiones.
- Choques elásticos e inelásticos.

PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

MOMENTO LINEAL

El concepto de momento lineal fue introducido por Newton al que se refirió como "la cantidad de movimiento proveniente de la velocidad y la cantidad de materia conjuntamente". Se define el momento lineal de un cuerpo de masa m que se mueve con velocidad $\vec{v}$, en un marco de referencia dado, al producto de su masa multiplicada por su velocidad: $\vec{p} = m\vec{v}$.

Momento Lineal

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}}$$

El momento lineal es una magnitud vectorial que tiene la misma dirección y sentido que el vector velocidad $\vec{v}$.

La unidad SI del momento lineal es la unidad de masa por la unidad de velocidad: 1 kg. m/s = N·s.

Unidad SI del momento lineal
1 kg. m/s = N·s

Para un sistema constituido por mas de una partícula, el momento lineal total del sistema, es el vector suma del momento lineal de las partículas individuales.

Momento lineal total
$\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3 + ...$

SEGUNDA LEY DE NEWTON

En su obra *Principia*, Newton enunció originalmente su segunda ley en términos del momento lineal: La razón de cambio con respecto al tiempo del momento lineal de un cuerpo es igual a la fuerza neta que actúa sobre dicho cuerpo:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\frac{dm}{dt}$$

Segunda ley de Newton

$$\boxed{\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

En el caso particular en que la masa permanezca invariable, entonces, la expresión de la fuerza es:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$$

Esta versión de la segunda ley de Newton en términos de la aceleración $\vec{a}$, es la que hemos venido utilizando.

El término de masa variable $\vec{v}(dm/dt)$ permite tomar en cuenta el intercambio de masa que podría ocurrir entre las partes de un sistema.

Segunda ley de Newton para m constante

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}}$$

IMPULSO Y MOMENTO LINEAL

Supongamos que en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$, la cantidad de movimiento de un cuerpo cambia desde $\vec{p}_1$ hasta $\vec{p}_2$. Integrando la expresión $d\vec{p} = \vec{F}dt$, se obtiene:

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt$$

La integral de la derecha se denomina el ímpetu o impulso $\vec{I}$ de la fuerza durante el intervalo de tiempo Δt.

Obviamente el impulso tiene unidades de newton-segundos (N.s) que también son unidades para el momento lineal.

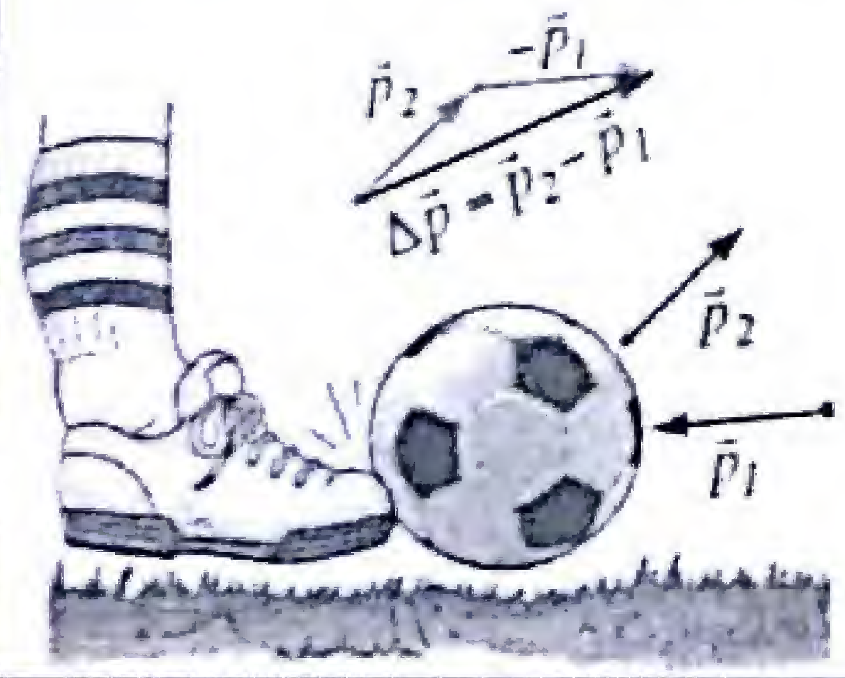
Impulso de una fuerza

$$\boxed{\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt}$$

TEOREMA DEL IMPULSO-MOMENTO LINEAL

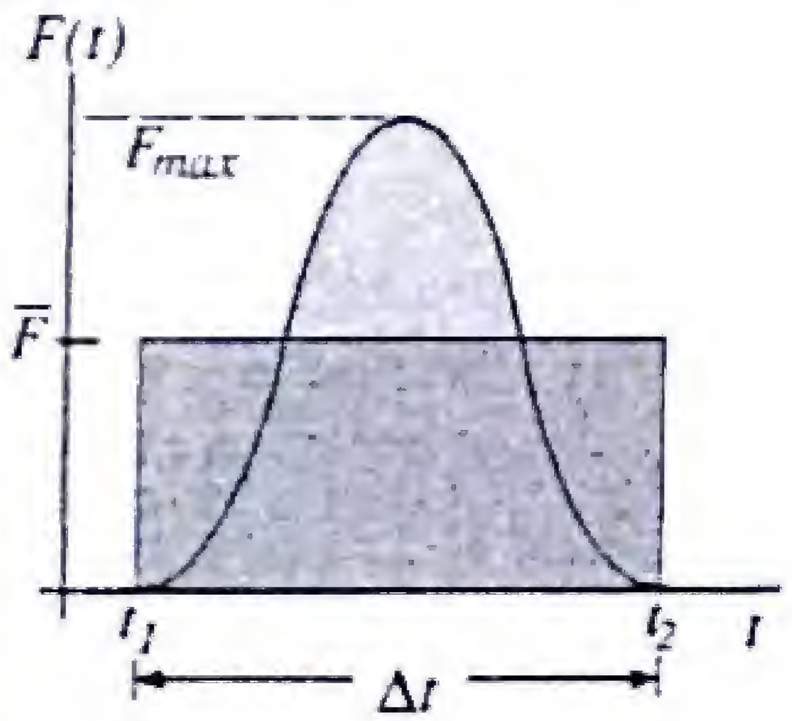
El impulso de la fuerza $\vec{F}$ ejercido sobre un cuerpo es igual al cambio $\Delta\vec{p}$ del momento lineal del cuerpo.

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = \Delta\vec{p}$$



La magnitud del impulso es numéricamente igual al área bajo la curva de la fuerza F en función del tiempo t. Una fuerza pequeña que actúa durante un tiempo grande puede producir un impulso igual que una fuerza grande actuando en un tiempo pequeño.

En general, la fuerza puede variar en el transcurso del tiempo de manera arbitraria, y se podría definir un *valor promedio* de dicha fuerza durante el intervalo de tiempo en que actúa. El valor promedio es aquella fuerza constante, $\bar{F}$, que produciría el mismo impulso al cuerpo que el que le daría la fuerza verdadera, $\vec{F}(t)$, durante el mismo intervalo de tiempo Δt.



$$\text{Area} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = \bar{F}\Delta t$$

LA CONSERVACIÓN DEL MOMENTO LINEAL

Sean dos cuerpos m_1 y m_2 que interactúan entre sí y están aislados del medio circundante, es decir, no hay fuerzas externas. La interacción puede ser por contacto físico, como la que ocurre entre dos bolas de billar o, por la repulsión eléctrica a distancia entre cargas eléctricas de igual signo.

En cualquier caso, de acuerdo a la tercera ley de Newton las fuerzas de interacción son iguales y opuestas:

$$\bar{F}_1 = -\bar{F}_2.$$

Aplicando la segunda ley de Newton a cada cuerpo por separado, tenemos:

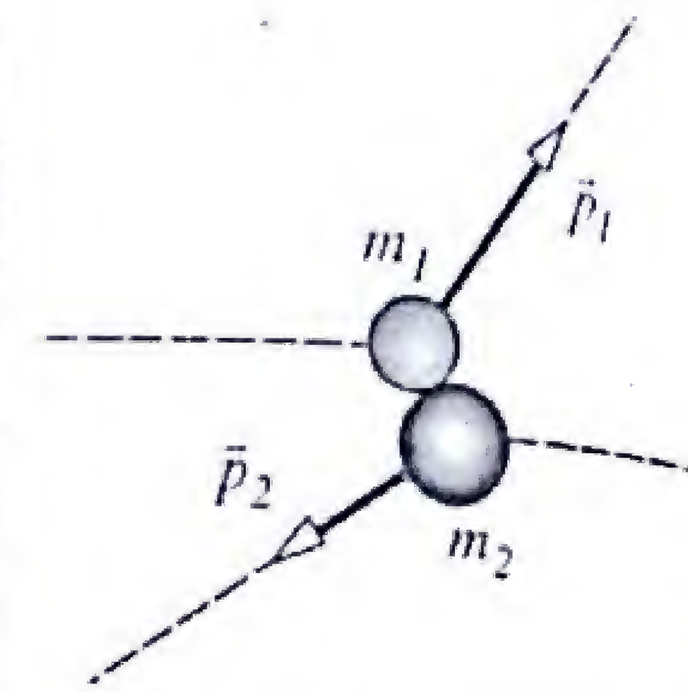
$$\bar{F}_1 = \frac{d\bar{p}_1}{dt} \qquad \bar{F}_2 = \frac{d\bar{p}_2}{dt};$$

Sumando las dos expresiones:

$$\frac{d}{dt}(\bar{p}_1 + \bar{p}_2) = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 = 0$$

de modo que:

$$\bar{p}_1 + \bar{p}_2 = \text{constante}$$



El momento lineal total de un sistema aislado de dos partículas se conserva

$$\boxed{\bar{p}_1 + \bar{p}_2 = \textit{constante}}$$

El resultado anterior puede ser extendido a un sistema con cualquier número de partículas. Aplicando la segunda ley de Newton y tomando en cuenta que las fuerzas internas se cancelan por pares, tenemos:

$$\bar{F}_{ext} = \frac{d\bar{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\sum \bar{p}_i$$

Siendo $\bar{P}$ el momento lineal total del sistema. Si la fuerza neta externa sobre el sistema, $\bar{F}_{ext}$, es cero, entonces $\bar{P}$ no puede variar con el tiempo. El efecto de las fuerzas internas es tan solo redistribuir el momento lineal total entre las partículas.

Ley de conservación

El momento lineal de un sistema aislado de partículas se conserva

$$\boxed{\begin{gathered}\bar{F}_{ext} = 0 \\ \sum \bar{p}_i = \textit{constante}\end{gathered}}$$

CHOQUES O COLISIONES

Los choques son eventos en los cuales dos o más cuerpos interactúan mediante fuerzas muy intensas durante un tiempo muy breve. Estas fuerzas se denominan fuerzas impulsivas.

Durante un choque pueden haber fuerzas externas, como la gravedad, cuyos efectos son insignificantes frente a los de las fuerzas *impulsivas* del choque. Esto se debe a que si la duración del choque es muy breve, la fuerza externa no actúa por un tiempo suficiente para alterar significativamente el momento lineal. Por lo tanto, en los choques, podemos aplicar con una buena aproximación, la conservación del momento lineal.

En los choques se conserva el momento lineal

CHOQUES ELÁSTICOS E INELÁSTICOS

Durante una colisión, parte de la energía cinética original puede ser transformada por las fuerzas internas en otras formas de energía, como energía térmica, potencial (elástica, eléctrica,..) o de algún otro tipo.

En general, los choques se clasifican en dos tipos de choques, según sea la pérdida de energía cinética que ocurra: *choques perfectamente elásticos* si se conserva la energía cinética y *choques inelásticos* si no se conserva la energía cinética.

Choque elástico:
Se conserva la energía cinética

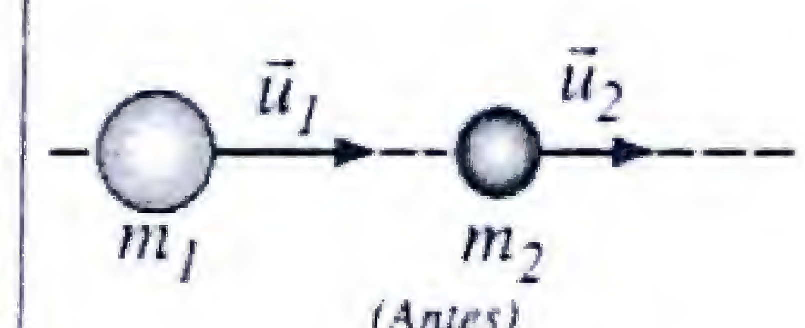
Un choque en el que los cuerpos quedan pegados entre sí y continúan moviéndose con una velocidad común se llama choque *perfectamente inelástico o plástico*. Este tipo de colisión corresponde a la pérdida máxima de energía cinética.

Choque inelástico:
No se conserva la energía cinética

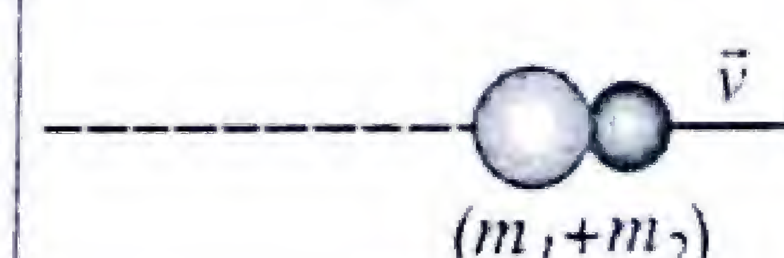
CHOQUE INELÁSTICO UNIDIMENSIONAL

Sean dos cuerpos de masas m_1 y m_2 que viajan inicialmente en la misma línea recta con velocidades $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ y que, después de chocar frontalmente se mantienen unidos moviéndose con una velocidad común, $\bar{v}$. Podemos aplicar la conservación del momento lineal, es decir, el momento lineal total antes del choque es igual al momento lineal total después de éste:

$$\sum p_x: \quad m_1u_1 + m_2u_2 = (m_1 + m_2)v$$



(Antes)



(Después)

Despejando v de esta expresión, se obtiene:

$$\bar{v} = \frac{m_1\bar{u}_1 + m_2\bar{u}_2}{m_1 + m_2}$$

En este choque perfectamente inelástico, se pierde una parte de la energía cinética inicial.

Choque perfectamente inelástico

$$\boxed{\bar{v} = \frac{m_1\bar{u}_1 + m_2\bar{u}_2}{m_1 + m_2}}$$

CHOQUE ELÁSTICO UNIDIMENSIONAL

Supongamos una colisión frontal perfectamente elástica entre dos cuerpos de masas m_1 y m_2 que viajan en la misma línea recta con velocidades respectivas, $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$. Aplicando la conservación del momento lineal:

$$\sum \bar{p}_x = \text{constante}$$

$$m_1\bar{u}_1 + m_2\bar{u}_2 = m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 \qquad (1)$$

Por ser el choque elástico se conserva también la energía cinética total:

$$\sum K_i = \text{constante}$$

$$\frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \qquad (2)$$

Estas dos ecuaciones se pueden escribir en la forma:

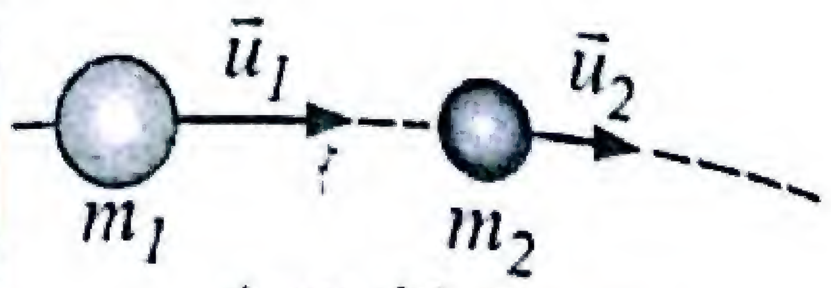
$$m_1(u_1 - v_1) = m_2(v_2 - u_2) \qquad (1)'$$

$$m_1(u_1^2 - v_1^2) = m_2(v_2^2 - u_2^2) \qquad (2)'$$

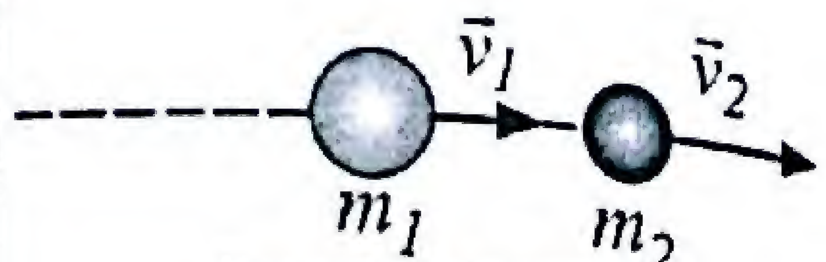
Dividiendo la ecuación (2)´ entre la ecuación (1)´:

$$(v_2 - v_1) = -(u_2 - u_1) \qquad (3)$$

Hemos demostrado que la velocidad relativa de un cuerpo respecto del otro después del choque, conserva su módulo e invierte su signo. Esto quiere decir que, para un observador moviéndose con uno de los cuerpos, se percibiría que el otro cuerpo, inicialmente se acerca y después que ocurre el choque, se alejará *con la misma rapidez*.



Antes del choque



Después del choque

Choque 1-Dim. elástico:

Las velocidades relativas conservan su módulo e invierten su dirección

$$\boxed{(v_2 - v_1) = -(u_2 - u_1)}$$

Si combinamos las ecuaciones (1') y (3) obtenemos las expresiones de las velocidades finales v_1 y v_2, en términos de las velocidades iniciales u_1 y u_2 para un choque en una dimensión perfectamente elástico. Observe que los signos apropiados para las velocidades u_1 y u_2 deben incluirse en esas expresiones.

$$\boxed{v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}u_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}u_2}$$

$$\boxed{v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}u_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}u_2}$$

Caso $m_1 = m_2$**:** Una situación interesante ocurre cuando las partículas que colisionan tienen masas iguales (como sería el caso de las bolas de billar). En esta situación, las partículas que chocan intercambian sus velocidades.

$$v_1 = u_2 \qquad \text{y} \qquad v_2 = u_1$$

Es decir, la velocidad inicial de una partícula es igual a la velocidad final de la otra.

COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN

La mayoría de las colisiones no son ni perfectamente elásticas ni perfectamente inelásticas.

El grado de elasticidad de una colisión se mide por un *coeficiente de restitución*, ε, el cual se define como la razón entre la velocidad relativa de alejamiento después del choque y la velocidad relativa de acercamiento antes del choque.

El valor de ε puede variar entre cero y uno, dependiendo de la cantidad de energía cinética que se pierde en el choque.

Coeficiente de restitución

$$\boxed{\varepsilon = -\frac{v_2 - v_1}{u_2 - u_1}}$$

$$1 \le \varepsilon \le 0$$

$\varepsilon = 1$ *(perfectamente elástico)*

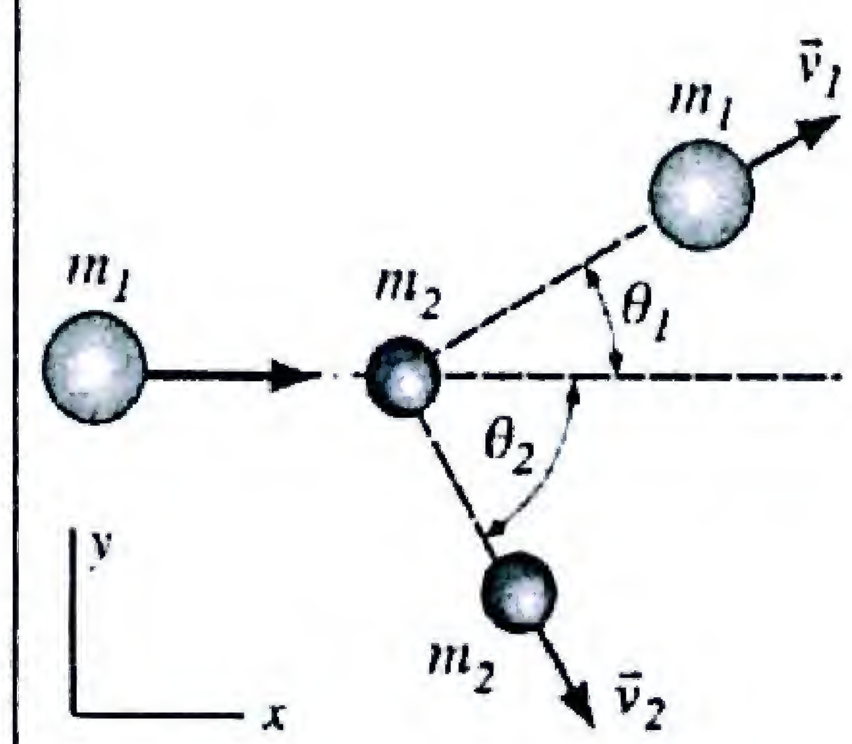
$\varepsilon = 0$ *(perfectamente inelástico))*

COLISIONES BIDIMENSIONALES

En una colisión no frontal, después del choque las dos partículas se mueven en un plano en direcciones distintas θ_1 y θ_2. Las componentes del momento lineal en cada una de las dos direcciones se conservan de manera independiente:

$$\sum (p_x)_{ini} = \sum (p_x)_{fin}$$

$$\sum (p_y)_{ini} = \sum (p_y)_{fin}$$



Si la colisión es elástica, obtenemos una tercera ecuación para la conservación de la energía:

$$\sum K_{ini} = \sum K_{fin}$$

Si la colisión es inelástica, la energía cinética no es constante y esta última ecuación no se aplica.

PROBLEMAS RESUELTOS

PR-5.01. *Fuerza promedio sobre una pelota de béisbol*

Una pelota de béisbol de masa m = 0,150 kg, alcanza al bateador con una velocidad $\vec{v}_1 = -30\hat{x}$ m/s. La pelota es golpeada y sale en dirección a la tercera base con una velocidad $\vec{v}_2 = 60(\hat{x}+\hat{y})$ m/s. El tiempo que estuvo en contacto el bate con la pelota fue Δt = 0,025 s. Determine la fuerza promedio que ejerció el bate sobre la pelota (magnitud y dirección).

Solución: El momento lineal inicial y final de la pelota son respectivamente:

$$\vec{p}_1 = m\vec{v}_1 = (0{,}150\text{ kg})(-30\hat{x}\text{m/s}) = -4{,}5\hat{x}\text{ kg.m/s}$$

$$\vec{p}_2 = m\vec{v}_2 = (0{,}150\text{ kg})60(\hat{x}+\hat{y}) = 9(\hat{x}+\hat{y})\text{ kg.m/s}$$

La variación de $\vec{p}$ será:

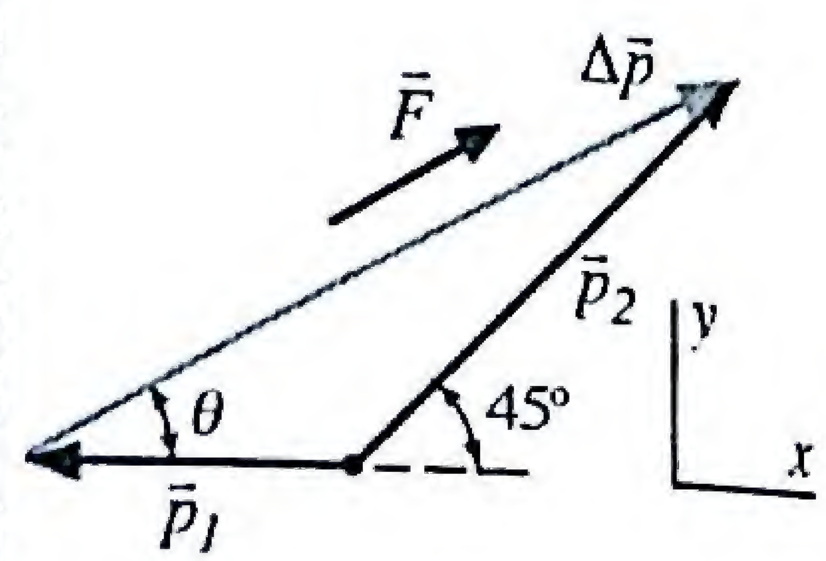
$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = 9(\hat{x}+\hat{y}) - (-4{,}5\hat{x}) = 13{,}5\hat{x} + 9\hat{y}$$

De modo que la fuerza ejercida sobre la pelota es:

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{(13{,}5\hat{x}+9\hat{y})\text{m/s}}{0{,}025\text{ s}} = (540\hat{x} + 360\hat{y})\text{N}$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{540\text{N}^2 + 360\text{N}^2} = 640\text{N}$$

$$tg\theta = \frac{F_y}{F_x} \Rightarrow \theta = \text{Arctg}(360/540) = 33{,}7°$$



Respuesta:

$$\boxed{|\vec{F}| = 649\text{ N},\quad \theta = 33{,}7°}$$

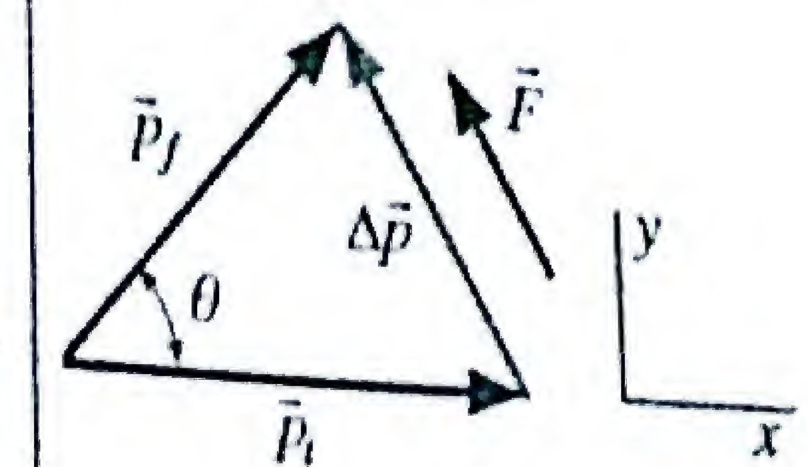
PR-5.02. *Fuerza requerida para sostener la manguera*

Por una manguera sale un chorro de agua en cantidad de 5 litros por segundo y a una velocidad v = 25 m/s. La manguera viene horizontalmente desde el surtidor y el bombero dirige su pico hacia arriba con una inclinación $\theta = 53{,}1°$ con respecto a la horizontal. Determine la fuerza (magnitud y dirección) que debe aplicar el bombero para sostener la manguera en esa posición.

Solución: En cada segundo fluye una masa de 5 kg de agua con una velocidad de 25 m/s que cambia de dirección. El momento lineal inicial y el final son respectivamente:

$$\vec{p}_i = m\vec{v}_i = (5\text{ kg})(25\text{m/s})\hat{x} = 125\hat{x}\text{ Kg.m/s}$$

$$\vec{p}_f = m\vec{v}_f = 125(\hat{x}cos\theta + \hat{y}sen\theta) = (75\hat{x} + 100\hat{y})\text{ Kg.m/s}$$



La fuerza ejercida sobre la manguera es la tasa de cambio del momento lineal, en el intervalo de tiempo: Δt = 1s.

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \frac{\vec{p}_f - \vec{p}_i}{\Delta t} = \frac{75\hat{x} + 100\hat{y} - 125\hat{x}}{1s} = (-50\hat{x} + 100\hat{y})\text{N}$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{50^2 + 100^2} = 112\text{N}$$

$$tg\phi = \frac{|F_y|}{|F_x|} = -\frac{100}{50} = 2 \quad\Rightarrow\quad \phi = 63{,}4°$$

Respuesta

$$\boxed{\vec{F} = (-50\hat{x} + 100\hat{y})\text{ N}}$$

PR-5.03. *El golpe del balón puede tumbarlo*

Un balón de masa m = 0,5 kg golpea horizontalmente con una rapidez v_1 = 20 m/s a un niño de masa M = 25 kg. El impacto dura Δt = 0,1 s y el balón rebota horizontalmente con una rapidez v_2 = 16 m/s, en sentido opuesto. Determine cuál debe ser el valor mínimo del coeficiente de fricción estática entre el suelo y los zapatos para que el niño no deslice hacia atrás.

Solución: El cambio en el momento lineal del balón durante el impacto es:

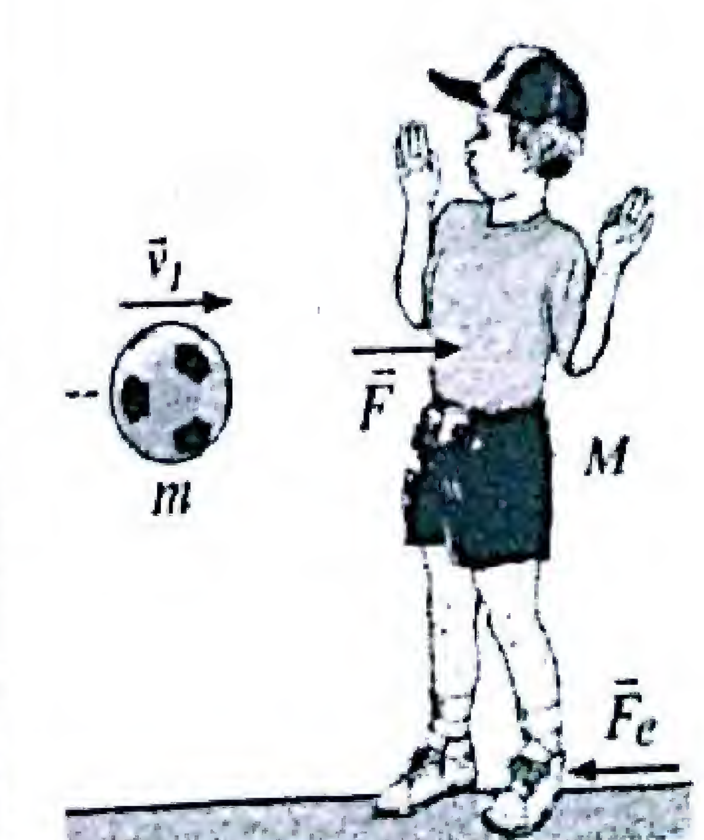
$$\Delta\vec{p}_b = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = m(v_2 + v_1)(-\hat{x})$$

El impulso sobre el niño es igual y opuesto al ejercido sobre el balón:

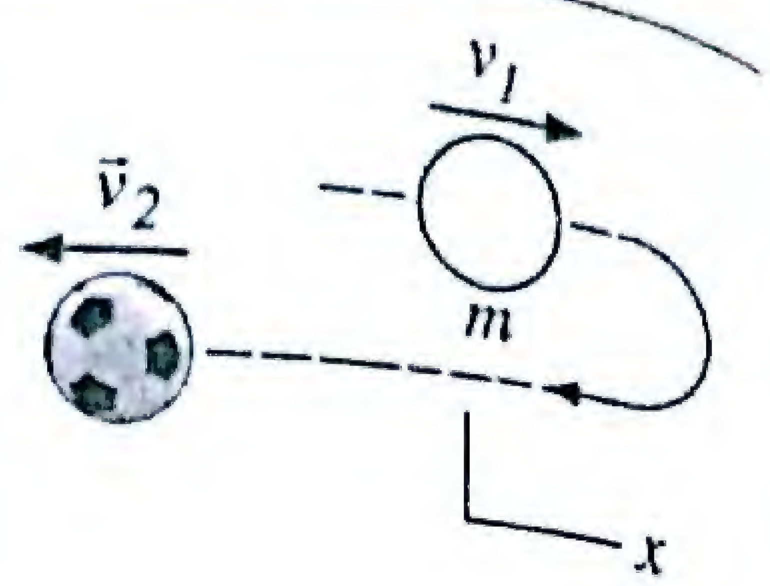
$$\vec{I}_j = \Delta\vec{p}_j = -\Delta\vec{p}_b = m(v_2 + v_1)(+\hat{x})$$

Por lo tanto la fuerza ejercida sobre el jugador por el balón es:

$$\vec{F} = \frac{\Delta\vec{p}_j}{\Delta t} = \frac{m(v_2 + v_1)}{\Delta t}(+\hat{x})$$



Para que el niño no deslice hacia atrás, la fuerza de fricción estática debe tener igual magnitud que la fuerza opuesta ejercida por el balón. Como $F_e < \mu_e Mg$, tenemos:



$$\frac{m(v_2+v_1)}{\Delta t} < \mu_e Mg$$

Por lo tanto, el valor mínimo del coeficiente de fricción estática debe ser:

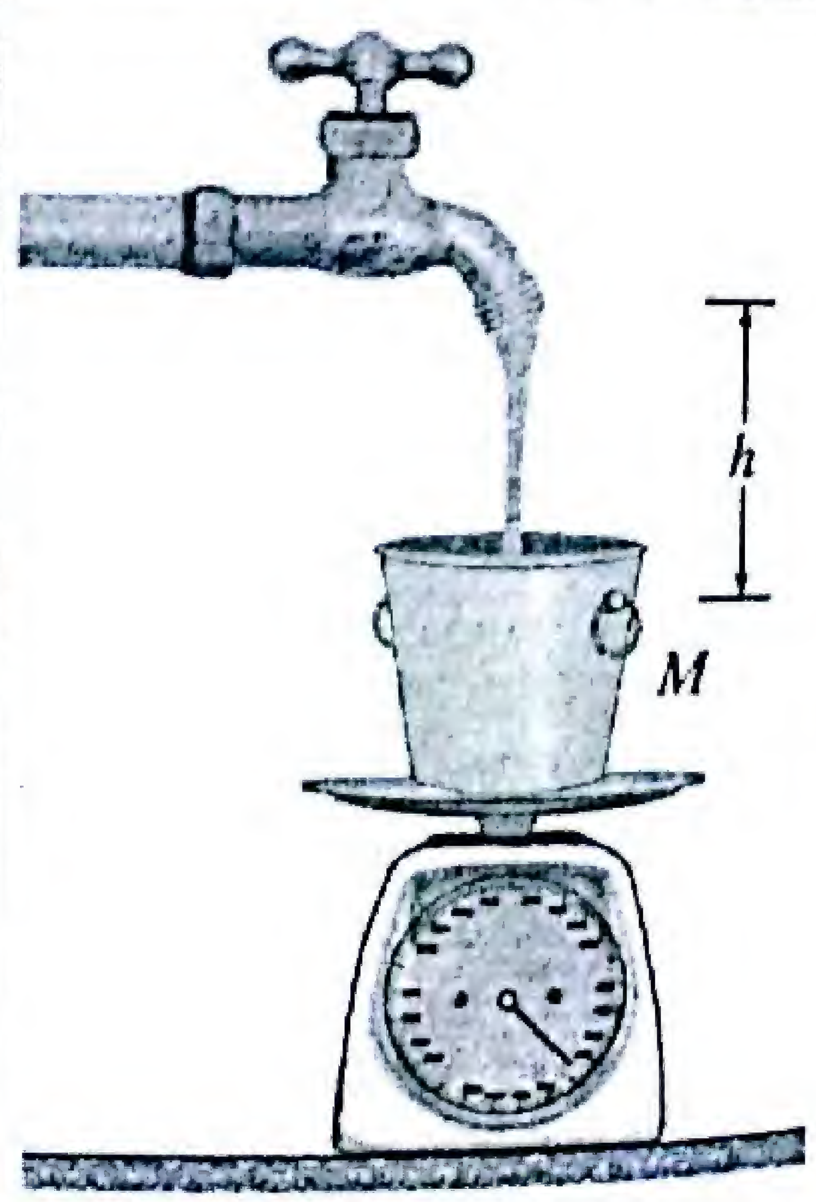
$$\mu_e = \frac{m(v_2+v_1)}{Mg\Delta t} = \frac{(0{,}5\text{kg})(20+16)\text{m/s}}{(25\text{kg})(9{,}8\text{m/s}^2)(0{,}1\text{s})} = 0{,}735$$

Respuesta: $\boxed{\mu_e = 0{,}735}$

PR-5.04. *¿Cuál será la lectura de la balanza?*

Se coloca un recipiente vacío de masa M = 0,50 kg sobre una báscula. Desde una altura h = 2,5 m empieza a caer agua a una tasa de 0,20 litros por segundo ($\Delta m/\Delta t$ = 0,2 kg/s). ¿Cuál será la lectura de la balanza cuando han transcurrido 25 segundos?

Solución: La velocidad v, con que choca el agua se determina por la conservación de la energía



$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2gh} = 7 \text{ m/s}$$

Al chocar, el agua imparte una fuerza promedio:

$$F_1 = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta(mv)}{\Delta t} = (7\text{m/s})(0{,}2\text{kg/s}) = 1{,}4\text{N}$$

El peso del recipiente vacío es:

$$Mg = (0{,}5\text{kg})(9{,}8\text{m/s}^2) = 4{,}9 \text{ N}.$$

El peso del agua acumulada en el recipiente al cabo de 25 s, es:

$$F_2 = mg = (0{,}20\frac{\text{kg}}{\text{s}})(25\text{s})(9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}) = 49\text{N}$$

La lectura de la balanza en ese instante será la suma de estas tres fuerzas:

$$F = F_1 + F_2 + Mg = 1{,}4\text{N} + 49\text{N} + 4{,}9\text{N} = 55{,}3\text{N}$$

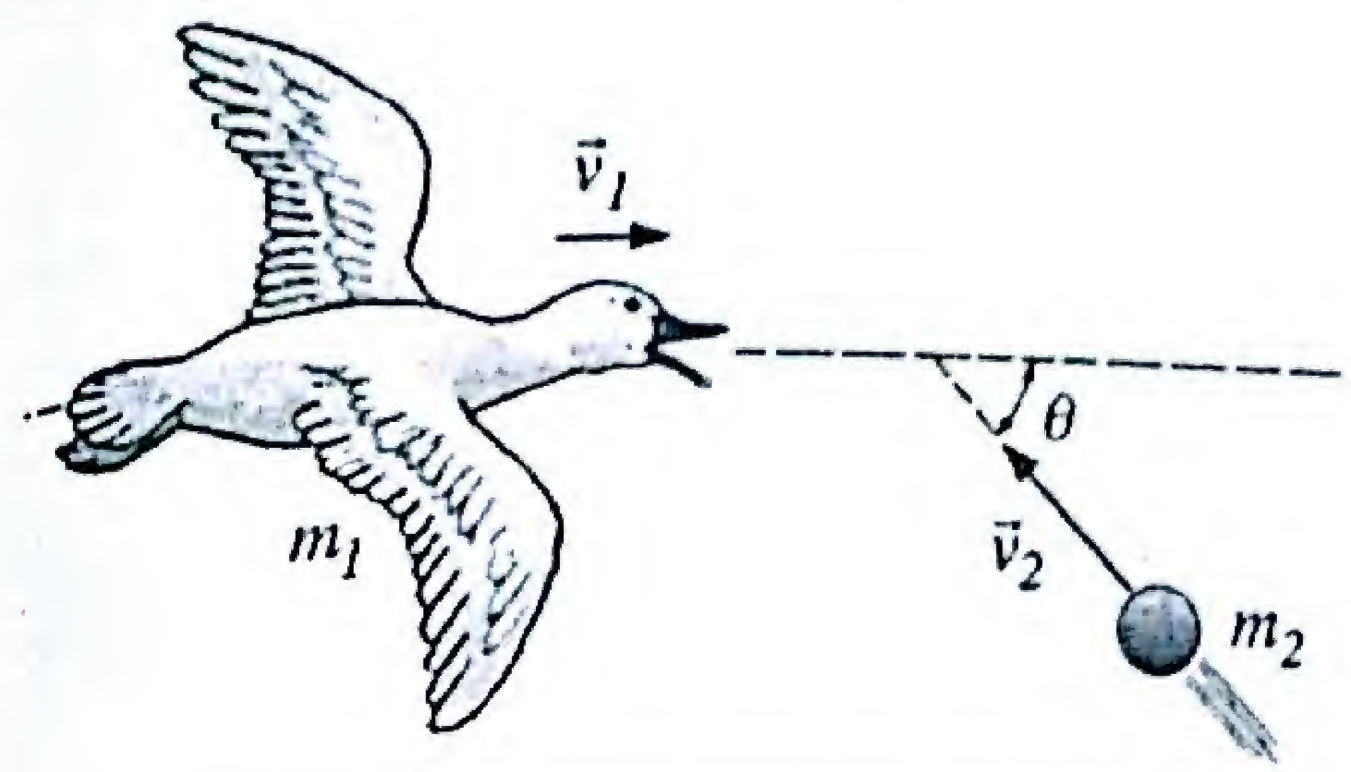
Respuesta: $\boxed{\text{Lectura: } 55{,}3\text{N}}$

PR-5.05. *El pato se traga la pelota de golf*

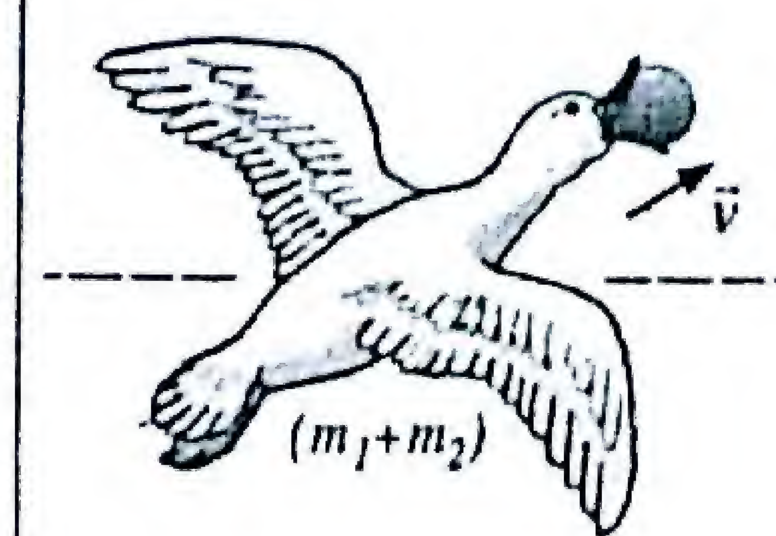
Un pato de masa m_1 = 4 kg, vuela horizontalmente a cierta altura con una velocidad v_1 = 2 m/s.

Una pelota de golf de masa m_2 = 50 g que fue disparada desde el suelo, es atrapada por el pato. En ese momento, la pelota tenía una velocidad v_2 = 50 m/s a un ángulo θ = 53.1°, con la horizontal.

¿Cuál será la velocidad del pato inmediatamente después que ha atrapado la pelota?



Solución: El choque se considera perfectamente inelástico. Aplicando la conservación del momento lineal en la dirección horizontal:



$$m_1v_1 - m_2v_2\cos\theta = (m_1+m_2)v_x$$

La componente horizontal de la velocidad del sistema (pato + pelota) es:

$$v_x = \frac{m_1v_1 - m_2v_2\cos\theta}{m_1+m_2}$$

$$v_x = \frac{(4\text{kg})(2\text{m/s}) - (0{,}05\text{kg})(50\text{m/s})\cos 53{,}1°}{(4+0{,}05)\text{kg}} = 1{,}6\text{m/s}$$

En la dirección vertical, la velocidad es:

$$m_2v_2 sen\theta = (m_1+m_2)v_y \quad \Rightarrow \quad v_y = \frac{m_2v_2 sen\theta}{m_1+m_2}$$

$$v_y = \frac{(0{,}05\text{kg})(50\text{m/s})53{,}1°}{(4+0{,}05)\text{kg}} = 0{,}494\text{m/s}$$

Respuesta: $\boxed{v = (1{,}6\hat{x} + 0{,}494\hat{y}) \text{ m/s}}$

PR-5.06. *Fuerza de impacto al caer desde lo alto*

Una persona de masa m = 50 kg cae al pavimento desde el 2° piso de un edificio, a una altura h = 5,1 m. Determine la fuerza promedio que el piso ejerce sobre los pies de la persona, en los dos casos siguientes:

a) La persona mantiene las piernas rígidas al hacer contacto con el piso, de modo que el cuerpo se mueve una distancia pequeña Δx = 1 cm durante el impacto.

b) La persona dobla las rodillas al hacer contacto con el piso y el cuerpo se mueve una distancia Δx = 50 cm durante el impacto.

Solución: La velocidad de la persona al chocar, se obtiene de la conservación de la energía:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9,8)(5,1)} = 10\text{m/s}$$

Aplicando la segunda ley de Newton, la fuerza neta es:

$$F_n = \Delta p / \Delta t = F_s - mg$$

Durante el tiempo $\Delta t = \Delta x / \bar{v} = 2\Delta x / v_0$, el cambio en el momento lineal es: $\Delta p = m\Delta v = mv_0$; por lo tanto, la fuerza ejercida por el suelo sobre los pies es:

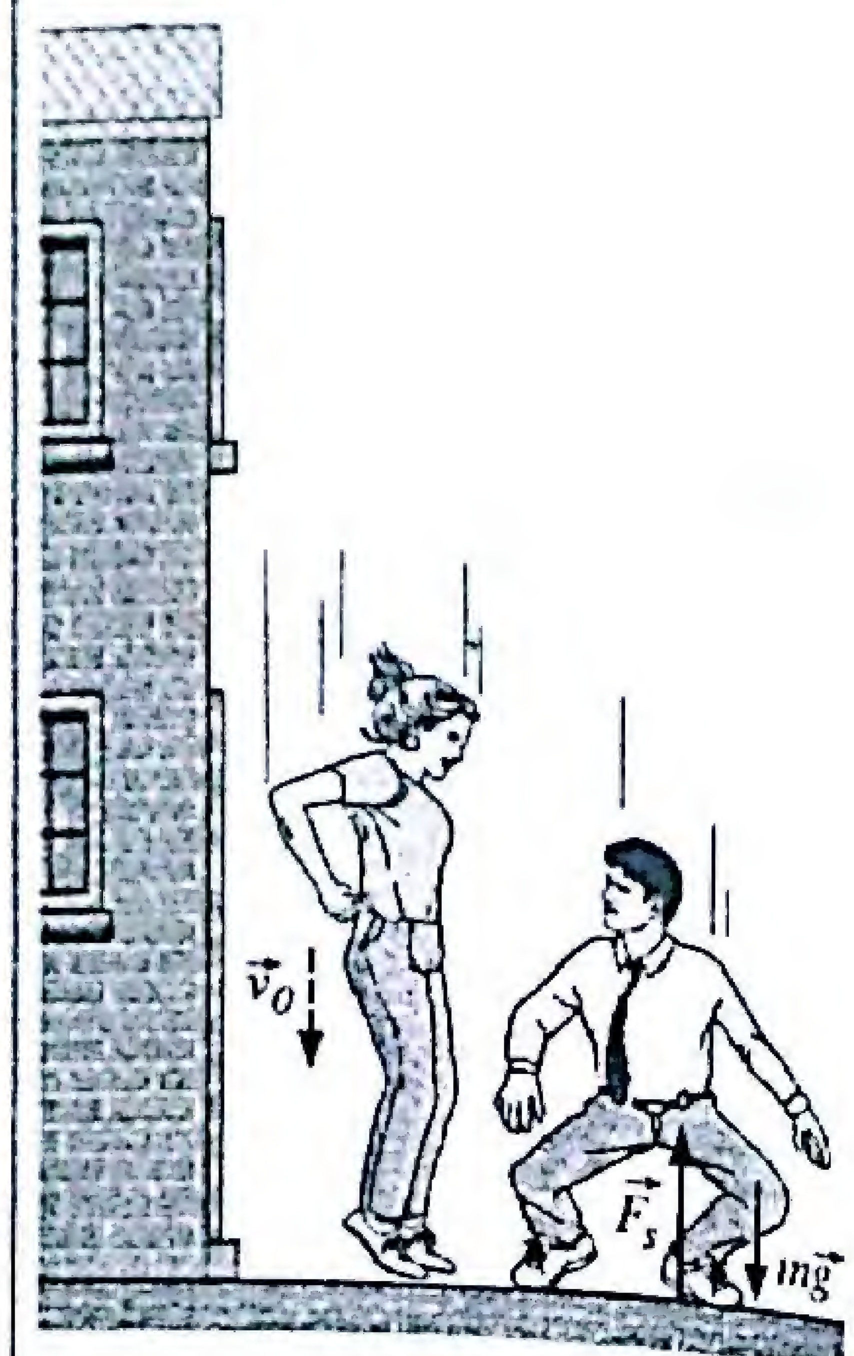
$$F_s = \frac{\Delta p}{\Delta t} + mg = \frac{mv_0}{2\Delta x / v_0} + mg = m(\frac{v_0^2}{2\Delta x} + g)$$

(a) En el primer caso: Δx = 0,01 m y la fuerza es:

$$F_s = 50(\frac{10^2}{2(0,01)} + 9,8) \cong 2,5\text{x}10^5\text{N}$$

(b) En el segundo caso: Δx = 0,5 m y la fuerza es:

$$F_s = 50(\frac{10^2}{2(0,5)} + 9,8) = 5490\text{N}$$

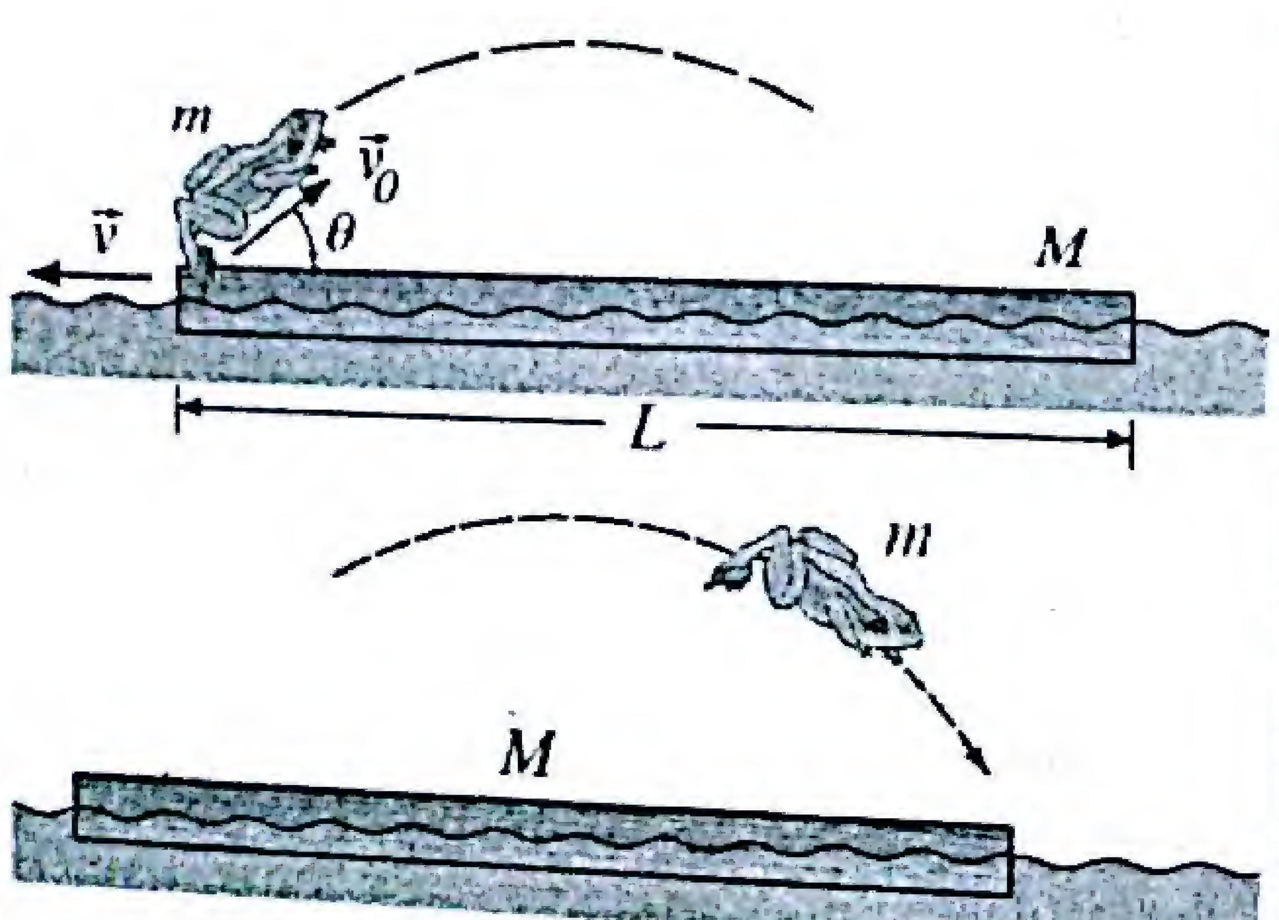


Respuesta

a) $F_s \approx 2,5\text{x}10^5$ N
b) F_s =5490 N

PR-5.07. ***La rana salta en la tabla sin caer al agua***

Una rana de masa m = 0,5 kg está en un extremo de una tabla de masa M = 5 kg y longitud L = 1,8 m.



La tabla flota sobre las aguas tranquilas de una laguna. La rana da un salto hacia el otro extremo de la tabla con una velocidad $\vec{v}_0$ que forma un ángulo de elevación θ = 45°. La tabla permanece horizontal y se desprecia la fricción con el agua.

¿Cuál debe ser el módulo de la velocidad inicial, v_0, para que la rana llegue al otro extremo de la tabla sin caer al agua?

Solución: Durante el salto no cambia el momento lineal en dirección horizontal del sistema tabla-rana:

$$0 = mv_0\cos\theta - Mv \quad \Rightarrow \quad v = \frac{m}{M}v_0\cos\theta \qquad (1)$$

$V_0 \cos\theta$

Siendo v la velocidad de retroceso de la tabla. Para llegar a la otra punta de la tabla, la rana debe recorrer una distancia horizontal:

$$\Delta x = L - v\Delta t = (v_0\cos\theta)\Delta t \qquad (2)$$

$\Delta x + V$

$\frac{m}{M} v_0 \cos\theta \, \Delta t$

Donde Δt es el tiempo que permanece la rana en el aire, o tiempo de vuelo del movimiento parabólico:

$$y = 0 = v_{0y}\Delta t - \frac{1}{2}g\Delta t^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta t = 2\frac{v_{0y}}{g} = 2\frac{v_0 sen\theta}{g}$$

Sustituyendo Δt y v en la expresión (2), obtenemos el módulo de la velocidad inicial requerida:

$$v_0 = \sqrt{\frac{MgL}{(M+m)sen2\theta}} = \sqrt{\frac{5(9,8)(1,8)}{(5+0,5)\text{sen}90°}} = 4 \text{ m/s}$$

Respuesta

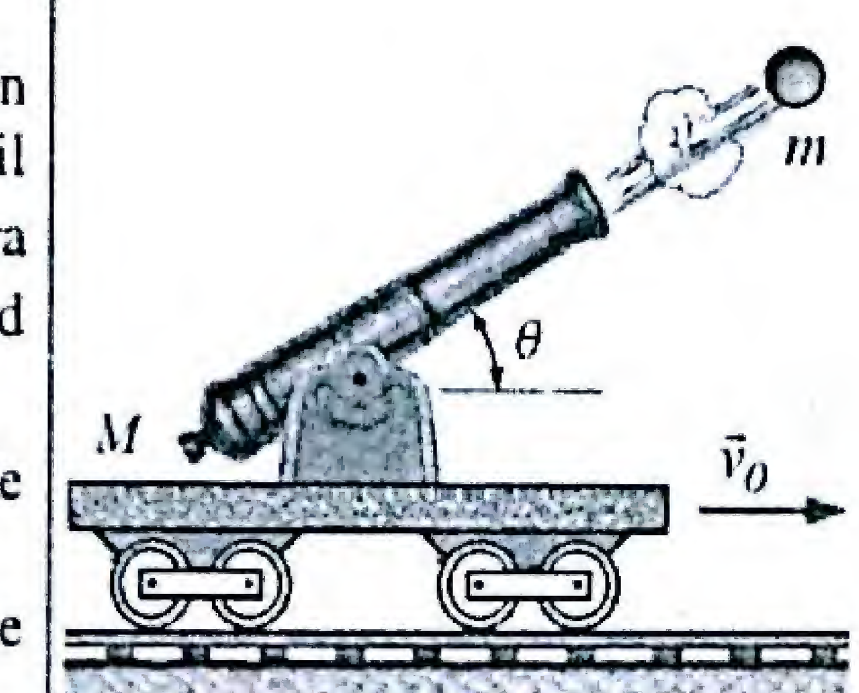
$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{MgL}{(M+m)sen2\theta}} = 4 \text{ m/s}}$$

PR-5.08. ***Al disparar, el cañón debe quedar quieto***

Un cañón de masa M se mueve sobre rieles sin fricción hacia la derecha, con una velocidad $\vec{v}_0$. Cuando el barril del cañón forma un ángulo θ con la horizontal, dispara hacia adelante un proyectil de masa m con una velocidad relativa al cañón, $\vec{v}_p$.

a) ¿Cuál será la velocidad del cañón justo después de disparar el proyectil?

b) ¿Cuál debe ser la velocidad $\vec{v}_0$ del cañón para que se detenga después del disparo?



Solución: En el marco de referencia del suelo, el momento lineal inicial es $(M+m)v_0$. Después del disparo, el cañón queda con una velocidad u y el proyectil con una velocidad horizontal $(u + v_p\cos\theta)$. En la dirección horizontal no hay fuerzas externas y se conserva el momento lineal en esa dirección:

$$(M+m)v_0 = Mu + m(u + v_p\cos\theta)$$

Despejando, obtenemos la velocidad del cañón:

$$u = \frac{(M+m)v_0 - mv_p\cos\theta}{M+m}$$

b) Para que se anule la velocidad del cañón $(u = 0)$, después del disparo se debe cumplir:

$$(M+m)v_0 = mv_p\cos\theta$$

La velocidad que debe llevar el cañón para que se detenga una vez que dispare es:

$$v_0 = \frac{mv_p\cos\theta}{M+m}$$

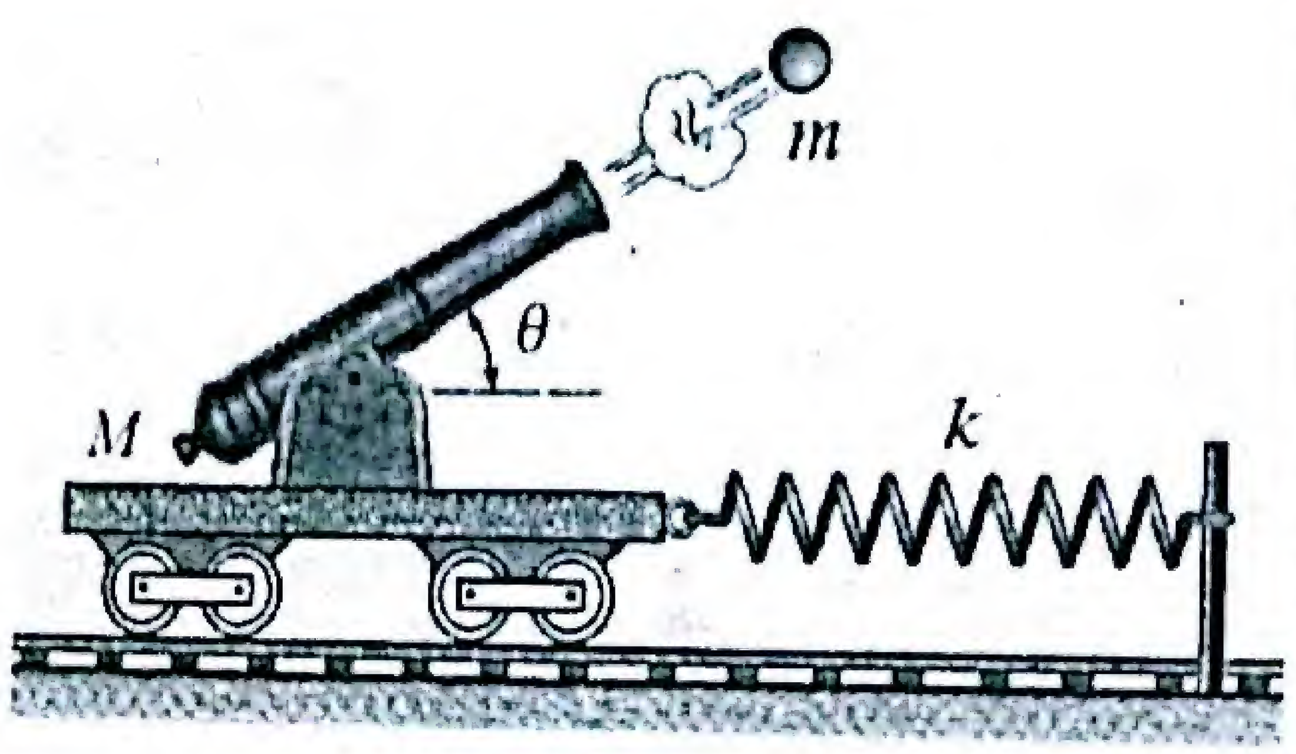
Respuesta

a) $u = \dfrac{(M+m)v_0 - mv_p\cos\theta}{M+m}$

b) $v_0 = \dfrac{mv_p\cos\theta}{M+m}$

PR-5.09. ***Un resorte para detener el retroceso del cañón***

Un cañón de masa M = 160 kg puede rodar sobre rieles sin fricción, pero está atado a un poste mediante un resorte de constante elástica k = 1000 N/m.



Si el cañón dispara un proyectil de masa m = 10 kg con una velocidad v = 80 m/s, formando un ángulo con la horizontal $\theta = 36{,}9°$.

a) Determine la velocidad de retroceso del cañón.

b) Halle la extensión máxima del resorte.

Solución: a) Inicialmente el momento lineal es nulo. En la dirección horizontal no hay fuerzas externas y se conserva el momento lineal en esa dirección.

$$0 = MV + mv\cos\theta$$

La velocidad de retroceso del cañón es:

$$V = -\frac{m}{M}v\cos\theta = -\frac{10\text{kg}}{160\text{kg}}(80\text{m/s})\cos 36{,}9° = -4{,}0\text{m/s}$$

b) Cuando el cañón se detiene, el resorte está estirado al máximo y toda su energía cinética se ha convertido en energía potencial del resorte:

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}MV^2$$

El estiramiento máximo del resorte es:

$$x = V\sqrt{\frac{M}{k}} = 4{,}0\text{m/s}\sqrt{\frac{160\text{kg}}{1000\text{N/m}}} = 1{,}6\text{m}$$

Respuesta

a) $V = -4{,}0$m/s

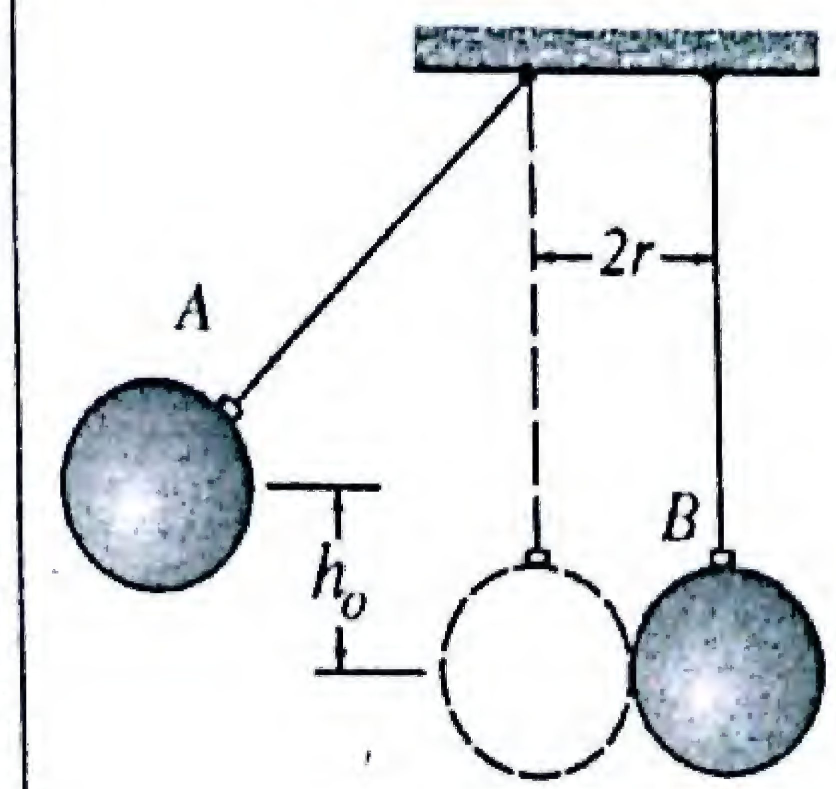
b) $x = 1{,}6$m

PR-5.10. ***Rebote inelástico en péndulo doble***

Dos esferas idénticas de masa m y radio r están suspendidas verticalmente mediante hilos, una al lado de la otra y apenas tocándose. La esfera A se separa y se suelta desde una altura h_0. Sabiendo que el coeficiente de restitución es e, ¿a qué altura subirá la esfera B después de la colisión?

Solución: La esfera A justo antes de chocar tiene una velocidad inicial v_0, dada por la conservación de la energía:

$$mgh_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 \qquad \Rightarrow \qquad v_0 = \sqrt{2gh_0}$$



El momento lineal se conserva en la colisión:

$$mv_0 = mv_A + mv_B$$

Siendo v_A y v_B, las velocidades de las pelotas después del choque. El choque es inelástico y las velocidades relativas están relacionadas por el coeficiente de restitución e:

$$e = -\frac{v_A - v_B}{v_0 - 0}$$

Combinando estas dos ecuaciones, se obtiene:

$$v_B = \left(\frac{1+e}{2}\right)v_0$$

Aplica la conservación de la energía a la pelota B:

$$mgh_B = \frac{1}{2}mv_B^2$$

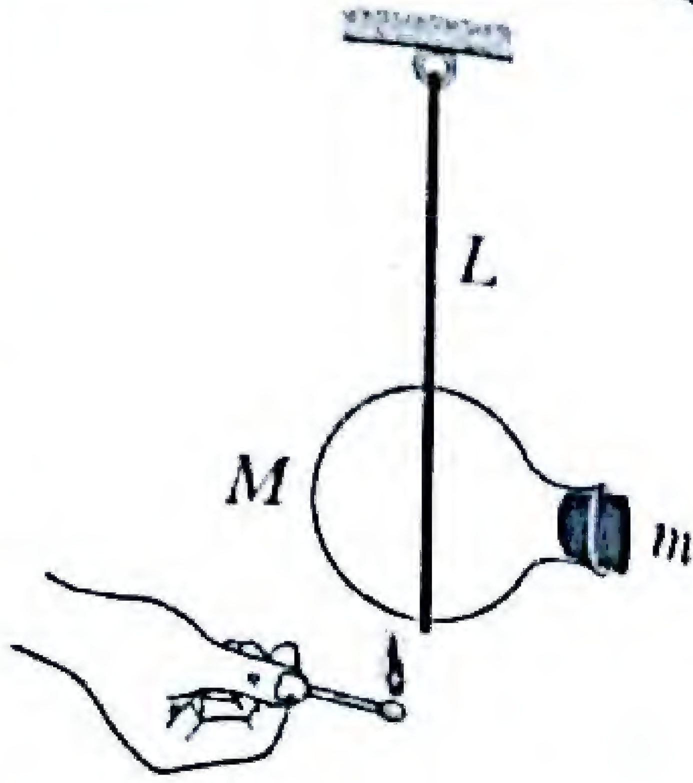
$$h_B = \frac{v_B^2}{2g} = \left(\frac{1+e}{2}\right)^2\frac{v_0^2}{2g} = \left(\frac{1+e}{2}\right)^2 h_0$$

Respuesta

$h_B = \left(\dfrac{1+e}{2}\right)^2 h_0$

PR-5.11. *Prohibido colocarse enfrente del tapón*

Un balón de vidrio de masa $M = 0{,}5$ kg está inicialmente suspendido verticalmente de un alambre delgado de longitud $L = 1$ m. El balón contiene aire comprimido y está sellado con un tapón de goma de masa $m = 0{,}01$kg. Cuando calentamos el aire del balón, el tapón sale disparado horizontalmente y el balón retrocede en sentido opuesto. Determine la mínima velocidad con que sale el tapón para que el balón dé la vuelta completa alrededor del punto de suspensión.



Solución: Consideramos que los objetos son cuerpos puntuales. Al salir disparado el tapón, el sistema balón-tapón conserva su cantidad de movimiento horizontal:

$$P_x = 0 = mv + MV \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m}{M}v \qquad (1)$$

La energía cinética del balón debe ser suficiente para que pueda ascender a la altura $2L$. Por conservación de la energía mecánica:

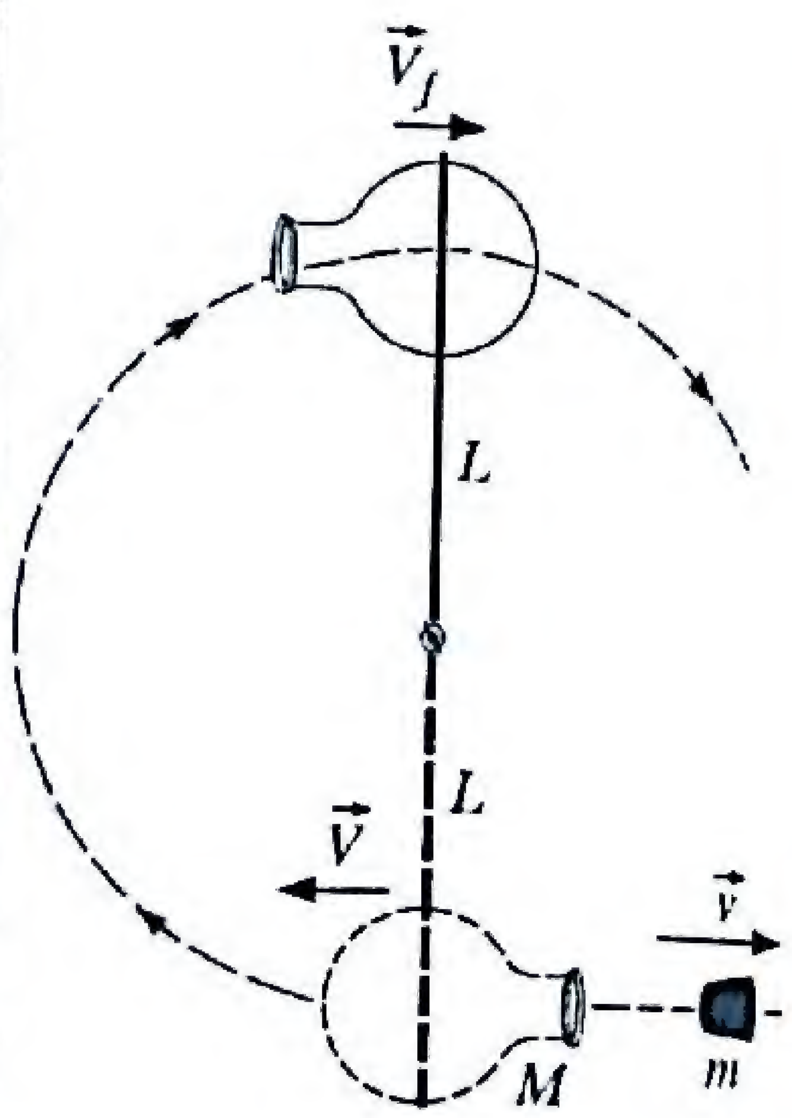
$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}MV_f^2 + Mg(2L) \qquad (2)$$

El valor crítico de la velocidad del balón, V_f, en el punto superior es tal que justo se anula la tensión de la cuerda ($T = 0$). Aplicando la segunda ley de Newton:

$$\sum F_r = Mg + T = M\frac{V_f^2}{L} \quad \Rightarrow \quad MV_f^2 = MgL \quad (3)$$

Sustituyendo las expresiones (1) y (3) en la ecuación (2), se obtiene la velocidad de salida del tapón:

$$v = \frac{M}{m}\sqrt{5gL} = \frac{0{,}5\text{kg}}{0{,}01\text{kg}}\sqrt{5(9{,}8\text{m/s}^2)(1\text{m})} = 350\text{m/s}$$



Respuesta

$$\boxed{v = \frac{M}{m}\sqrt{5gL} = 350 \text{ m/s}}$$

PR-5.12. *Levantando una cadena del suelo*

Una cadena flexible y uniforme, de longitud L y masa m está suspendida verticalmente tocando apenas el suelo.

a) Si se libera desde el reposo, determine la fuerza que ejerce la cadena sobre el suelo, en términos del peso de la cadena que ya se encuentra en el suelo.

b) Halle la fuerza para levantar la cadena a velocidad constante v en términos del peso de la parte suspendida en ese momento.

Solución: Supongamos que un instante dado ha caído sobre el suelo un trozo de cadena de longitud x. La fuerza que ejerce la cadena sobre el suelo es la suma del peso de la cadena que descansa sobre el suelo, $F_1 = (x/L)mg$, mas la fuerza del eslabón que queda en reposo al entrar en contacto con el suelo, $F_2 = \Delta p/\Delta t$:

$$F_s = F_1 + F_2 = (\frac{x}{L})mg + \frac{dp}{dt}$$

Un eslabón de longitud infinitesimal dx tiene masa: $dm = (m/L)dx$ y golpea el suelo con una velocidad v ejerciendo una fuerza:

$$F_2 = \frac{dp}{dt} = v\frac{dm}{dt} = v\frac{(m/L)dx}{dt} = (\frac{m}{L})v^2$$

La velocidad v de este segmento que ha caído en una altura x con aceleración g está dada por: $v^2 = 2gx$, sustituyendo:

$$F_2 = (\frac{m}{L})2gx$$

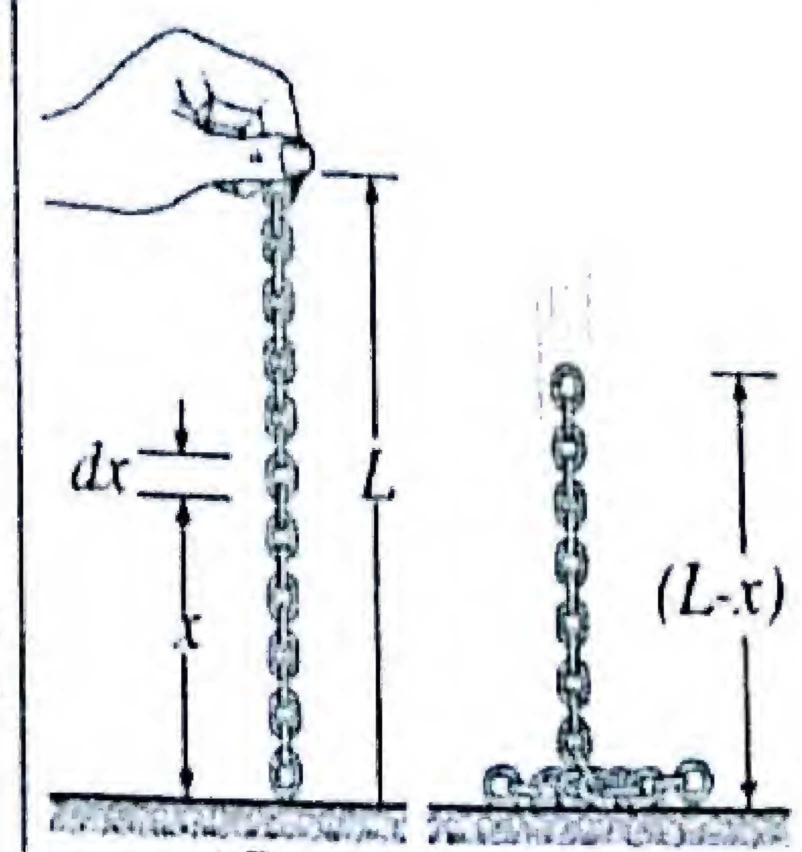
Por lo tanto, la fuerza total ejercida sobre el suelo es tres veces el peso del pedazo de cadena que descansa en ese instante:

$$F_s = (\frac{x}{L})mg + (\frac{x}{L})2mg = 3(\frac{x}{L})mg$$

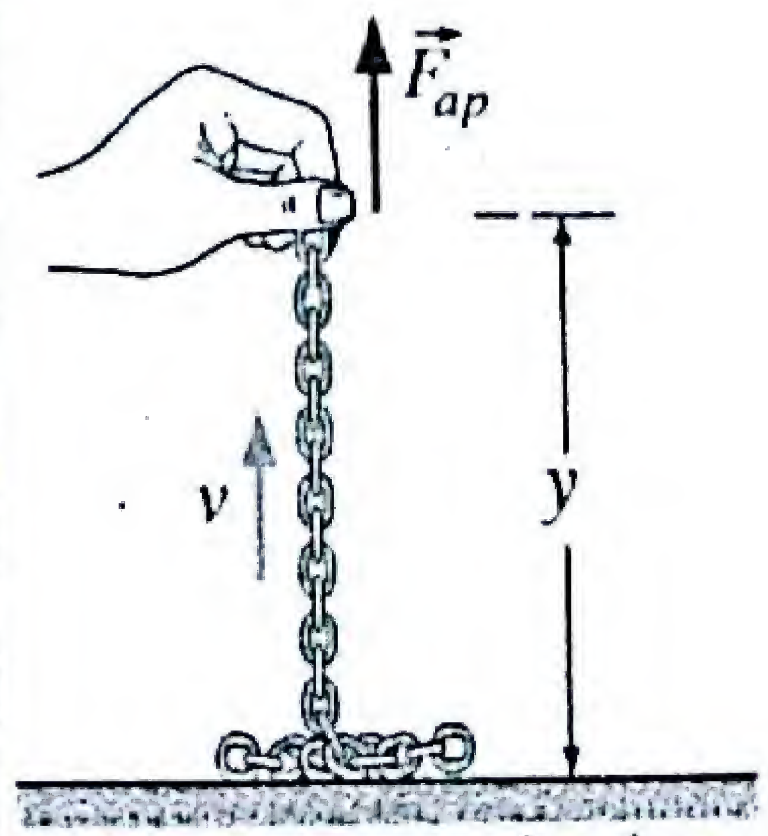
b) La fuerza para levantar la cadena, $\bar{F}_{ap}$, es la suma del peso del segmento de cadena suspendida, $(y/L)mg$, mas la fuerza impartida al eslabón recogido para darle una velocidad v:

$$F_{ap} = (\frac{y}{L})mg + \frac{\Delta p}{\Delta t} = (\frac{y}{L})mg + v\frac{\Delta m}{\Delta t}$$

$$F_{ap} = (\frac{y}{L})mg + v\frac{(m/L)\Delta y}{\Delta t} = (\frac{m}{L})(gy + v^2)$$



a) Fuerza sobre el suelo



b) Fuerza para recoger la cadena

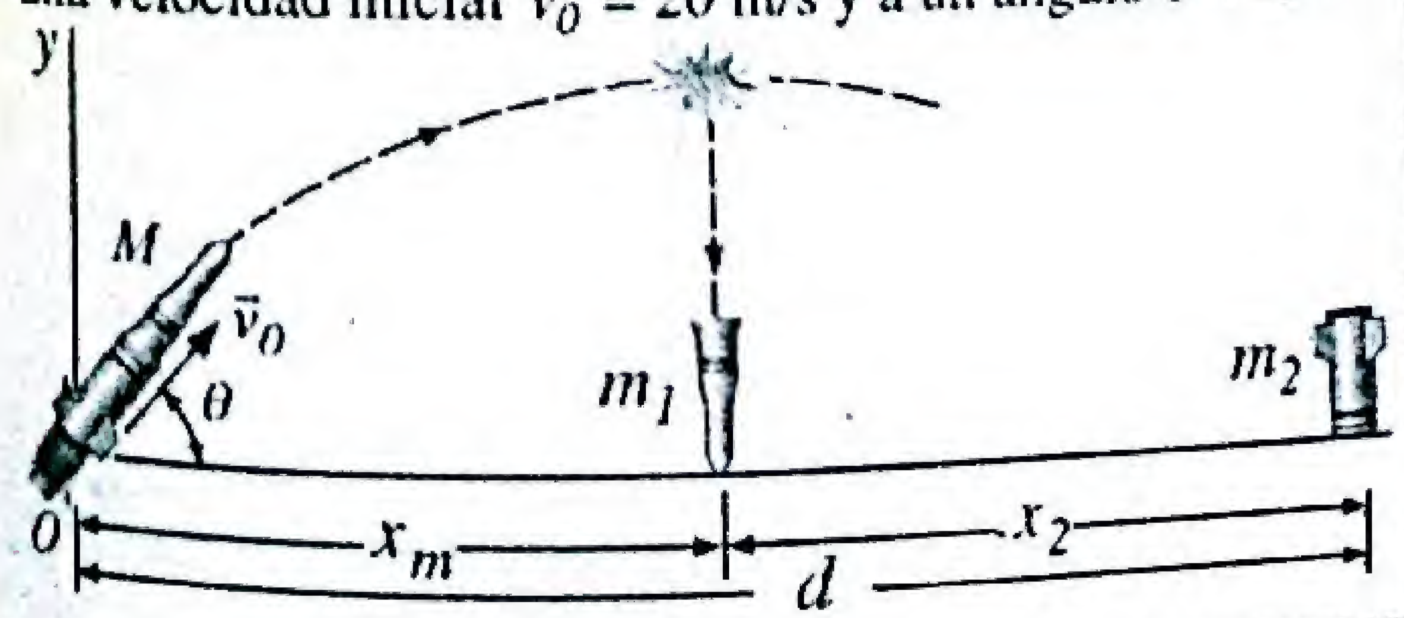
Respuesta:

a) $F_s = 3(\frac{x}{L})mg$

b) $F_{ap} = (\frac{m}{L})(gy + v^2)$

PR-5.13. *¿Dónde caería el otro fragmento del misil?*

En un terreno plano, un misil es lanzado al enemigo con una velocidad inicial $v_0 = 20$ m/s y a un ángulo $\theta = 45°$.



Cuando el misil va por el punto mas alto de su trayectoria, explota en dos fragmentos de igual masa, $m_1 = m_2$. Si el fragmento m_1 cae a tierra verticalmente, ¿dónde caería el fragmento m_2?

Solución: En el punto mas alto de la trayectoria parabólica la velocidad vertical es cero. De modo que la explosión ocurre al cabo de un tiempo t_m dado por:

$$v_y = v_{0y} - gt \quad \Rightarrow \quad t_m = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 sen\theta}{g}$$

La distancia horizontal, x_m, se recorre a velocidad constante:

$$x_m = v_{0x}t_m = (v_0 cos\theta)(v_0 sen\theta / g) = v_0^2 sen\theta cos\theta / g$$

Justo antes de la explosión, el misil estaba moviéndose horizontalmente, y tenía una cantidad de movimiento:

$$p_0 = Mv_{0x} = Mv_0 cos\theta$$

El momento lineal horizontal se conserva y como el fragmento m_1 queda con cero velocidad, todo el momento p_0 va al fragmento m_2:

$$p_2 = p_0: \quad (\frac{1}{2}M)v_{2x} = Mv_0 cos\theta \quad \Rightarrow \quad v_{2x} = 2v_0 cos\theta$$

Después de la explosión la velocidad vertical de ambos fragmentos es cero y por lo tanto, chocarán contra el suelo simultáneamente, en un tiempo t_m. En ese tiempo, el segundo fragmento se ha movido una distancia horizontal:

$$x_2 = v_{2x}t_m = (2v_0 cos\theta)(v_0 sen\theta / g) = 2v_0^2 cos\theta sen\theta / g$$

La distancia total recorrida por el segundo fragmento desde el sitio inicial de lanzamiento es $d = x_m + x_2$:

$$d = \frac{v_0^2 cos\theta sen\theta}{g} + \frac{2v_0^2 cos\theta sen\theta}{g} = \frac{3}{2}\frac{v_0^2 sen2\theta}{g} = 61{,}2\text{m}$$

Respuesta:

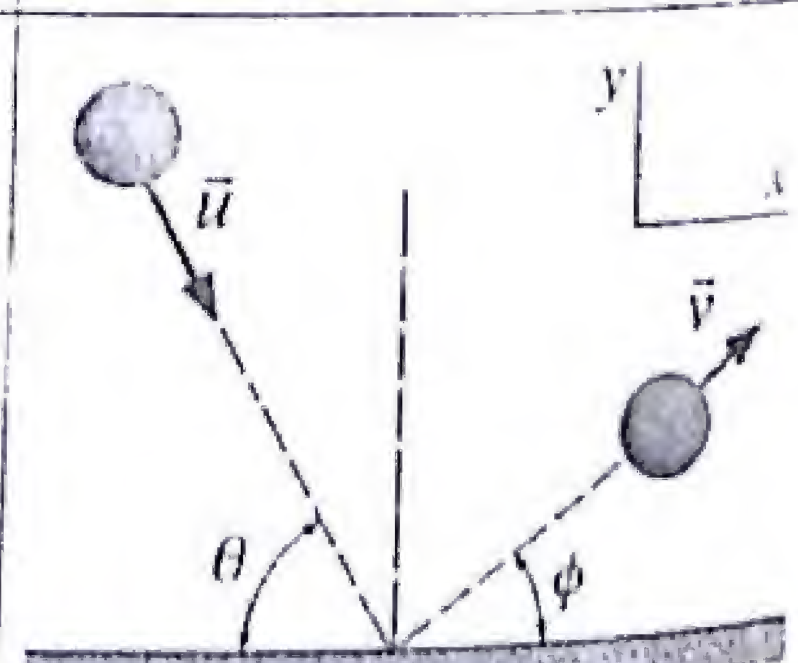
$\boxed{d = 61{,}2\ \text{m}}$

PR-5.14. *Rebote oblicuo inelástico de una pelota*

Una pelota que lleva una velocidad $\vec{u}$, choca con un piso liso formando un ángulo θ y rebota formando un ángulo ϕ, como se muestra en la figura. El coeficiente de restitución entre la pelota y el piso es e.

a) Determine la velocidad $\vec{v}$ de la pelota después del impacto.

b) Verifique que: si $e = 1$, entonces $v = u$ y $\phi = \theta$.



Solución: Como el piso no ofrece fricción la componente paralela del momento lineal se conserva en la colisión:

$$p_x = mu cos\theta = mv cos\phi \qquad (1)$$

Como el choque es inelástico con un coeficiente de restitución e, la velocidad relativa de alejamiento en dirección normal en el punto de contacto es e veces la velocidad relativa de acercamiento en esa dirección:

$$e = \frac{v_y}{u_y} = \frac{usen\phi}{vsen\theta} \quad \Rightarrow \quad e(usen\theta) = vsen\phi \quad (2)$$

Combinando las expresiones (1) y (2) se obtiene el módulo y la dirección de la velocidad de rebote:

$$v = u\sqrt{e^2 sen^2\theta + cos^2\theta}$$

$$tg\phi = e(tg\theta)$$

b) Si la colisión es perfectamente elástica, el coeficiente de restitución es la unidad, y entonces las velocidades tienen igual magnitud y forman igual ángulo con el piso:

$$e = 1 \quad \Rightarrow \quad v = u \ \ y \ \ \phi = \theta$$

Respuesta

a) $v = u\sqrt{e^2 sen^2\theta + cos^2\theta}$
$tg\phi = e(tg\theta)$
b) Choque elástico $e = 1$, entonces $v = u$ y $\phi = \theta$

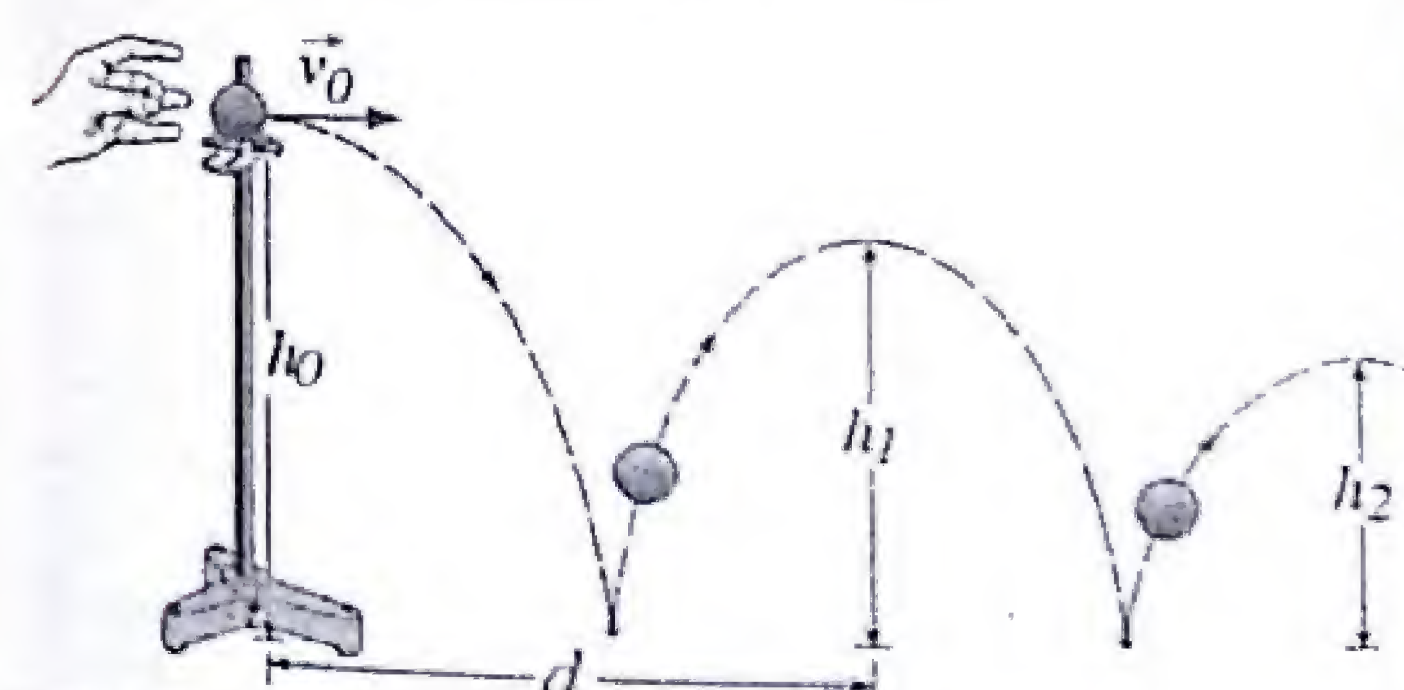
PR-5.15. *Cómo medir el coeficiente de restitución*

Una pelota de golf es lanzada horizontalmente con una velocidad v_0 desde una altura $h_0 = 1$ m.

La pelota rebota del piso hasta una altura $h_1 = 0{,}64$ m . Determine:

a) El coeficiente de restitución ε.

b) La altura máxima alcanzada, h_2, después del segundo rebote.



Solución: a) Cuando la pelota golpea la superficie lisa del piso, por ser el choque inelástico su velocidad en dirección vertical disminuye pero su velocidad en la dirección horizontal, no cambia ($v_x = v_0$). El tiempo de caída desde la altura h_0 es:

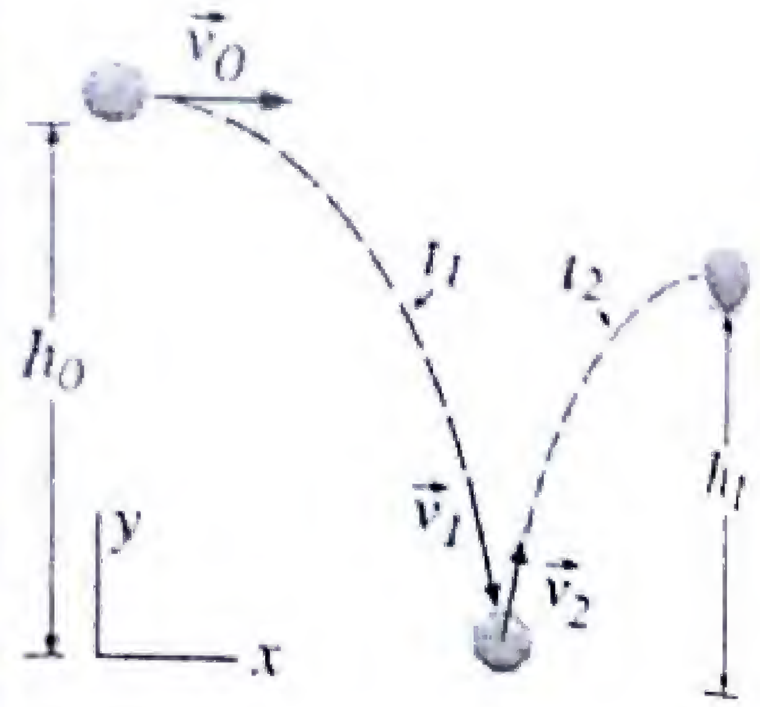
$$h_0 = \frac{1}{2} g t_1^2 \qquad \Rightarrow \qquad t_1 = \sqrt{2h_0 / g}$$

La componente vertical de la velocidad justo antes del choque es:

$$v_{1y} = 0 + g t_1 = g\sqrt{2h_0 / g} = \sqrt{2gh_0}$$

Después del choque la pelota alcanza la altura máxima h_1, en un tiempo dado por:

$$h_1 = \frac{1}{2} g t_2^2 \qquad \Rightarrow \qquad t_2 = \sqrt{2h_1 / g}$$



La componente vertical de la velocidad justo después del primer choque está dada por:

$$0 = v_{2y} - g t_2 \qquad \Rightarrow \qquad v_{2y} = g t_2 = \sqrt{2gh_1}$$

Ambas velocidades son, con respecto el piso que está fijo. Por lo tanto, el coeficiente de restitución es:

$$\varepsilon = \left|\frac{v_{2y}}{v_{1y}}\right| = \frac{\sqrt{2gh_1}}{\sqrt{2gh_0}} = \sqrt{\frac{h_1}{h_0}} = \sqrt{\frac{0{,}64}{1{,}0}} = 0{,}8$$

b) Si el coeficiente de restitución se mantiene en todos los rebotes, entonces:

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}} = \sqrt{\frac{h_1}{h_0}}$$

La altura que alcanza después del segundo rebote es:

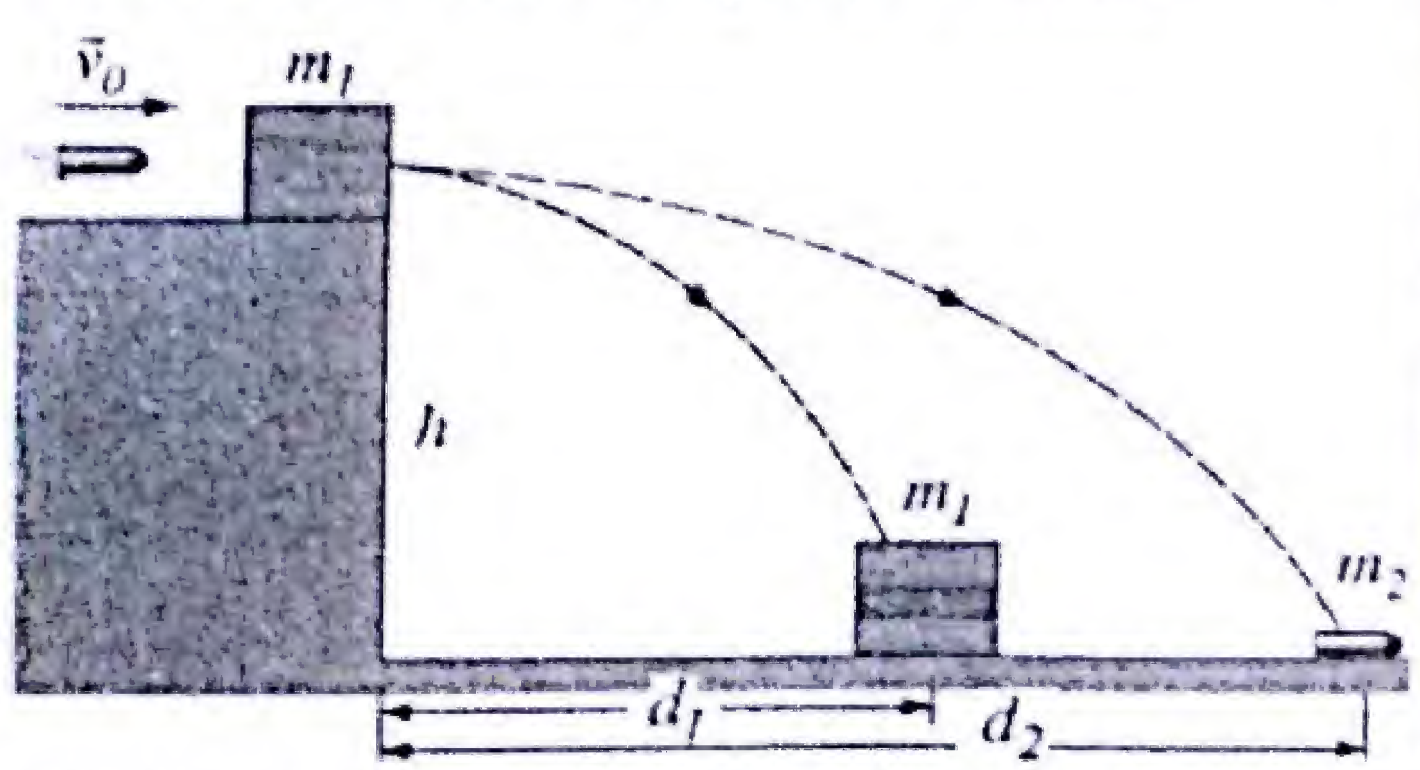
$$h_2 = \frac{h_1^2}{h_0} = \frac{(0{,}64\text{m})^2}{1\text{m}} = 0{,}41\text{m}$$

Respuesta

a) $\varepsilon = \sqrt{h_1 / h_0} = 0{,}8$
b) $h_2 = 0{,}41\text{m}$

PR-5.16. *¿Dónde caerá la bala?*

Un bloque de masa m_1 = 0,2 kg, está en reposo a una altura h = 4,9 m sobre una superficie horizontal.



Se dispara sobre el bloque una bala de masa m_2 = 0,01 kg, que viaja inicialmente con una velocidad horizontal, $\vec{v}_0$ = 500 m/s. La bala al chocar con el bloque, lo atraviesa y se observa que, después del impacto, el bloque cae a una distancia horizontal d_1 = 20 m. ¿Dónde caerá la bala?

Solución: El tiempo de caída es el mismo para el bloque y la bala:

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \qquad \Rightarrow \qquad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 1\text{ s}$$

La velocidad horizontal del bloque después del choque no cambia:

$$v_1 = \frac{d_1}{t} = 20\text{ m/s}$$

En el choque, se conserva la componente horizontal del momento lineal:

$$m_2 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

Despejando se obtiene la velocidad de la bala:

$$v_2 = v_0 - \left(\frac{m_1}{m_2}\right) v_1 = 500\text{m/s} - \left(\frac{0{,}20}{0{,}01}\right) 20\text{m/s} = 100\text{m/s}$$

Por lo tanto, la bala cae a una distancia:

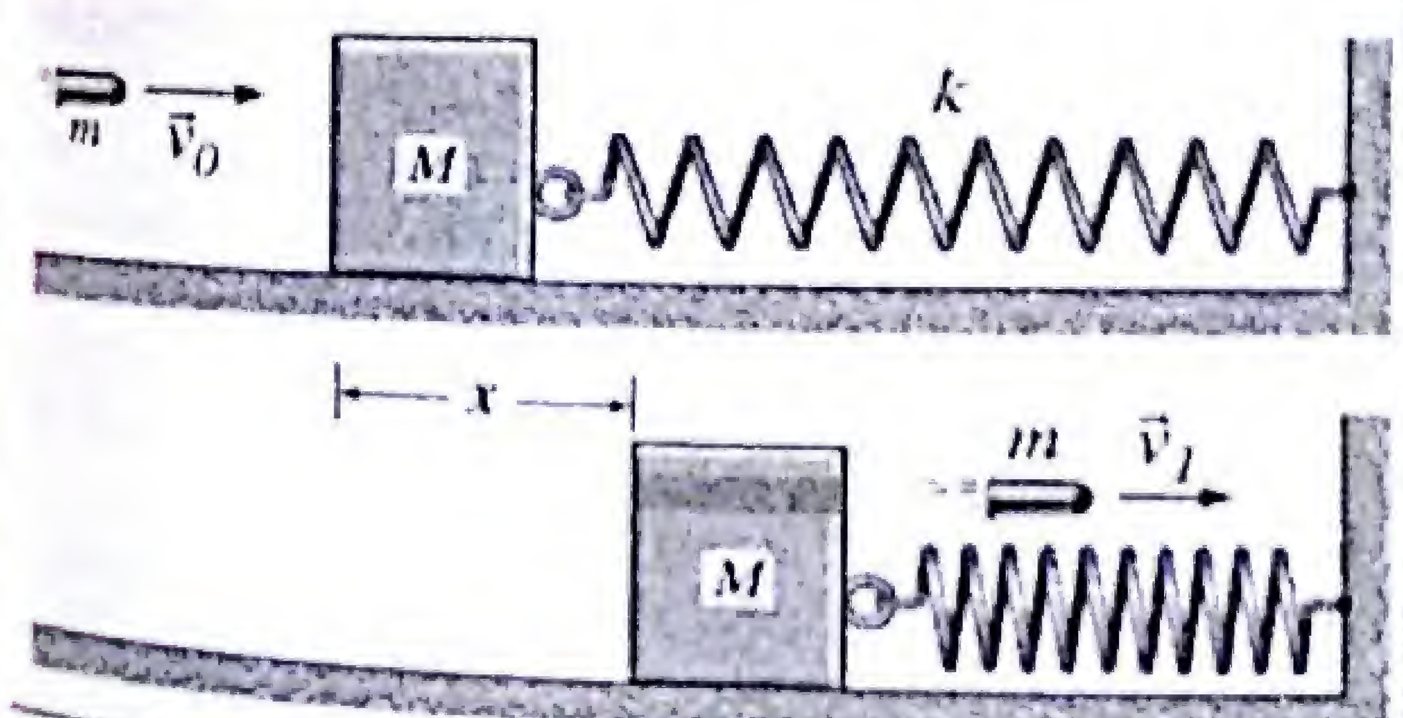
$$d_2 = v_2 t = (100\text{m/s})(1\text{s}) = 100\text{m}$$

Respuesta

$d_2 = 100\text{m}$

PR-5.17. *Bloque atravesado por una bala*

El bloque de masa M = 1 kg está conectado a un resorte de constante elástica k = 400 N/m, en una mesa horizontal lisa.



Una bala de masa m = 10 g que es lanzada con una velocidad v_o = 300 m/s, choca contra el bloque y lo atraviesa. Después del impacto el resorte se comprime una distancia x = 10 cm. Determine:

a) La velocidad de la bala después de atravesar el bloque.
b) La energía perdida en la colisión con el bloque.

Solución: a) Suponemos que durante el choque el resorte no dispone de tiempo suficiente para comprimirse y se conserva el momento lineal del sistema bala-bloque:

$$\sum p_x: \quad m v_0 = m v_1 + M v_2 \qquad (1)$$

Donde v_1 y v_2 son las velocidades de la bala y del bloque, inmediatamente después del choque. Una vez que la bala abandona el bloque, no actúan fuerzas no-conservativas y se conserva la energía mecánica del sistema bloque-resorte:

$$(K+U)_{ini} = (K+U)_{fin} \Rightarrow \quad \frac{1}{2}Mv_2^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (2)$$

Despejando: $\quad v_2 = x\sqrt{\frac{k}{M}} = (0{,}1\text{m})\sqrt{\frac{400\text{N/m}}{1\text{kg}}} = 2\text{m/s}$

Sustituyendo la velocidad del bloque en la ecuación (1):

$$v_1 = v_0 - (\frac{M}{m})v_2 = 300\text{m/s} - (\frac{1\text{kg}}{0{,}01\text{kg}})2\text{m/s} = 100\text{m/s}$$

b) La energía, ΔE, perdida en la colisión es la diferencia entre la energía cinética inicial de la bala y la suma de su energía cinética final y la impartida al bloque:

$$\Delta E = \frac{1}{2}mv_0^2 - [\frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mv_2^2]$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}(0{,}01)(300)^2 - [\frac{1}{2}(0{,}01)(100)^2 + \frac{1}{2}(1)(2)^2] = 398\text{J}$$

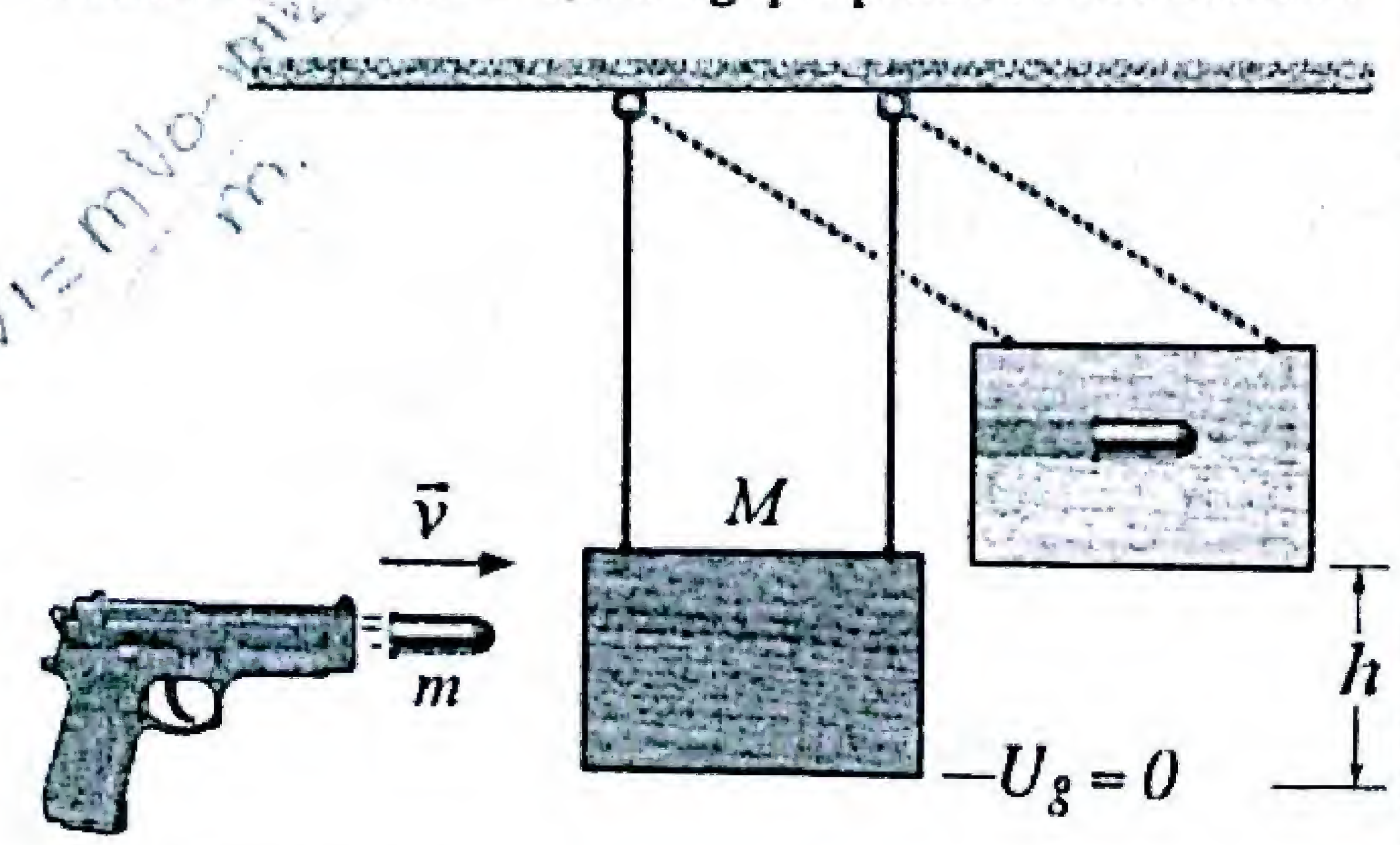
Respuesta:

a) v_1=100 m/s, v_2 = 2 m/s
b) ΔE = 398 J

PR-5.18. *El péndulo balístico*

Una bala de masa m = 0,005 kg incide sobre un bloque de madera de masa M = 1,995 kg que pende de dos cuerdas.

$V_1 = \frac{mV_0 - mV_2}{m}$



La bala se incrusta en el bloque y se observa que el conjunto sube hasta una altura h = 0,0287 m. Determine:
a) La velocidad inicial de la bala.
b) La fracción de la energía cinética inicial que se pierde por calentamiento y deformación de la bala y la madera.

Solución: El tiempo Δt que dura la colisión es tan pequeño que las fuerzas externas, la gravedad mg y la tensión T de la cuerda, no modifican el momento lineal horizontal durante el choque. Aplicando la ley de conservación del momento en dirección horizontal, $\vec{p}_x$:

$$\sum(p_x)_{antes} = \sum(p_x)_{después} \quad \Rightarrow \quad mv = (m+M)V$$

La velocidad inicial con que sale el sistema bala + bloque es:

$$V = (\frac{m}{m+M})v$$

Después de la colisión, actúan solo fuerzas conservativas y el sistema se eleva hasta una altura h, conservándose en el proceso la energía mecánica, $(K+U)_{ini} = (K+U)_{fin}$:

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2 + 0 = 0 + (m+M)gh$$

Por lo tanto, la velocidad de disparo de la bala es:

$$v = (\frac{m+M}{m})\sqrt{2gh} = 300 \text{ m/s}$$

La fracción de la energía cinética inicial que se pierde, es:

$$\frac{\Delta K}{K_o} = \frac{\frac{1}{2}(m+M)V^2 - \frac{1}{2}mv^2}{\frac{1}{2}mv^2} = (\frac{m+M}{m})(\frac{V}{v})^2 - 1$$

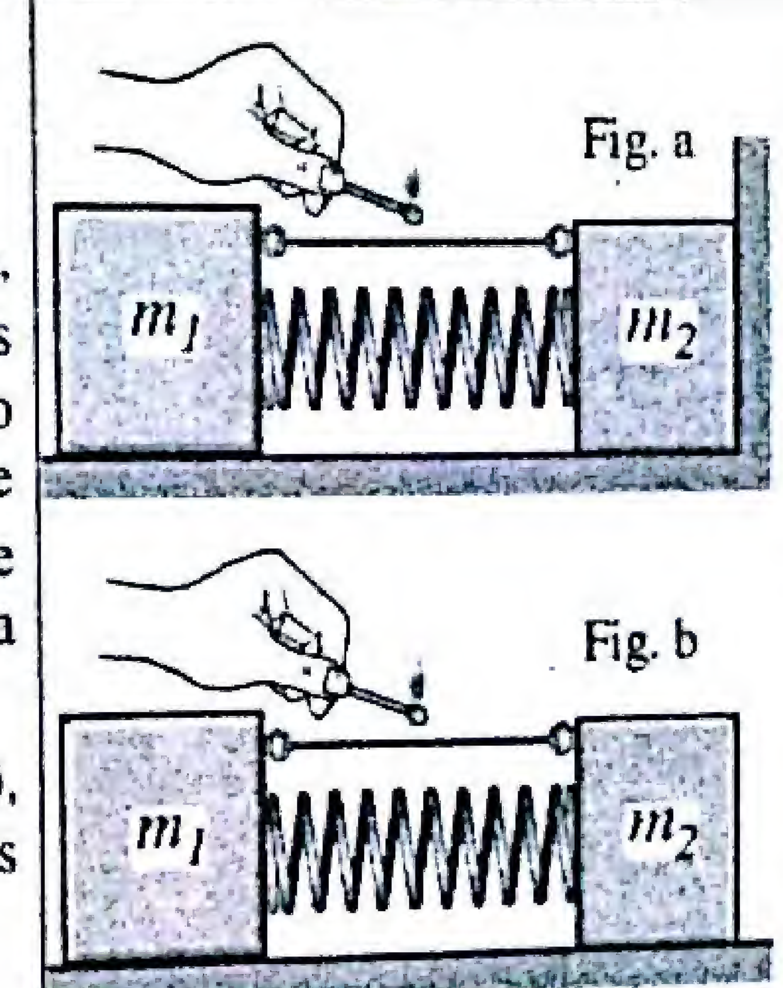
$$\frac{\Delta K}{K_o} = -(\frac{M}{m+M}) = -0{,}998$$

Respuesta:

a) v = 300 m/s
b) $|\frac{\Delta K}{K_o}|$ = 99,8%

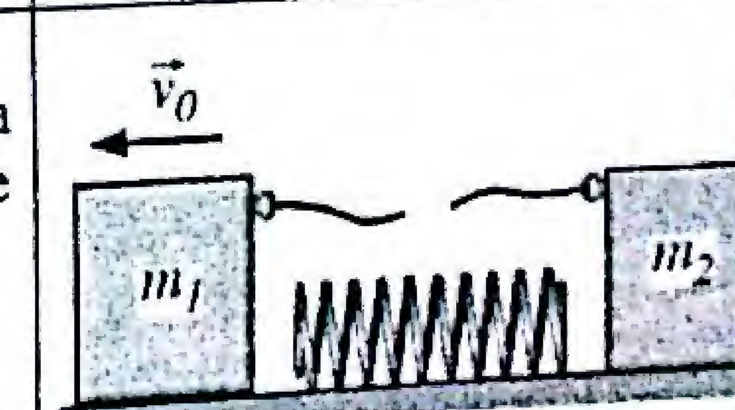
PR-5.19. *¿Qué sucederá al romperse el hilo?*

Dos bloques, de masas respectivas, m_1 = 3 kg y m_2 = 1 kg, se encuentran sobre una mesa sin fricción, unidos mediante un hilo y entre ellos hay un resorte ligero sometido a compresión. Cuando el bloque m_2 se mantiene fijo y luego se rompe el hilo, el resorte se expande y se observa que el bloque m_1 sale con una velocidad v_0 = 4 m/s (Fig. a).
Si ahora, *ambos* bloques son libres de moverse (Fig. b), determine las velocidades que adquieren los dos bloques al liberarse el resorte.



Solución:. En la primera situación, cuando se bloquea m_2, la energía elástica almacenada en el resorte se transforma en energía cinética de m_1:

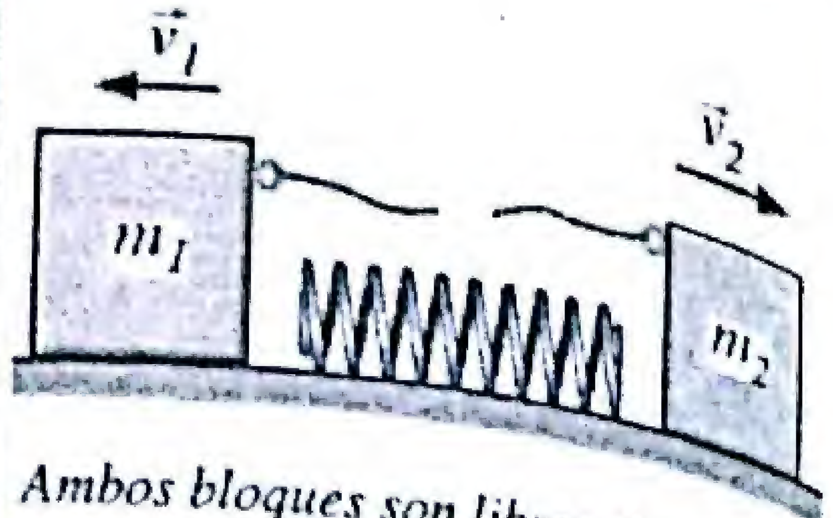
$$U_e = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m_1v_0^2 \quad (1)$$



El bloque m_2 está fijo

En la segunda situación, cuando ambos bloques son libres de moverse, saldrán en sentidos opuestos, y se conserva el momento lineal inicial, que era nula:

$$p_{ini} = p_{fin} \quad \Rightarrow \quad 0 = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = -(\frac{m_2}{m_1})v_2$$



Ambos bloques son libres de moverse

La energía elástica almacenada en el resorte se transforma en energía cinética de ambos bloques:

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

Reemplazando la energía elástica dada por la relación (1) en términos de v_0:

$$m_1 v_0^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2$$

Combinando esta relación con la expresión de v_1, se obtiene:

$$v_2 = v_0 \sqrt{\frac{m_1^2}{m_2(m_1+m_2)}} = (4\text{m/s})\sqrt{\frac{(3\text{kg})^2}{1\text{kg}(3\text{kg}+1\text{kg})}} = 6\text{m/s}$$

$$v_1 = -v_0 \sqrt{\frac{m_2}{m_1+m_2}} = (4\text{m/s})\sqrt{\frac{1\text{kg}}{3\text{kg}+1\text{kg}}} = -2\text{m/s}$$

Respuesta:

$$\boxed{v_1 = -v_0 \sqrt{\frac{m_2}{m_1+m_2}} = -2\text{m/s} \qquad v_2 = v_0 \sqrt{\frac{m_1^2}{m_2(m_1+m_2)}} = 6\text{m/s}}$$

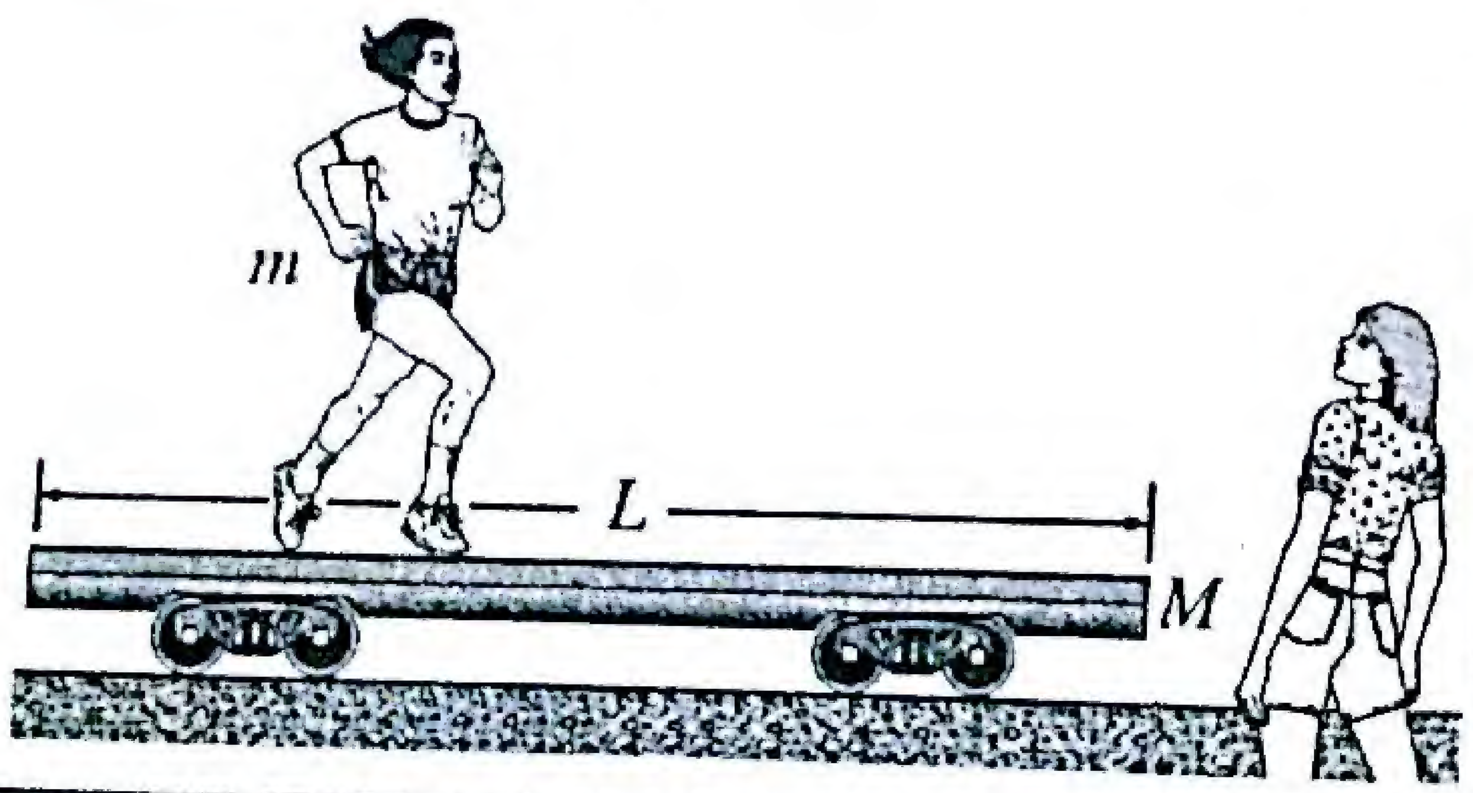
PR-5.20. *Corriendo sobre un vagón móvil*

Una estudiante de masa m = 50 kg está sobre la plataforma de un vagón de longitud L = 12 metros y masa M = 100 kg. La plataforma puede deslizar sobre rieles sin fricción.

La estudiante va de un extremo a otro de la plataforma con una velocidad con respecto a la plataforma, $v_{e/p}$ = 3 m/s.

a) Determine el desplazamiento de la estudiante y de la plataforma con respecto al suelo.

b) Si la estudiante se detiene al llegar al extremo derecho de la plataforma, ¿con qué velocidad quedará la plataforma?



Solución: a) La velocidad de la estudiante relativa al suelo, v_e, es igual a su velocidad relativa a la plataforma, $v_{e/p}$, más la velocidad de la plataforma relativa al suelo, v_p:

$$v_e = v_{e/p} + v_p \qquad (1)$$

Por conservación del momento lineal:

$$\sum p_x : \quad 0 = mv_e + Mv_p \qquad (2)$$

Combinando las ecuaciones (1) y (2) obtenemos v_p:

$$v_p = -\frac{m}{M+m}v_{ep} = -\frac{50\text{kg}}{100\text{kg}+50\text{kg}}3\text{m/s} = -1\text{m/s}$$

El signo (-) significa que la plataforma se mueve hacia atrás. La velocidad de la estudiante es:

$$v_e = v_{e/p} + v_p = (3\text{m/s}) + (-1\text{m/s}) = +2\text{m/s}$$

El tiempo que tarda ella en recorrer la longitud L de la plataforma es:

$$t = \frac{L}{v_{e/p}} = \frac{12\text{m}}{3\text{m/s}} = 4\text{s}$$

En ese tiempo ella se habrá desplazado respecto al suelo una distancia: $d_e = v_e t = (2\text{m/s})(4\text{s}) = +8\text{m}$

La plataforma se habrá desplazado respecto al suelo una distancia:

$$d_p = v_p t = (-1\text{m/s})(4\text{s}) = -4\text{m}$$

b) Si $v_{e/p} = 0$, entonces $v_e = v_p$, y por conservación de $\vec{p}$:

$$0 = mv_e + Mv_p = (m+M)v_p$$

Por lo tanto: $v_p = v_e = 0$.

Respuesta:

a) $d_e = +8\text{m}$, $d_p = -4\text{m}$
b) v_p = cero

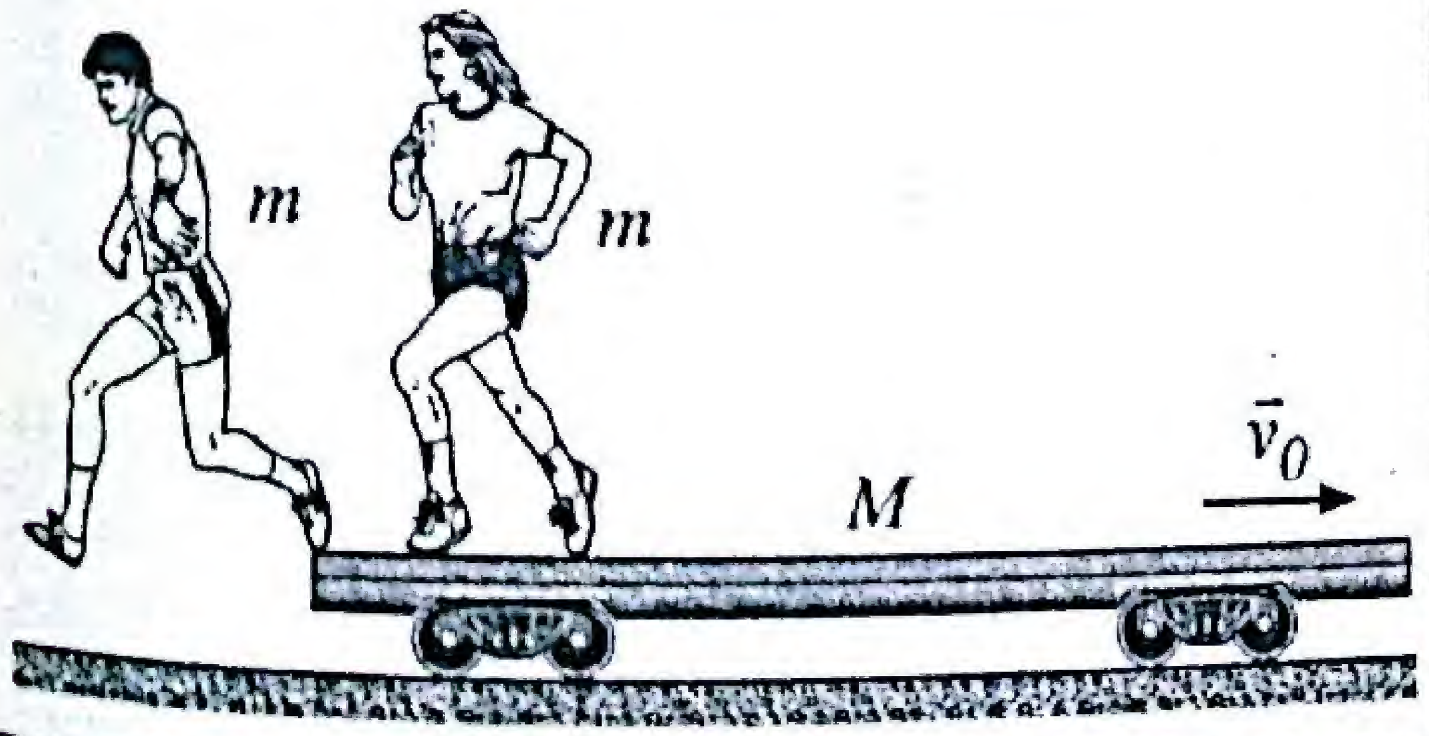
PR-5.21. *¿Cómo adquiere más velocidad el vagón?*

Un vagón de masa M = 100 kg se mueve sobre rieles sin fricción hacia la derecha, con una velocidad $\vec{v}_0$ = 5 m/s. Sobre su superficie hay dos personas de igual masa, m = 50 kg, que saltan fuera del vagón hacia atrás.

a) Si las dos personas saltan simultáneamente con velocidad $\vec{u}$ = 4 m/s relativa al vagón, cuál será la velocidad final del vagón?

b) Si primero salta una persona y luego salta la otra, con igual velocidad, $\vec{u}$ = 4 m/s relativa al vagón, cuál será la velocidad final del vagón?

c) ¿Será la velocidad del vagón en el caso (b) mayor, igual o menor que en el caso (a)?



Solución: a) En el caso en que las personas saltan simultáneamente, el vagón adquiere una velocidad V y cada persona tendrá una velocidad con respecto a Tierra: $(-u + V)$. El momento lineal en dirección horizontal se conserva:

$$(M + 2m)v_0 = MV + 2m(V - u)$$

La velocidad final del vagón es:

$$V = v_0 + \frac{2mu}{M + 2m} = 5\text{m/s} + \frac{2(50\text{kg})4\text{m/s}}{100\text{kg} + 2(50\text{kg})} = 7 \text{ m/s}$$

b) Cuando salta la primera persona, la conservación del momento se escribe:

$$(M + 2m)v_0 = (M + m)V' + m(V' - u) \qquad (1)$$

Donde V' es la velocidad del vagón. Cuando salta la segunda persona:

$$(M + m)V' = MV'' + m(V'' - u) \qquad (2)$$

Despejando V' de la ecuación (1) y sustituyéndola en la ecuación (2) obtenemos la velocidad final del vagón:

$$V'' = v_0 + \frac{mu}{M + 2m} + \frac{mu}{M + m}$$

$$V'' = 5\text{m/s} + \frac{(50\text{kg})4\text{m/s}}{100\text{kg} + 2(50\text{kg})} + \frac{(50\text{kg})4\text{m/s}}{100\text{kg} + 50\text{kg}} = 7{,}33\text{m/s}$$

c) Vemos que la velocidad del vagón resulta mayor en el caso en que primero salta una persona y después la otra.

Respuesta:

a) $V = 7{,}0$ m/s
b) $V'' = 7{,}33$ m/s
c) Mayor en el caso (b)

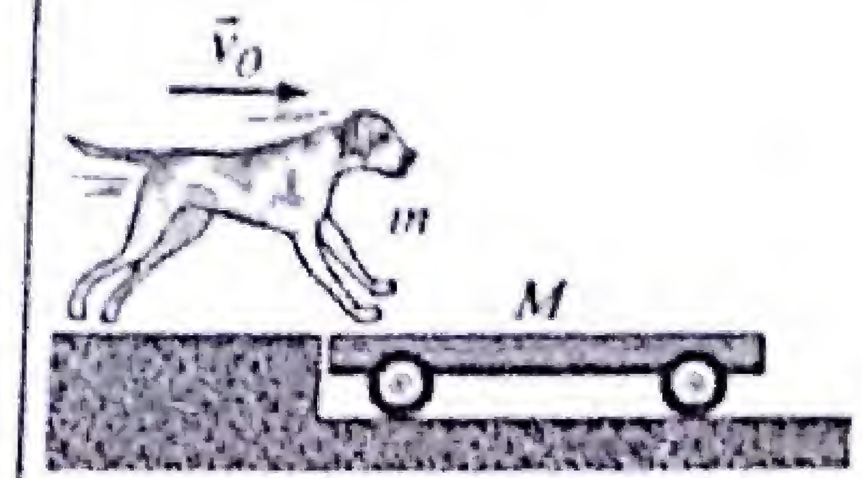
PR-5.22. *El perro salta y resbala sobre el carrito.*

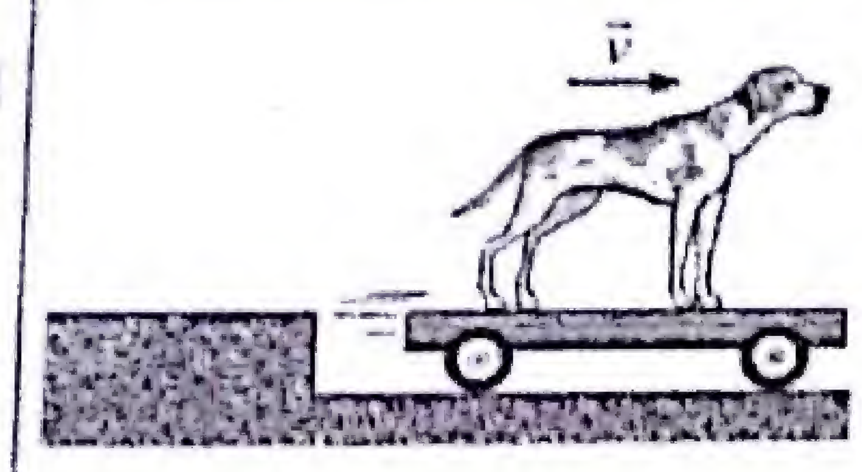
Un perro de masa $m = 20$ kg va a una velocidad $v_o = 3$ m/s y salta sobre un carrito de masa $M = 40$ kg que está en reposo. Al comienzo el perro resbala sobre la superficie del carrito y finalmente logra detenerse en relación a éste. El coeficiente de fricción cinética entre el perro y la superficie del carrito es $\mu = 0.5$ y se desprecia la fricción entre el carrito y el suelo.

a) Determine la velocidad común del carrito y el perro cuando éste cesa de deslizar.
b) Halle la fuerza de fricción ejercida sobre el perro.
c) ¿Durante cuanto tiempo desliza el perro?
d) ¿Cuál es el desplazamiento, d_p, del perro en relación al suelo mientras desliza sobre el carrito.
e) ¿Cuál es el desplazamiento, d_c, del carrito en relación al suelo mientras el perro desliza?
f) Calcule el trabajo, W_p, hecho por el carrito sobre el perro.
g) Calcule el trabajo, W_c, hecho por el perro sobre el carrito.
h) ¿Por qué W_c difiere de W_p?

Solución: a) La velocidad común se halla por conservación del momento lineal, $mv_0 = (M + m)v$:

$$v = (\frac{m}{M + m})v_0 = (\frac{20\text{kg}}{40\text{kg} + 20\text{kg}})3\text{m/s} = 1\text{m/s}$$





b) La fuerza de fricción cinética ejercida sobre el perro es:

$$F_c = \mu_c N = \mu_c mg = (0{,}5)(20\text{kg})(9{,}8\text{m/s}^2) = 98\text{N}$$

c) El impulso impartido al perro por la fricción durante el tiempo Δt es:

$$I = -F_c\Delta t = mv - mv_0$$

y por lo tanto:

$$\Delta t = \frac{m(v_0 - v)}{F_c} = \frac{(20\text{kg})(3\text{m/s} - 1\text{m/s})}{98\text{N}} = 0{,}408\text{s}$$

d) El desplazamiento del perro durante ese tiempo es:

$$d_p = v_m\Delta t = (\frac{v_0 + v}{2})\Delta t = (\frac{3\text{m/s} + 1\text{m/s}}{2})0{,}408\text{s} = 0{,}816\text{m}$$

e) El desplazamiento del carrito durante ese tiempo es:

$$d_c = v_m\Delta t = (\frac{0 + v}{2})\Delta t = (\frac{1\text{m/s}}{2})0{,}408\text{s} = 0{,}204\text{m}$$

f) El trabajo hecho por el carrito sobre el perro es $W_p = \Delta K_p$:

$$W_p = \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = \frac{1}{2}(20\text{kg})[(1\text{m/s})^2 - (3\text{m/s})^2] = -80\text{J}$$

g) El trabajo hecho por el perro sobre el carrito es $W_c = \Delta K_c$:

$$W_c = \frac{1}{2}M(v^2 - 0) = \frac{1}{2}(40\text{kg})(1\text{m/s})^2] = +20\text{J}$$

h) Los trabajos W_c y W_p resultan diferentes porque la fuerza de fricción actúa sobre los dos objetos en distintas distancias. La diferencia $\Delta W = 60$ J se transforma en energía térmica.

Respuesta:

a) $v = 1$ m/s; b) $F = 98$ N;
c) $t = 0.41$ s; d) $d_p = 0.816$ m
e) $d_c = 0.204$ m; f) $W_p = -80$J
g) $W_c = +20$J.
h) Hay disipación de calor

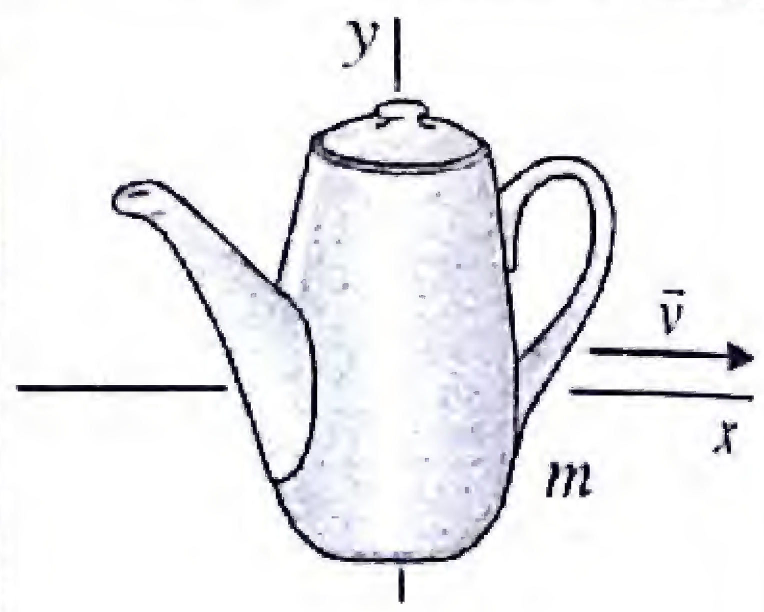
PR-5.23. *El jarrón de la abuela se rompió*

En medio de una disputa familiar, el jarrón favorito de la abuela, de masa m = 5 kg, salió lanzado en dirección $+x$ con una velocidad v = 2 m/s. Misteriosamente, el jarrón explotó en el aire en tres pedazos. Un pedazo de masa m_1 = 2,5 kg salió con rapidez v_1 = 1m/s en dirección $+y$, mientras que otro pedazo de masa m_2 = 1 kg salió con rapidez v_2 = 5 m/s en dirección $-x$.

¿Cuál fue la velocidad $\bar{v}_3$ del tercer pedazo?

Solución: La fuerza de la explosión es interna y se conserva el momento lineal:

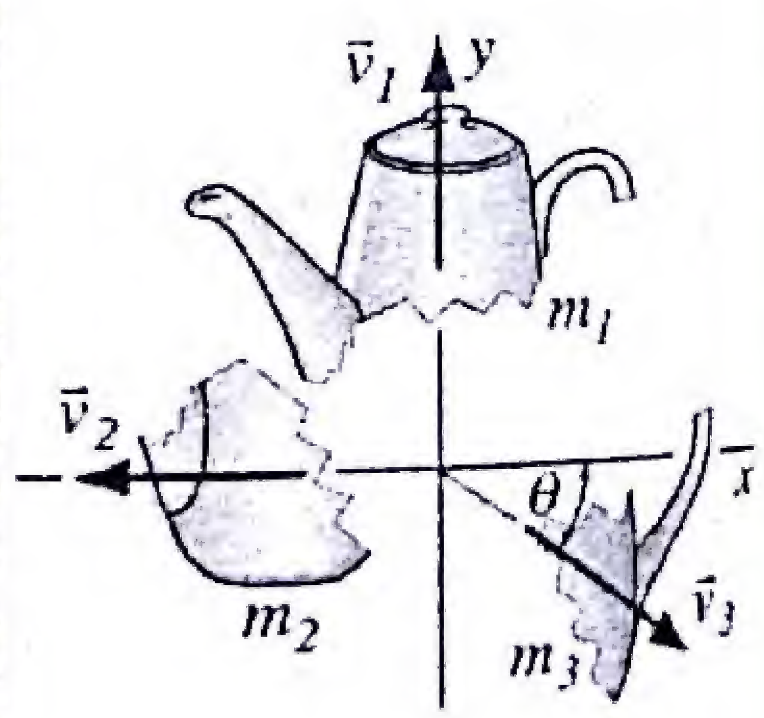
$$\sum \bar{p} = m\bar{v} = m_1\bar{v}_1 + m_2\bar{v}_2 + m_3\bar{v}_3$$



El tercer fragmento debe moverse también en el plano x-y. Aplicando la conservación de $\bar{p}$:

$$\sum p_x = mv = m_2v_2 + m_3v_3\cos\theta \quad \Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{mv - m_2v_2}{m_3v_3}$$

$$\sum p_y = 0 = m_1v_1 + m_3v_3 sen\theta \quad \Rightarrow \quad sen\theta = -\frac{m_1v_1}{m_3v_3}$$



Dividiendo la segunda ecuación entre la primera se obtiene:

$$tg\theta = -\frac{m_1v_1}{mv - m_2v_2} = -\frac{(2{,}5\text{kg})(1\text{m/s})}{5\text{kg}(2\text{m/s}) - 1\text{kg}(-5\text{m/s})} = -0{,}167$$

El ángulo de salida respecto del eje x es: θ = -9,46° y el módulo de la velocidad:

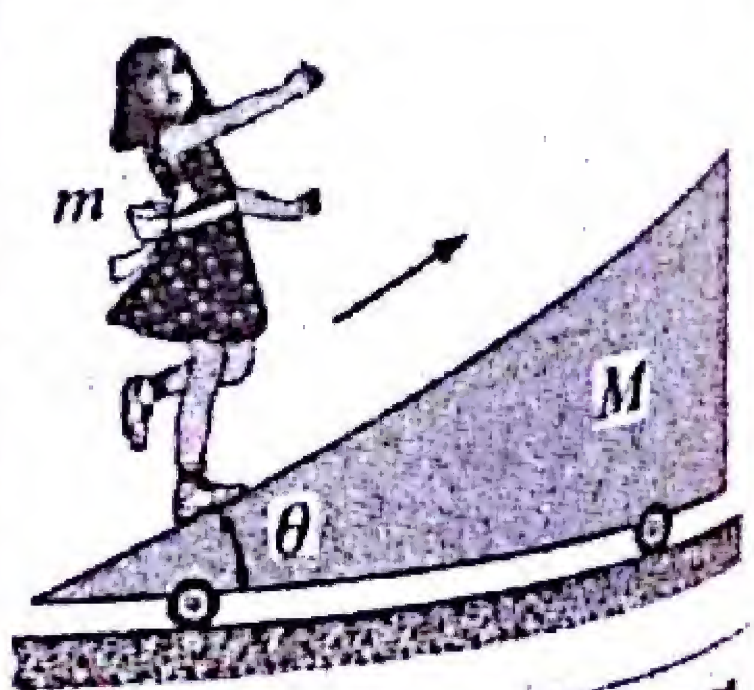
$$v_3 = -\frac{m_1v_1}{m_3 sen\theta} = -\frac{(2{,}5\text{kg})(1\text{m/s})}{(1{,}5\text{kg})\text{sen}(-9{,}46°)} v_3 = 10{,}1\text{m/s}$$

Respuesta:

v_3 = 10,1m/s, en dirección θ = -9,46° debajo del eje x

PR-5.24. *Subiendo por un plano inclinado móvil*

Un bloque de masa M = 16 kg, en forma de cuña, tiene un ángulo de inclinación ϕ = 36,9° y se encuentra sobre un plano horizontal liso. Una niña de masa m = 4 kg empieza a subir con una velocidad u = 2 m/s con respecto a la cuña. ¿Cuál será la velocidad de la cuña?



Solución: Si la cuña se desplaza con una velocidad v con relación al suelo, la componente horizontal de la velocidad de la niña con relación al suelo será:

$$v_p = u\cos\phi + v$$

Por conservación de la componente horizontal del momento lineal, tenemos:

$$p_x: \quad m(u\cos\phi + v) + Mv = 0$$

Despejando, se obtiene la velocidad de retroceso de la cuña:

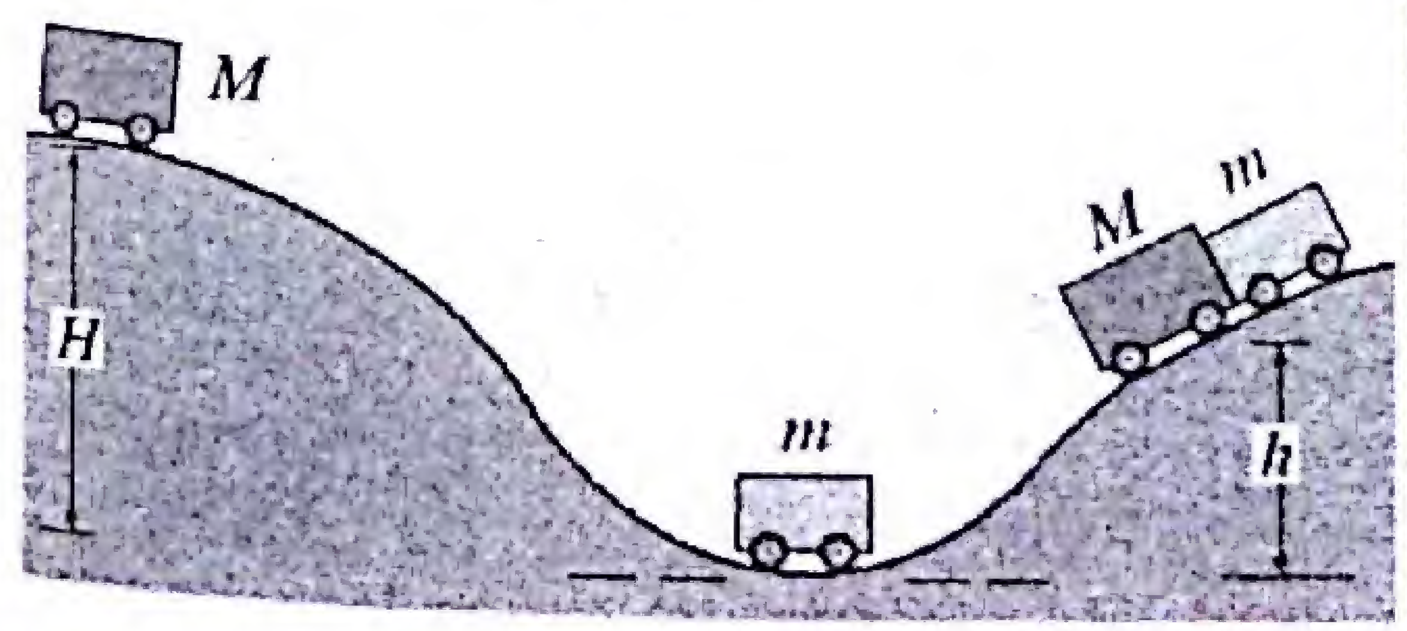
$$v = -\frac{m}{M+m}u\cos\phi = -\frac{(4\text{kg})(2\text{m/s})}{16\text{kg} + 4\text{kg}}\cos 36{,}9° = -0{,}32\text{m/s}$$

Respuesta:

$v = -0{,}32$m/s

PR-5.25. *Un choque inelástico entre dos vagones*

Un vagón de ferrocarril de masa M está en reposo en una colina con los frenos aplicados.



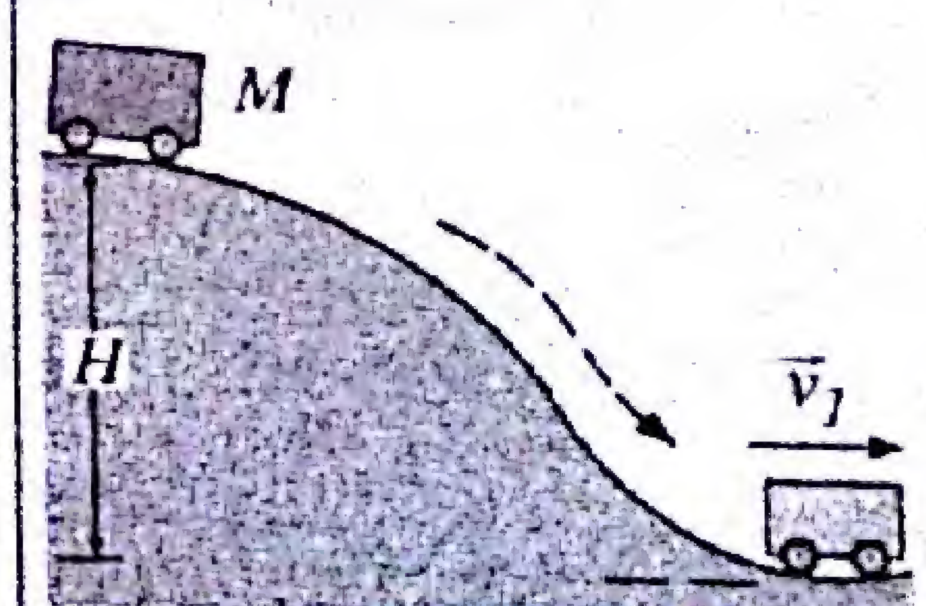
Accidentalmente se sueltan los frenos y el vagón desciende hasta la parte inferior de la colina, situada a una altura H = 90 m por debajo de su posición original. El vagón choca con otro vagón de masa m = M/2 que está en reposo en la parte inferior de la vía (y sin frenos), quedando acoplados los dos vagones. Determine la altura final h.

Solución: La velocidad v_1 del vagón M al final del descenso y justo antes de chocar, se obtiene aplicando la conservación de su energía mecánica:

$$MgH = \frac{1}{2}Mv_1^2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \sqrt{2gH}$$

El choque es perfectamente inelástico y los dos vagones salen acoplados con una velocidad común, v_2. Durante el choque se conserva el momento lineal total del sistema:

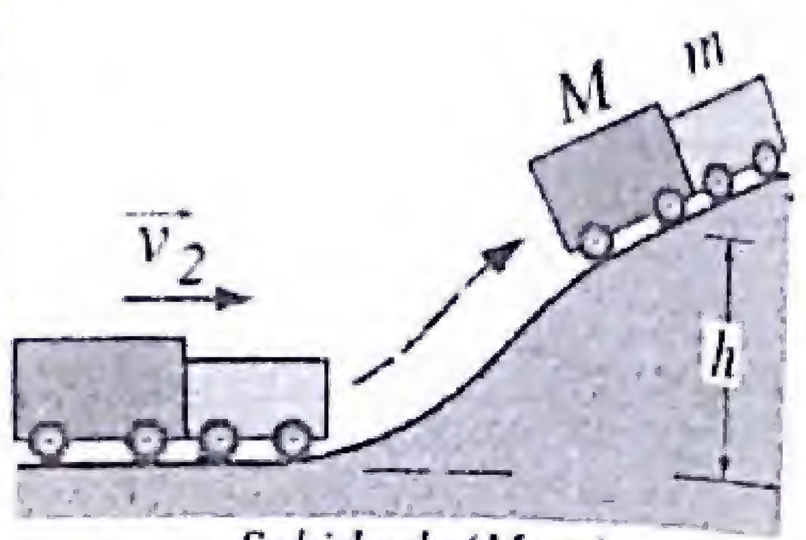
$$Mv_1 = (m+M)v_2$$



Bajada de M

Se obtiene v_2 después de sustituir la expresión para la velocidad inicial v_1:

$$v_2 = (\frac{M}{M+m})v_1 = (\frac{M}{M+m})\sqrt{2gH}$$



Subida de (M+m)

La energía cinética del sistema de vagones enganchados se convierte en energía potencial a la altura final h:

$$\frac{1}{2}(M+m)v_2^2 = (M+m)gh$$

Por lo tanto, la altura final, h, alcanzada es:

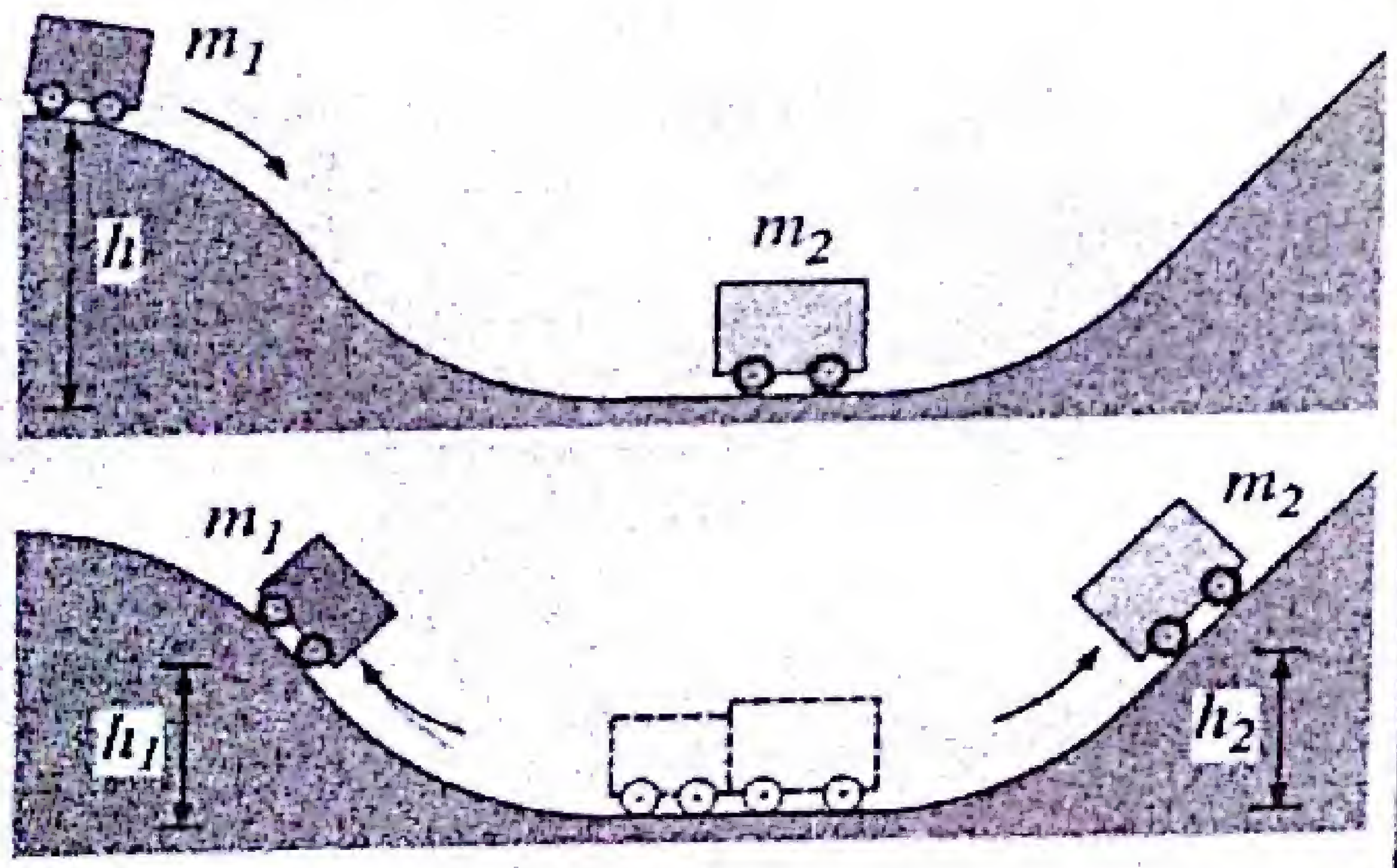
$$h = \frac{v_2^2}{2g} = (\frac{M}{M+m})^2 H = (\frac{2m}{3m})^2 H = \frac{4}{9}H = 40\text{m}$$

Respuesta:

$\boxed{h = 40 \text{ m}}$

PR-5.26. *Un choque elástico entre dos vagones*

Un vagón de masa m_1 = 10kg se suelta desde una altura h = 10 m y en la base golpea un vagón de masa m_2 = 30 kg.



Si se desprecia la fricción y la colisión es perfectamente elástica, determine:

a) Las velocidades de los vagones después de la colisión.

b) la altura que alcanzarán los dos vagones en la subida.

Solución: a) El bloque m_1 después de descender la altura h y antes de chocar tiene una velocidad dada por la conservación de la energía ($\Delta U + \Delta K = 0$):

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{2gh}$$

En el choque se conserva la energía cinética y el momento lineal:

$$\frac{1}{2}m_1v_0^2 = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \qquad (1)$$

$$m_1v_0 = m_1v_1 + m_2v_2 \qquad (2)$$

Podemos rescribir estas ecuaciones en la forma:

$$m_1(v_0 - v_1)(v_0 + v_1) = m_2v_2^2 \qquad (1')$$

$$m_1(v_0 - v_1) = m_2v_2 \qquad (2')$$

Combinando estas ecuaciones encontramos las velocidades de los vagones después del choque:

$$v_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_0 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\sqrt{2gh} = -7\text{m/s}$$

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_0 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\sqrt{2gh} = +7\text{m/s}$$

b) Las altura finales que alcanzan los vagones después del choque se obtienen por la conservación la energía:

$$h_1 = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{(7\text{m/s})^2}{2(9{,}8\text{m/s}^2)} = 2{,}5\text{m}$$

$$h_2 = \frac{v_2^2}{2g} = \frac{(7\text{m/s})^2}{2(9{,}8\text{m/s}^2)} = 2{,}5\text{m}$$

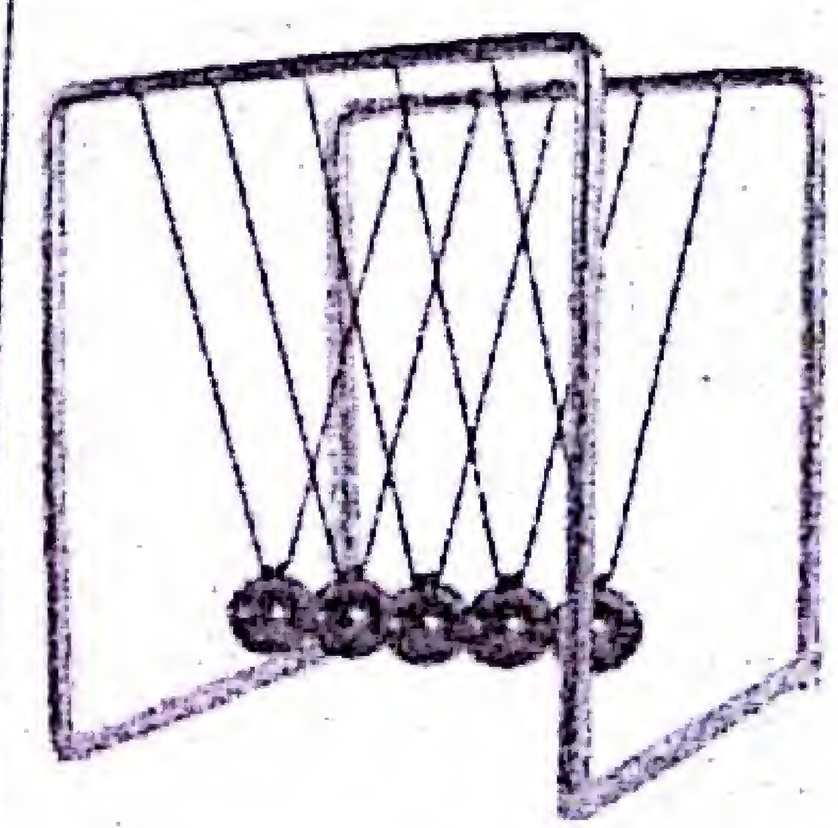
Respuesta

$v_1 = -7$m/s
$v_2 = +7$m/s
$h_1 = h_2 = 2{,}5$m

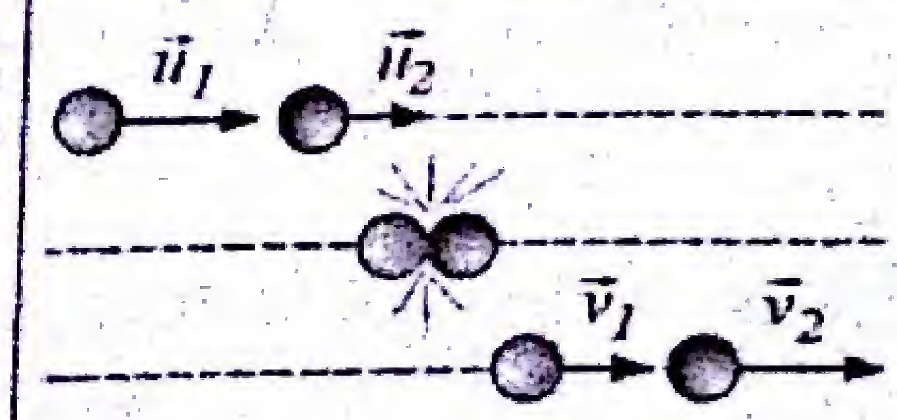
PR-5.27. *Las bolas de Newton*

a) Demuestre que cuando una pelota colisiona elásticamente con otra idéntica en reposo, esta última adquiere el momento lineal de la primera, y la primera se detiene.

b) El aparato mostrado es un juguete muy popular que fue ideado por Newton para ilustrar de manera impactante la conservación del momento lineal. Demuestre que si n pelotas son apartadas a un lado y luego se sueltan, intercambiarán su cantidad de movimiento vía sucesivas colisiones hasta que las últimas n pelotas salen con este momento lineal.



Solución: a) Sean dos pelotas iguales que van en la misma dirección con velocidades u_1 y u_2. Luego de chocar saldrán con velocidades v_1 y v_2. Por conservación del momento lineal:

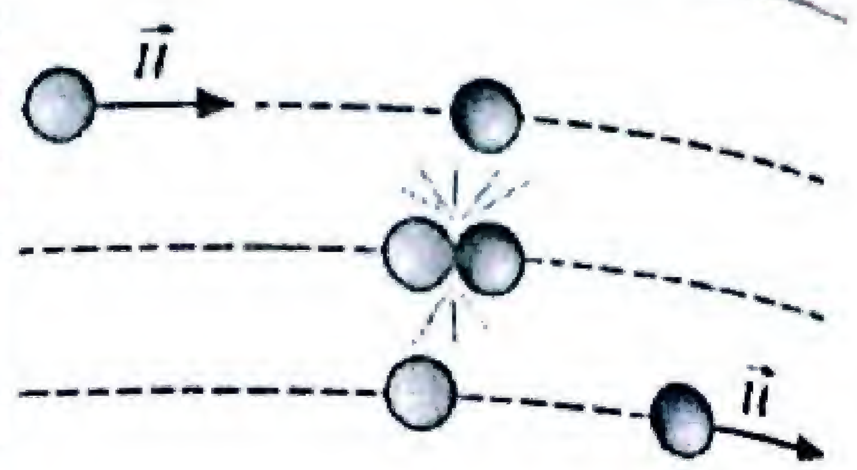


$$mu_1 + mu_2 = mv_1 + mv_2 \Rightarrow u_1 + u_2 = v_1 + v_2 \qquad (1)$$

Si el choque es elástico la velocidad relativa conserva su magnitud y se invierte:

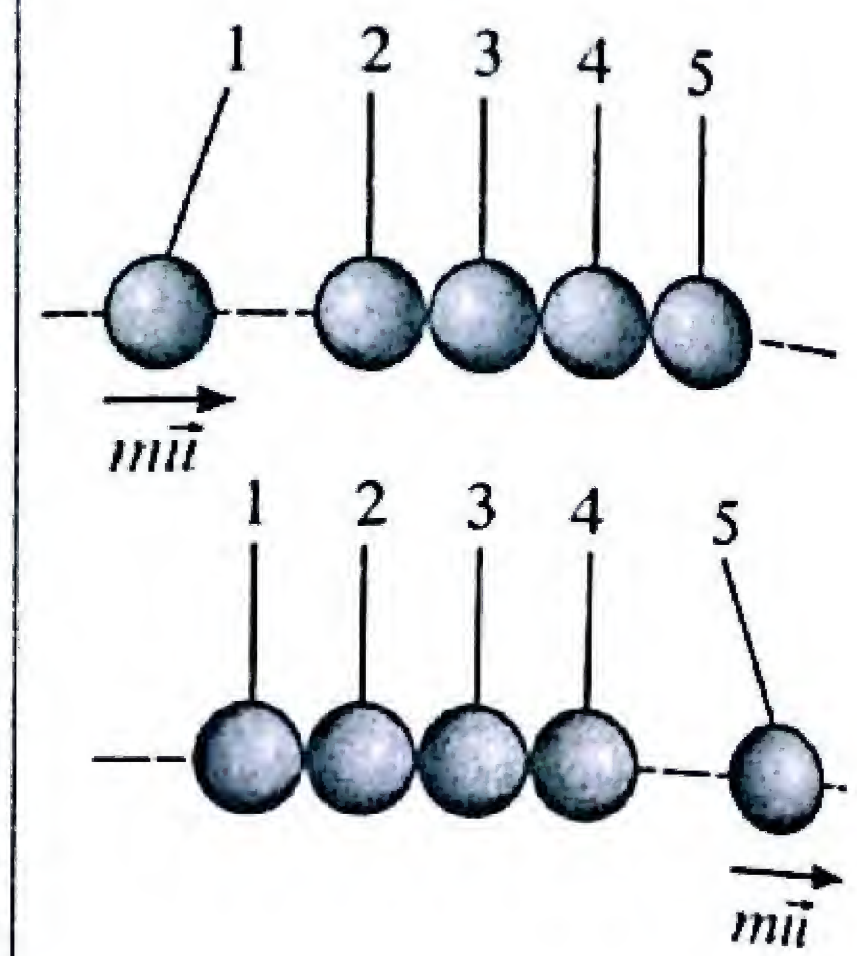
$$u_2 - u_1 = -(v_2 - v_1) \qquad (2)$$

Combinando (1) con (2) se obtiene: $v_1 = u_2$ y $v_2 = u_1$

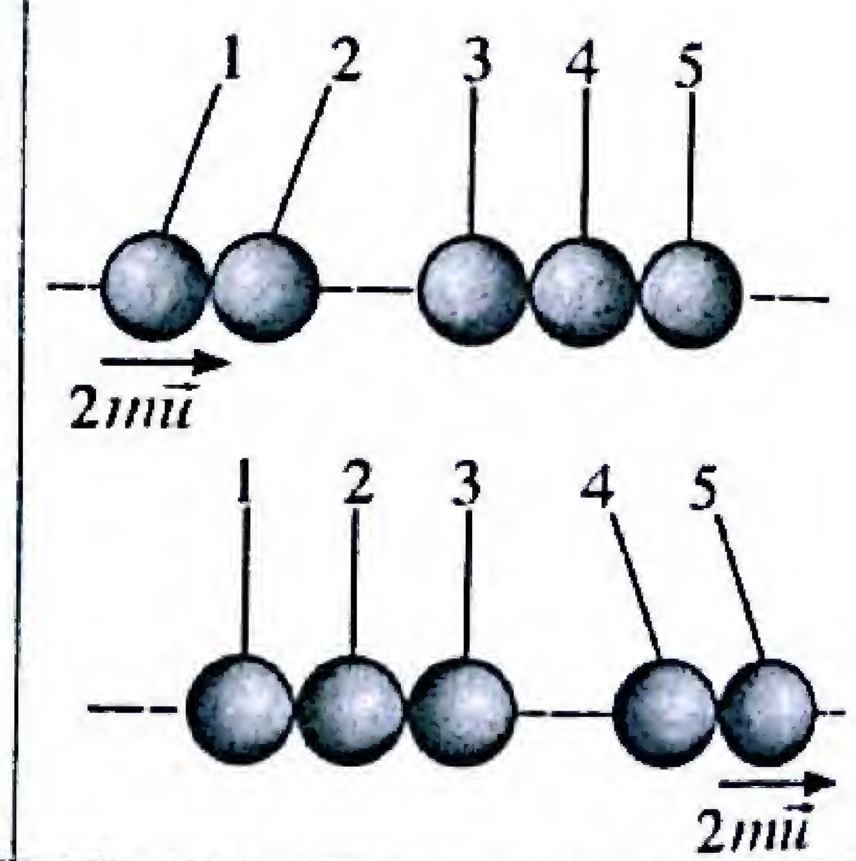


Es decir, las pelotas intercambian velocidades. Si una de las pelotas está inicialmente estacionaria, después de la colisión adquiere todo el momento lineal de la otra.

b) De acuerdo al resultado anterior si en el aparato de Newton, apartamos a un lado la pelota #1 y la soltamos, ésta choca con la #2 y se detiene, transmitiéndole su cantidad de movimiento mu. A continuación la #2 le transmite esta misma cantidad de movimiento a la #3 y se detiene, luego la #3 a la #4 y se detiene, y finalmente la #4 a la #5 y se detiene. Esta ultima pelota no tiene otra del lado derecho y se moverá hasta que el hilo se desvía a cierto ángulo. El proceso de transmisión del momento lineal se repetirá en sentido contrario.

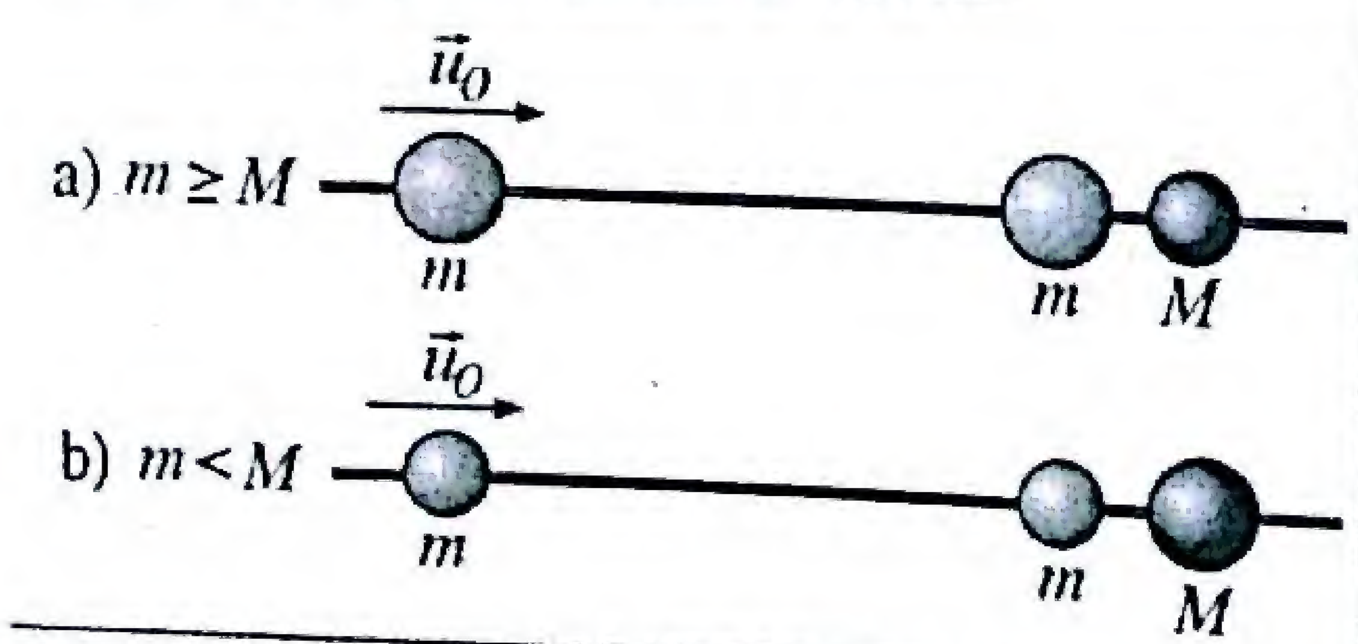


Si desviamos las <u>dos pelotas</u> de la izquierda, transmitirán su cantidad de movimiento $2mu$ a la cadena, pero *no simultáneamente*, sino un impulso después del otro. *Estos dos impulsos se transmitirán por la cadena en un intervalo de tiempo muy pequeño, no perceptible por el ojo.* La pelota #5 recibirá el primer impulso y enseguida la #4 recibirá el impulso siguiente que le fue comunicado por la esfera #3. Como resultado las pelotas #1, #2 y #3 han quedado inmóviles y las #4 y #5 se mueven *juntas* hacia la derecha.



PR-5.28. ***¿Cuántas colisiones ocurren?***

Las tres bolas mostradas están atravesadas por una varilla horizontal y se pueden deslizar sin fricción.



Las dos bolas m y M, de la derecha, están en reposo un poco separadas, en tanto que la bola m de la izquierda incide con velocidad u_o. Los choques son elásticos. Demostrar que:

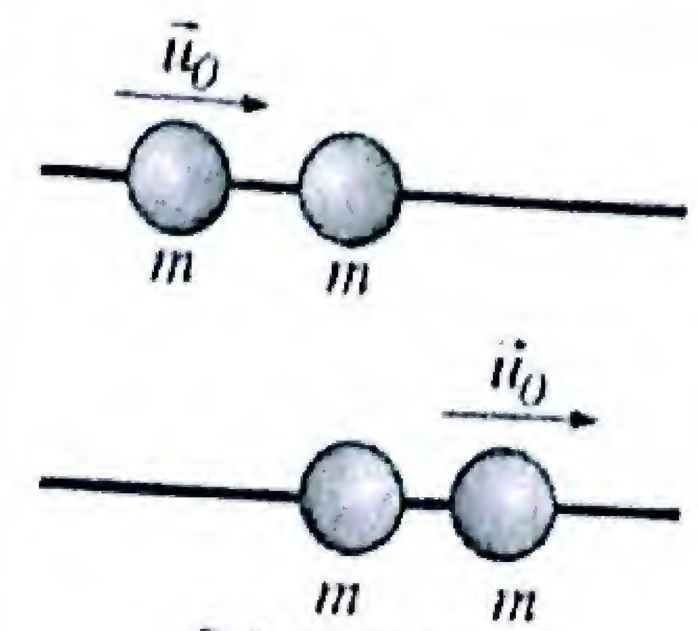
a) Si $m \geq M$ ocurren "dos" colisiones.

b) Si $m < M$, ocurren "tres" colisiones.

Solución: <u>Primer choque:</u> La bola de la izquierda tiene velocidades inicial y final (u_0, u_1), mientras que la del medio tiene velocidades $(0, v_1)$. Por conservación del momento lineal y de la energía respectivamente tenemos:

$$mu_0 = mu_1 + mv_1 \quad \Rightarrow \quad u_0^2 = u_1^2 + v_1^2 + 2u_1v_1 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{2}mu_0^2 = \frac{1}{2}mu_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2 \quad \Rightarrow \quad u_0^2 = u_1^2 + v_1^2 \qquad (2)$$



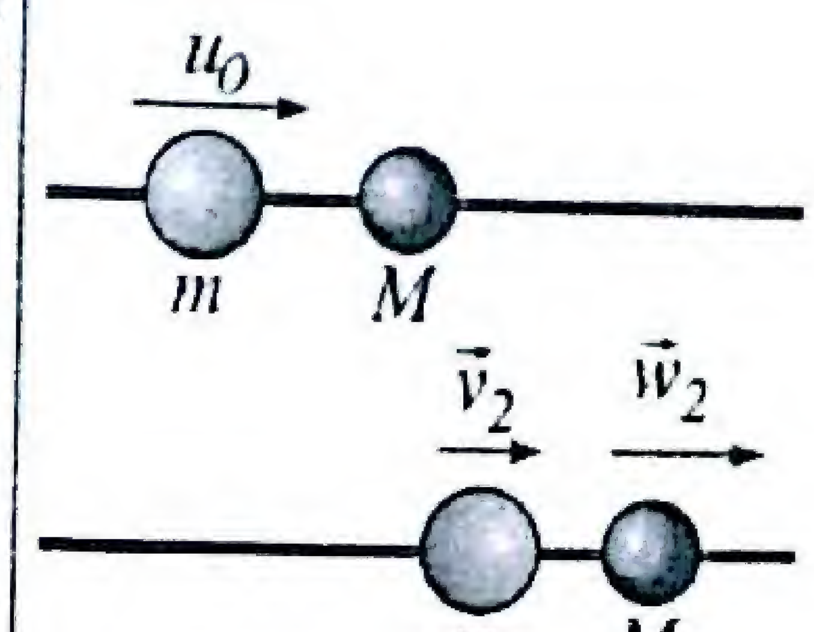
Primer choque

De las ecuaciones (1) y (2) se deduce que: $u_1 = 0$. Es decir, la bola de la izquierda se detiene y la del medio sigue con velocidad $v_1 = u_0$ hacia la derecha (intercambian sus velocidades).

<u>Segundo choque:</u> La bola m del medio tiene velocidades inicial y final (u_0, v_2), mientras que la bola M de la derecha $(0, w_2)$. Por conservación del momento lineal y de la energía :

$$\sum p_x: \quad mu_0 = mv_2 + Mw_2 \qquad (3)$$

$$\frac{1}{2}mu_0^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}Mw_2^2 \qquad (4)$$



Segundo choque

Combinando las ecuaciones (3) y (4) encontramos:

$$v_2 = \left(\frac{m - M}{m + M}\right)u_0 \qquad w_2 = \left(\frac{2m}{m + M}\right)u_0$$

a) Si $m \geq M$ entonces $v_2 \geq 0$ y la bola del centro se detiene o se mueve hacia la derecha con una velocidad $v_2 < w_2$, de manera que "nunca" alcanzará a la masa M. Por lo tanto, solo ocurren "dos" colisiones.

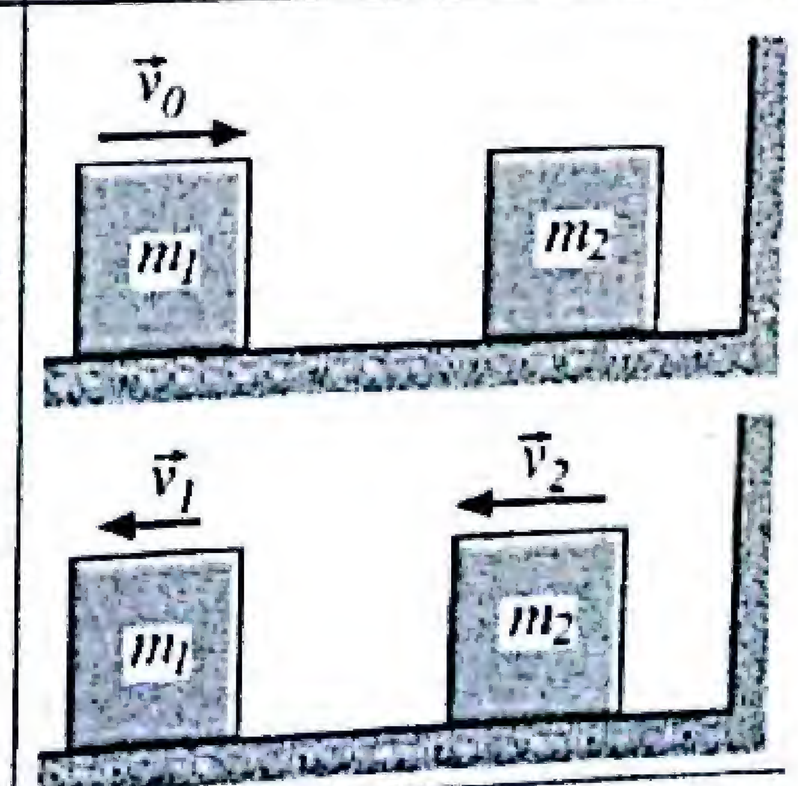
b) Si $m < M$, entonces $v_2 < 0$, es decir, la bola m del centro se mueve hacia la izquierda y por lo tanto choca con la bola m de la izquierda que estaba en reposo e intercambian sus velocidades. Por lo tanto, ocurre una tercera colisión.

Respuesta:

a) Si $m \geq M$ hay dos choques
b) Si $m < M$ hay tres choques

PR-5.29. ***Condición para que vuelvan a chocar***

Un bloque de masa m_1 se mueve con velocidad $\vec{v}_0$ en una superficie horizontal sin rozamiento y choca con otro bloque de masa m_2 que está inicialmente en reposo. El bloque m_2 choca con una pared rígida y retrocede. Suponiendo que todas las colisiones son perfectamente elásticas, ¿Qué relación deben guardar las masas de los bloques para que vuelvan a chocar?



Solución: En el primer choque, la conservación del momento lineal se escribe:

$$\sum p_x : \; m_1 v_0 = m_1 v_{1'} + m_2 v_{2'} \qquad (1)$$

Además, las velocidades relativas conservan la magnitud e invierten la dirección:

$$v_0 - 0 = -(v_{1'} - v_{2'}) \qquad (2)$$

Combinando las ecuaciones (1) y (2) se obtienen las velocidades de los bloques después del primer choque:

$$v_{1'} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_0 \qquad v_{2'} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0$$

Cuando el bloque m_2 choca con la pared rígida su velocidad se invierte: $v_2 = -v_{2'}$. Para que m_2 alcance a m_1, se debe cumplir: $v_2 > -v_{1'}$, es decir:

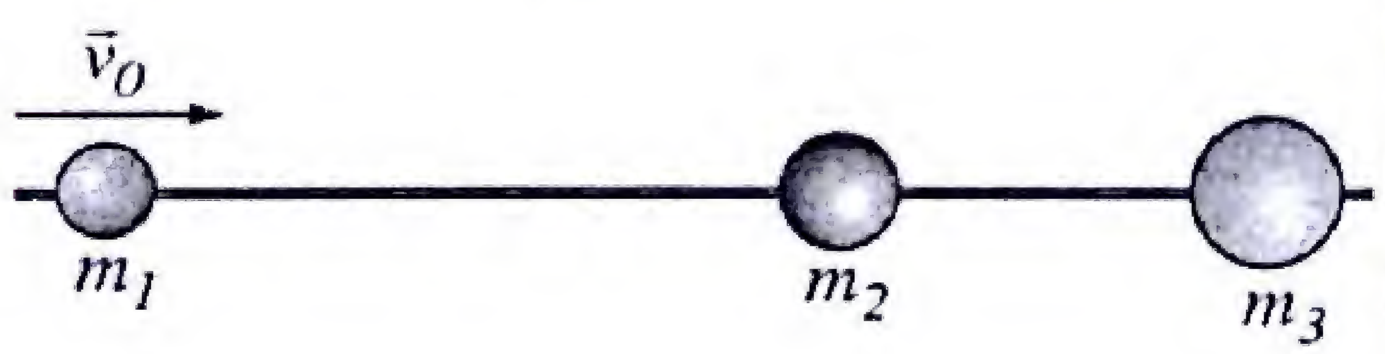
$$\frac{2m_1}{m_1 + m_2} > -\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{m_1}{m_2} > \frac{1}{3}$$

Respuesta:

$\boxed{m_2 < 3m_1}$

PR-5.30. *Masa para máxima transferencia de energía*

Tres pelotas de masas m_1, m_2 y m_3 están atravesadas por una varilla horizontal y pueden deslizar sin rozamiento.



Las dos pelotas de la derecha están inicialmente en reposo y la de la izquierda, m_1, incide con una velocidad v_0. Si las colisiones son perfectamente elásticas, halle el valor que debe tener la masa intermedia, m_2, para que transfiera una energía cinética máxima de m_1 a m_3.

Solución: La conservación del momento lineal en el choque de m_1 con m_2 es:

$$\sum p_x : \qquad m_1 v_0 = m_1 v_1' + m_2 v_2$$

y la velocidad relativa se invierte: $v_0 = v_2 - v_1'$. Combinando:

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_0$$

Similarmente, en el choque de m_2 con m_3:

$$\sum p_x : \; m_2 v_2 = m_2 v_2' + m_3 v_3$$

$$v_2 = v_3 - v_2'$$

Combinando estas dos ecuaciones:

$$v_3 = \frac{2m_2}{m_2 + m_3} v_2 = \left(\frac{2m_2}{m_2 + m_3}\right)\left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right) v_0$$

La energía cinética de m_3 es:

$$K_3 = \frac{1}{2} m_3 v_3^2 = \frac{m_3 v_0^2}{2}\left(\frac{2m_2}{m_2 + m_3}\right)^2\left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)^2$$

Para que la energía de m_3 tenga un máximo, se debe cumplir:

$$\frac{dK}{dm_2} = \frac{16 v_0^2 m_1^2 m_2 m_3 (m_1 m_3 - m_2^2)}{(m_1 + m_2)^3 (m_2 + m_3)^3} = 0$$

Por lo tanto, el valor de m_2 debe ser:

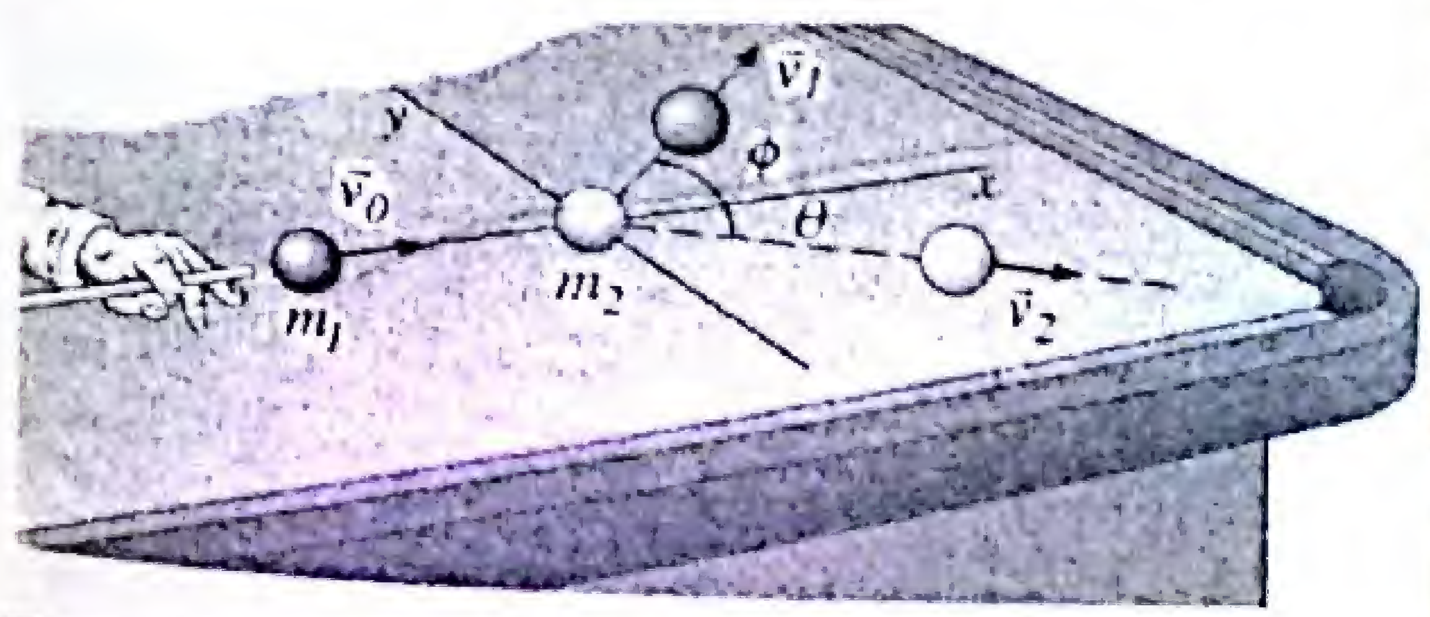
$$m_2 = \sqrt{m_1 m_3}$$

Respuesta:

$m_2 = \sqrt{m_1 m_3}$, (la media geométrica de m_1 y m_3)

PR-5.31. *Colisión elástica no frontal en mesa de billar*

En un juego de billar la bola roja de masa m_1 es golpeada con el taco, imprimiéndole una velocidad v_o = 10 m/s.



El propósito es hacerla chocar con la bola blanca en reposo, de masa $m_2 = m_1$, para que esta se dirija al hoyo de la esquina en dirección θ = 36.9°. Suponga que el choque es perfectamente elástico e ignore la rotación de las bolas.

a) ¿A qué ángulo ϕ se desviará la bola roja?

b) Halle la rapidez con que sale cada una de las bolas.

Solución: a) Como no hay fuerzas externas horizontales, las cantidades de movimiento antes y después del choque son iguales:

$$m_1 \vec{v}_0 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

Si las masas son iguales $m_2 = m_1$, la expresión se simplifica:

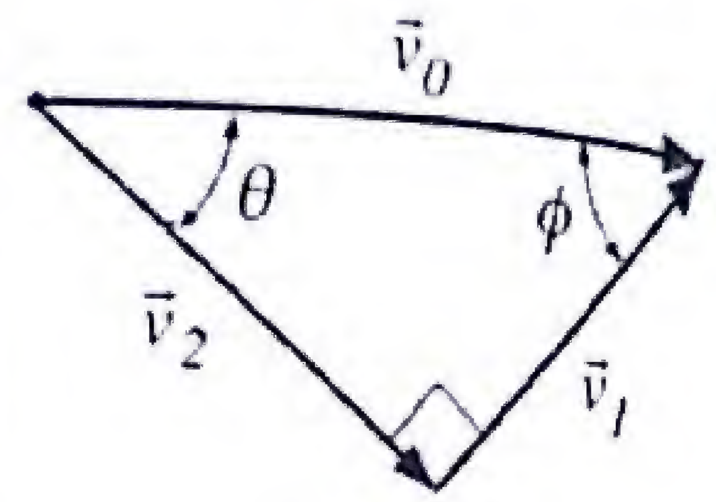
$$\vec{v}_0 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \qquad (1)$$

El choque es elástico, y la energía cinética total se conserva:

$$\frac{1}{2}m_1 v_0^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

Simplificando:

$$v_0^2 = v_1^2 + v_2^2 \qquad (2)$$



Según la expresión vectorial (1) los tres vectores $\vec{v}_0$, $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ cierran un triángulo, cuyos lados se relacionan por la ecuación (2), (como en el teorema de Pitágoras). De modo que el triángulo formado por los tres vectores es rectángulo y sus ángulos internos guardan la relación*:

$$\theta + \phi = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \phi = 90^\circ - \theta \quad \Rightarrow \quad \phi = 53,1^\circ$$

b) Los módulos de las velocidades son:

$$v_1 = v_0 \cos\phi = (10\text{m/s})(\cos 53,1^\circ) = 6 \text{ m/s}$$

$$v_2 = v_0 \cos\theta = (10\text{m/s})(\cos 36,9^\circ) = 8 \text{ m/s}$$

* Este resultado no es accidental, en general, siempre que dos partículas iguales chocan elásticamente en colisión no-frontal, en que una de ellas está inicialmente en reposo, las dos partículas saldrán formando a ángulo recto después del choque.

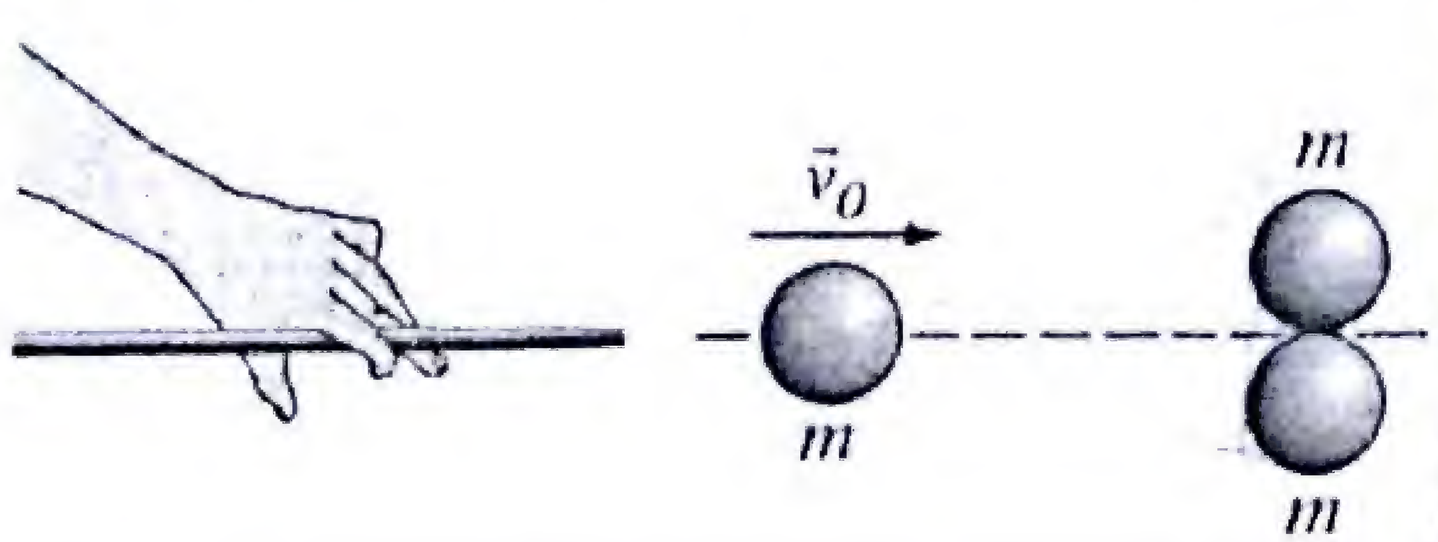
Respuesta:

a) $\phi = 53,1^\circ$
b) $v_1 = 6$ m/s, bola roja
$v_2 = 8$ m/s, bola blanca

PR-5.32. *Colisión contra dos bolas de billar.*

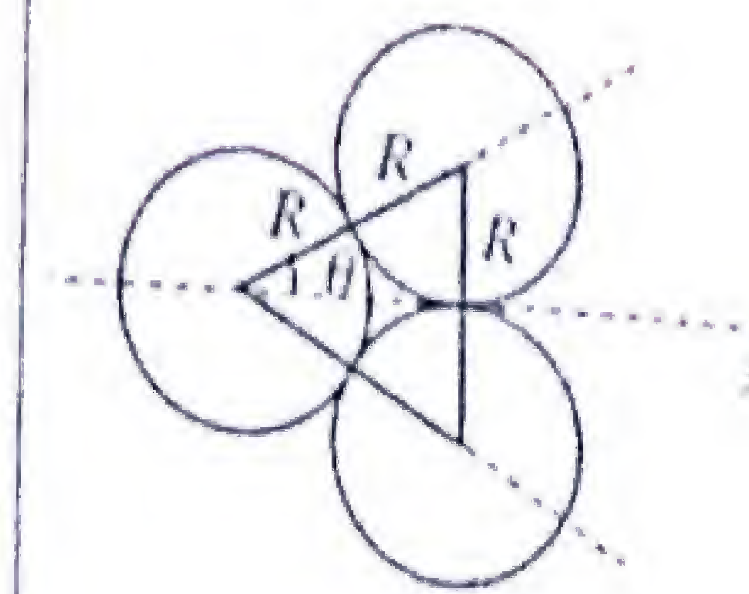
Se lanza una bola de billar con velocidad inicial $\vec{v}_0$ hacia el punto de contacto de dos bolas idénticas en reposo.

La velocidad de la bola en movimiento es perpendicular a la línea que une los centros de las dos bolas en reposo, como se muestra en la figura. Si la colisión es elástica, halle las velocidades finales de todas las bolas.



Solución: En el instante del contacto, los centros de las tres bolas forman un triángulo equilátero. El impulso recibido por las bolas en reposo queda en las líneas

respectivas que unen sus centros con el de la bola incidente, y por lo tanto, saldrán formando entre ellas un ángulo $\theta = 30^\circ$.



$$sen\theta = \frac{R}{R/2} = 0,5 \Rightarrow \theta = 30^\circ$$

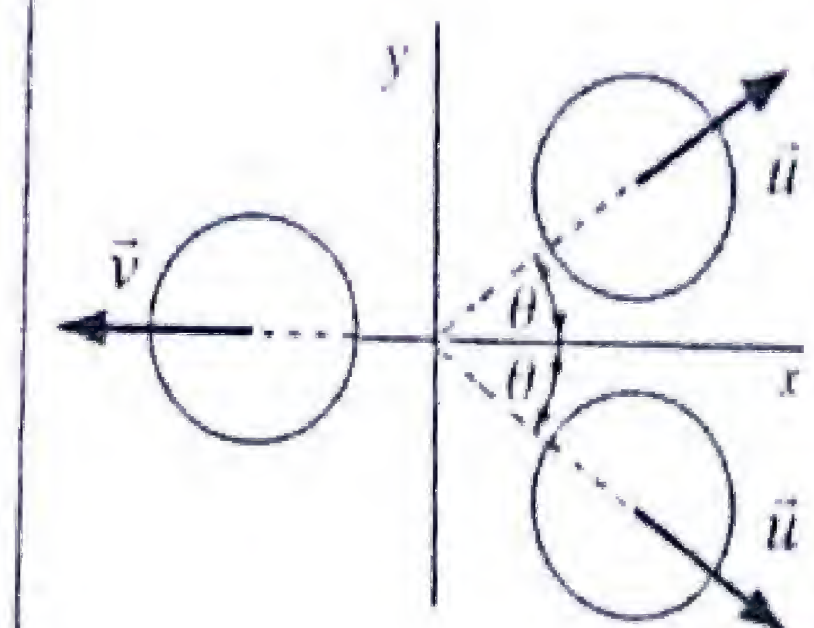
La conservación del momento lineal en la dirección x da:

$$\sum p_x: \; mv_0 = mv + 2(mu\cos\theta) \qquad (1)$$

Siendo v la velocidad final de la bola incidente y u la de las bolas chocadas.

El choque es elástico y se conserva la energía cinética:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + 2(\frac{1}{2}mu^2) \qquad (2)$$



De la ecuación (1) hallamos v^2:

$$v^2 = (v_0 - 2u\cos\theta)^2 = v_0^2 - 4uv_0\cos\theta + 4u^2\cos^2\theta$$

Reemplazando v^2 en la ecuación (2) resulta:

$$v_0^2 = v_0^2 - 4uv_0\cos\theta + 4u^2\cos^2\theta + 2u^2$$

Por lo tanto el valor de u es:

$$u = \frac{2v_0\cos\theta}{1 + 2\cos^2\theta} = \frac{2v_0\cos 30^\circ}{1 + 2\cos^2 30^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{5}v_0$$

y la velocidad final, v, de la bola incidente es:

$$v = v_0 - 2u\cos\theta = v_0 - \sqrt{3}u = -\frac{1}{5}v_0$$

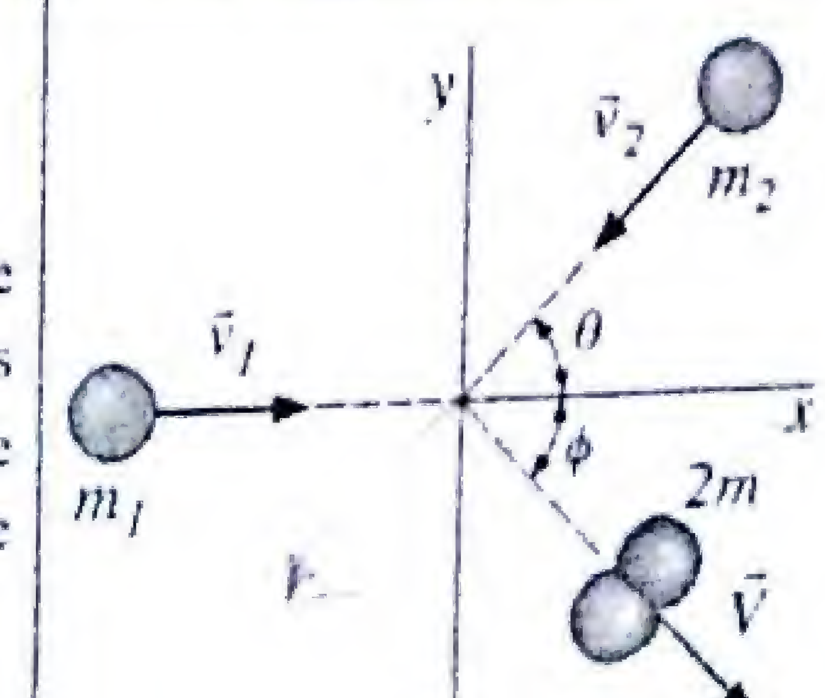
El signo (-) significa que la bola incidente retrocede.

Respuesta:

La bola incidente retrocede:
$$\vec{v} = -\frac{1}{5}v_0\hat{x}.$$
Las bolas chocadas salen a 30°:
$$\vec{u} = \frac{2\sqrt{3}}{5}(\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{y})v_0$$

PR-5.33. *Colisión inelástica en dos dimensiones*

Dos pelotas pequeñas de igual masa, $m_1 = m_2 = m$, se aproximan con igual rapidez, $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$ y chocan. Las pelotas salen unidas con una rapidez que es la mitad de sus rapideces iniciales, $V = v/2$. Determine el ángulo que formaban las velocidades de las pelotas antes de chocar.



Solución: Aplicando la conservación del momento lineal $\bar{p}$ en las direcciones x e y:

$$\sum p_x: \quad mv - mv\cos\theta = (2m)(\frac{v}{2})\cos\phi \qquad (1)$$

$$\sum p_y: \quad mv sen\theta = (2m)(\frac{v}{2}) sen\phi \qquad (2)$$

Simplificando por mv estas ecuaciones quedan:

$$1 - \cos\theta = \cos\phi \qquad (1')$$

$$sen\theta = sen\phi \qquad (2')$$

De la relación (2') se deduce que los ángulos θ y ϕ son iguales y de la relación (1'), encontramos los ángulos:

$$1 = 2\cos\phi \quad \Rightarrow \quad \theta = \phi = arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

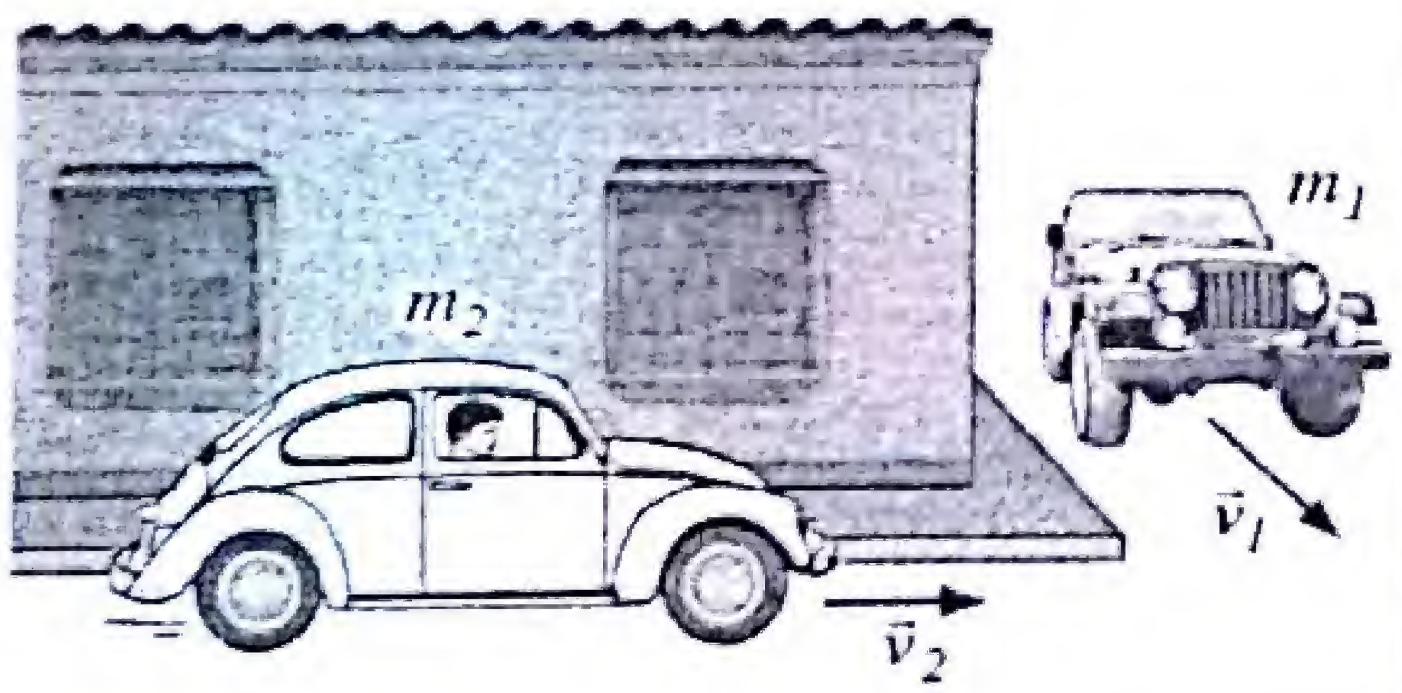
Respuesta:

$$\boxed{\theta = \phi = arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}}$$

PR-5.34. *Hubo un choque en la esquina Pele el Ojo*

El reporte sobre un accidente de tránsito dice lo siguiente: ...En la esquina "Pele El Ojo", un carro VW de masa m_2 = 1200 kg, que se dirigía en dirección Este, chocó con un Jeep de masa m_1 = 1400 kg, que iba hacia el Sur....

....Los carros quedaron enganchados, y dejaron en el pavimento una marca de 20 m de longitud en dirección a θ = 30° Sur - Este. Los dos choferes discutieron en forma muy acalorada, acusándose mutuamente de ir a exceso de velocidad.....



Sabiendo que el coeficiente de fricción cinética de un caucho con el pavimento es μ_c = 0.5, determine:

a) La velocidad de los vehículos

b) ¿Cuál vehículo excedía el límite de velocidad de 60 km/h?

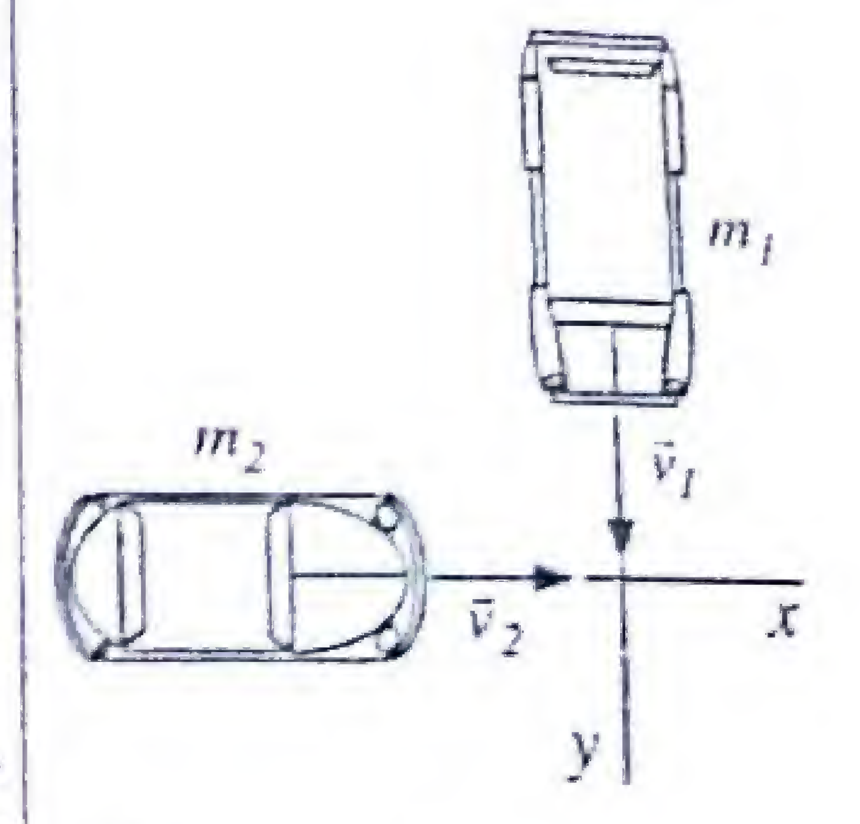
Solución: a) A partir de la longitud de la marca dejada en el pavimento, podemos determinar la velocidad común, v, de los vehículos inmediatamente después del choque. El cambio de energía cinética de los vehículos es igual al trabajo de la fuerza no conservativa de rozamiento cinético:

$$W_c = \Delta K \quad \Rightarrow \quad F_c d = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$$

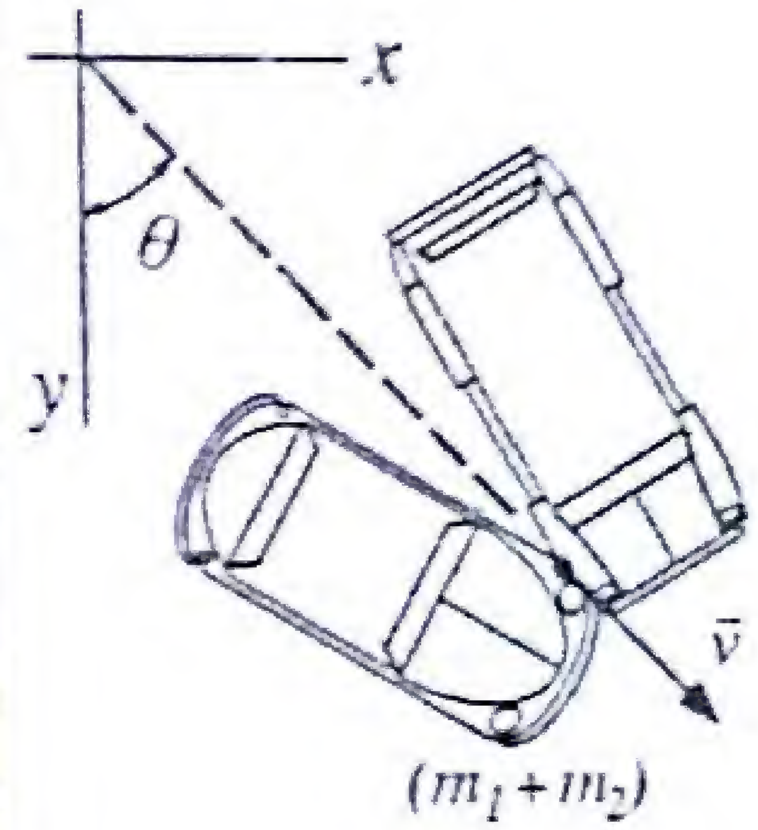
Siendo la fuerza de rozamiento cinético: $F_c = \mu_c N = \mu_c(m_1 + m_2)g$

$$\mu_c(m_1 + m_2)gd = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2$$

$$v = \sqrt{2\mu_c g d} = \sqrt{2(0.5)(9.8\text{m/s}^2)(20\text{m})} = 14\text{m/s}$$



El choque es perfectamente inelástico y para determinar las velocidades de los vehículos inmediatamente antes del choque, aplicamos la conservación del momento lineal en las direcciones x e y, independientemente:



$$\sum p_x: \quad m_2 v_2 + 0 = (m_1 + m_2)v sen\theta$$

$$\sum p_y: \quad 0 + m_1 v_1 = (m_1 + m_2)v\cos\theta$$

Despejando, obtenemos las velocidades de cada vehículo:

$$v_1 = (\frac{m_1 + m_2}{m_1})v\cos\theta = (\frac{1400 + 1200}{1400})(14)\cos 30° = 22,5\text{m/s}$$

$$v_2 = (\frac{m_1 + m_2}{m_2})v sen\theta = (\frac{1400 + 1200}{1200})(14) sen 30° = 15.2\text{m/s}$$

b) El jeep con velocidad v_1 = 22.5 m/s = 81 km/h, pierde el choque porque excedía el límite máximo de velocidad.

Respuesta:

v_1 = 22.5 m/s = 81 km/h (Jeep)
v_2 = 15.2 m/s = 55 km/h (VW)
(el jeep pierde el choque)

PR-5.35. *¿Cuál es la máxima compresión del resorte?*

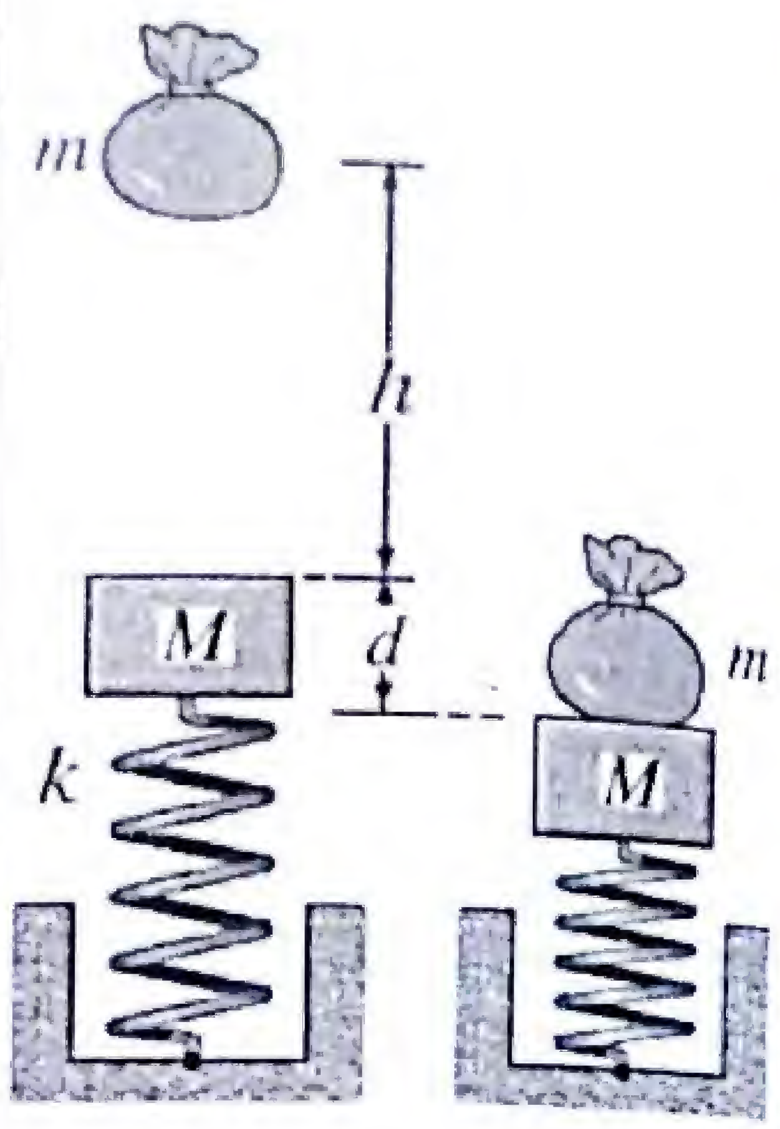
Un resorte de masa despreciable soporta una plataforma de masa M = 1 kg, la cual comprime el resorte en una longitud x_o = 10 cm cuando está en equilibrio. Se deja caer un saco de arena de masa m = 2 kg desde una altura h = 60 cm. Determine la máxima compresión del resorte.

Solución: El saco cae desde una altura h y llega a la plataforma con una velocidad $v_0 = \sqrt{2gh}$. El choque es perfectamente inelástico y se conserva el momento lineal:

$$\sum p_y: \quad mv_0 = (M + m)v_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = (\frac{m}{M + m})\sqrt{2gh}$$

Siendo v_1 la velocidad común después del choque. Denotemos por x_0 la compresión inicial del resorte debida a la plataforma M y d la distancia adicional máxima después que cae el saco. Después del choque la energía mecánica se conserva:

$$\frac{1}{2}(M+m)v_1^2 + (M+m)gd = \frac{1}{2}k[(d+x_0)^2 - x_0^2]$$



Sustituyendo las expresiones para v_1 y $k = Mg/x_0$, tenemos:

$$\frac{1}{2}(M+m)(\frac{m}{M+m})^2(2gh) + (M+m)gd = \frac{Mg}{2x_0}[d^2 + 2x_0 d]$$

Simplificando y reordenando se obtiene la ecuación cuadrática en d:

$$d^2 - (\frac{2mx_0}{M})d - \frac{2hx_0 m^2}{M(M+m)} = 0$$

En esta ecuación sólo la raíz positiva tiene sentido físico:

$$d = x_0[\frac{m}{M} + \sqrt{(\frac{m}{M})^2 + \frac{2hm^2}{x_0 M(M+m)}}]$$

Sustituyendo los valores numéricos: M = 1 kg, m = 2 kg, x_o = 0,1 m y h = 0,6 m obtenemos:

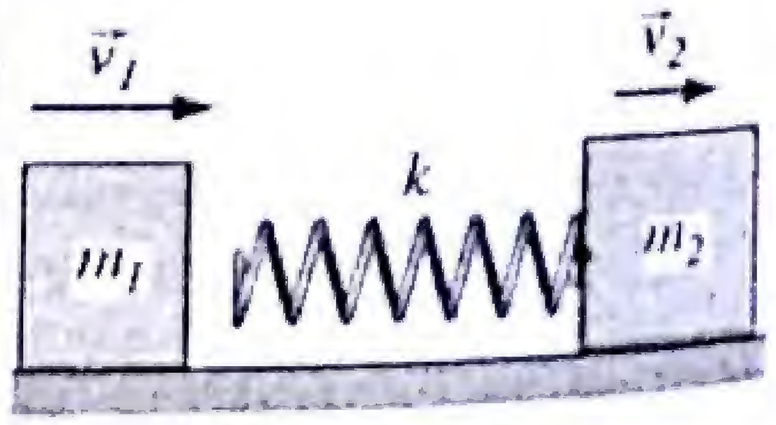
$$d = 0{,}647 \text{ m}$$

<u>Respuesta:</u>

$\boxed{d_{máx} = 0{,}647 \text{ m}}$

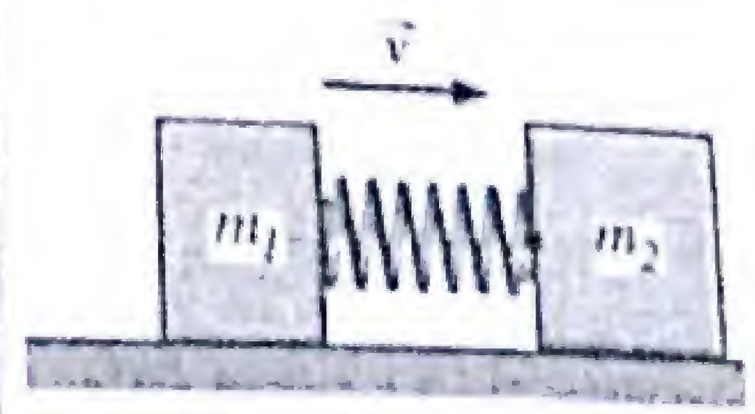
PR-5.36. *¿Cuál es la máxima compresión del resorte?*

En una superficie horizontal sin fricción, un bloque de masa m_1 = 1 kg, moviéndose a velocidad v_1 = 10 m/s, choca con otro bloque de masa m_2 = 2,5 kg que se mueve con velocidad v_2 = 3 m/s, en la misma dirección y sentido. El bloque m_2 tiene unido en su parte trasera, un resorte ligero de constante elástica k = 560 N/m. ¿Cuál será la máxima compresión del resorte?



Solución:. Después de la colisión, el resorte empieza a comprimirse y en el instante en que alcanza su máxima compresión, ambos bloques llevan la misma velocidad, v. Por conservación del momento lineal:

$$\sum p_x: \quad m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)v$$



Los bloques van a igual velocidad cuando la compresión es máxima

Luego, la velocidad común es:

$$v = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2} = \frac{(1\text{kg})(10\text{m/s}) + (2{,}5\text{kg})(3\text{m/s})}{1\text{kg} + 2{,}5\text{kg}} = 5\text{m/s}$$

Como no hay fricción, la energía mecánica total se conserva, $(K+U)_{ini} = (K+U)_{fin}$:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + \frac{1}{2}kx_{max}^2$$

Por lo tanto, la compresión máxima del resorte será:

$$x_{max} = \sqrt{\frac{m_1v_1^2 + m_2v_2^2 - (m_1 + m_2)v^2}{k}}$$

$$x_{max} = \sqrt{\frac{(1)(10)^2 + (2{,}5)(3)^2 - (1+2{,}5)5^2}{560}} = 0{,}25\text{m}$$

<u>Respuesta:</u>

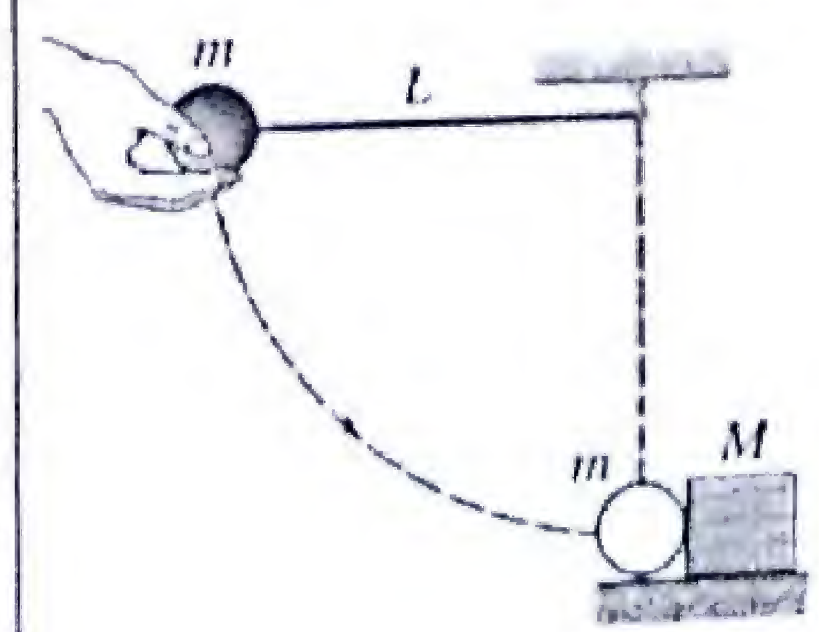
$\boxed{x_{max} = 0{,}25 \text{ m}}$

PR-5.37. *Péndulo que choca con bloque estacionario*

Una bola de acero de masa m = 0,5 kg está sujeta al extremo de una cuerda de longitud L = 1,84 m. La bola se libera a partir de la posición horizontal y en la parte mas baja de su oscilación choca con un bloque de masa M = 2,5 kg, que está en reposo sobre una superficie lisa.

a) Si el choque es perfectamente *elástico*, halle la velocidad de la bola y la del bloque justo después del choque.

b) Si el choque es perfectamente *inelástico*, halle la altura que se eleva el centro de masa del sistema bola-bloque.

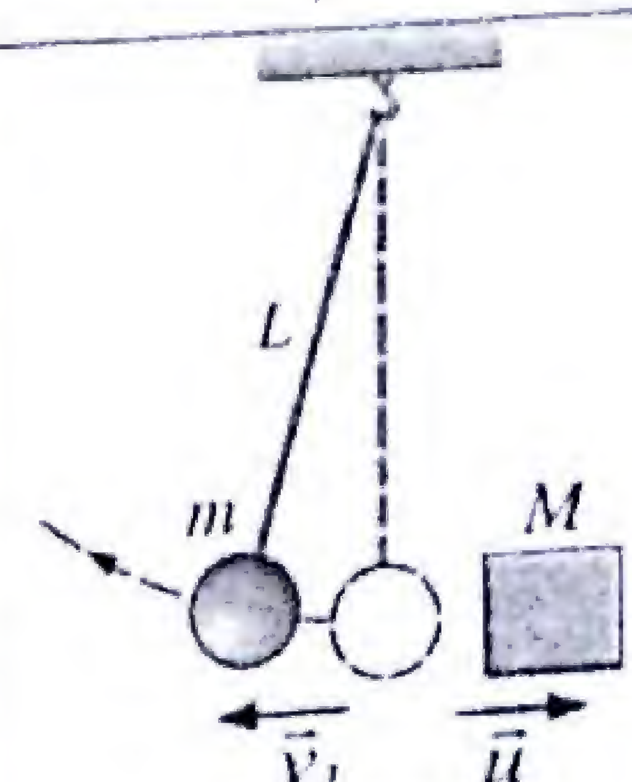


Solución: Aplicamos la conservación de la energía para hallar la velocidad v_0 de la bola justo antes de la colisión:

$$mgL = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{2gL} = 6 \text{ m/s}$$

a) <u>Choque elástico:</u> Se conserva tanto la energía cinética como el momento lineal:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}Mu^2 \quad \Rightarrow \quad v_1^2 = v_0^2 - \frac{M}{m}u^2 \qquad (1)$$



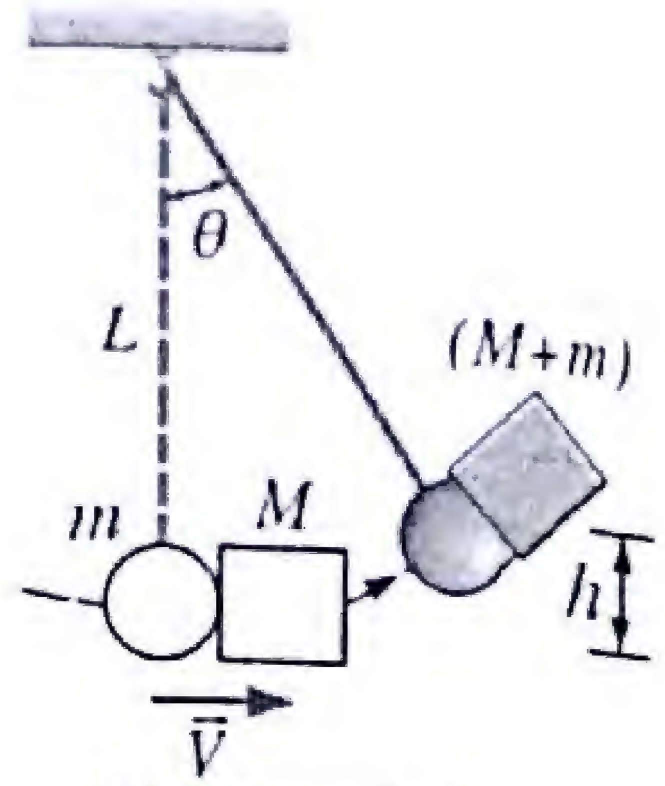
a) Choque elástico

$$mv_0 = mv_1 + Mu \Rightarrow v_1^2 = v_0^2 - 2\frac{M}{m}uv_0 + (\frac{M}{m})^2 u^2 \qquad (2)$$

Igualando las ecuaciones (1) y (2) para v_1^2 y simplificando:

$$u = \frac{2m}{M+m}v_0 = \frac{2(0{,}5\text{kg})}{2{,}5\text{kg}+0{,}5\text{kg}}6\text{m/s} = 2\text{m/s}$$

$$v_1 = v_0 - \frac{M}{m}u = 6\text{m/s} - (\frac{2{,}5\text{kg}}{0{,}5\text{kg}})2\text{m/s} = -4\text{m/s}$$



b) Choque inelástico

b) Choque inelástico: En este caso se conserva el momento lineal (mas no la energía cinética). Si V es la velocidad del conjunto bola-bloque, justo después del choque, tenemos:

$$\sum p_x : \quad mv_0 = (M+m)V$$

$$V = \frac{m}{M+m}v_0 = \frac{(0{,}5\text{kg})(6\text{m/s})}{(2{,}5+0{,}5)\text{kg}} = 1\text{m/s}$$

Después que ocurre el choque, el sistema se eleva hasta una altura máxima h, y por conservación de la energía:

$$\frac{1}{2}(M+m)V^2 = (M+m)gh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{V^2}{2g} = 0{,}051\text{m}$$

Respuesta:

a) Bloque: $u = 2$ m/s, Pelota: $v = -4$m/s
b) $h = 5{,}1$ cm

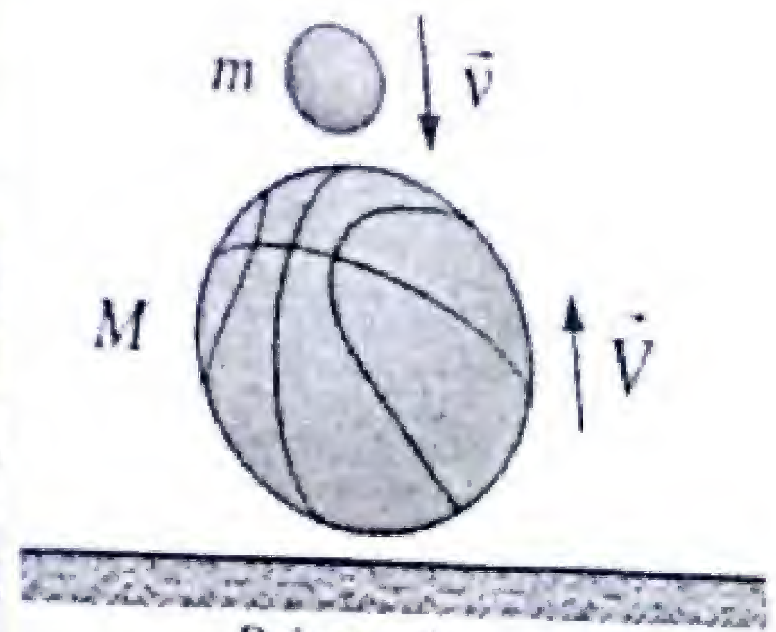
PR-5.38. ***Aunque Ud no lo crea: Rebote a altura mayor***

En una demostración de física de la USB, colocamos una pelota liviana de masa m (de tenis) encima de una pelota mas pesada, (de Baloncesto) de masa ($M >> m$) y a continuación se dejan caer las dos pelotas desde una cierta altura h. Suponiendo que los rebotes son perfectamente elásticos, demuestre que la pelota pequeña podría rebotar en principio hasta una altura que es *nueve veces* su altura inicial.

Solución: Es importante notar que las pelotas caen con igual aceleración, y por lo tanto, durante la caída no están en contacto físico. El primer evento es que la pelota pequeña aun esta bajando en el momento en que la pelota grande rebota del piso con una velocidad $\vec{V}$.

La velocidad de rebote de la pelota grande se determina aplicando la conservación de la energía:

$$Mgh = \frac{1}{2}MV^2 \quad \Rightarrow \quad V = \sqrt{2gh}$$



Primer choque:
La pelota grande rebota del piso Mientras la pequeña aun baja

Por otra parte, en ese instante la pelota pequeña está cayendo con velocidad v de igual valor que la velocidad V de subida de la grande. Después que se produce el segundo choque, la pelota grande sale con velocidad U y la pequeña con velocidad u, por conservación del momento lineal:

$$MV - mv = MU + mu \quad \Rightarrow \quad M(V-U) = m(u+v) \qquad (1)$$

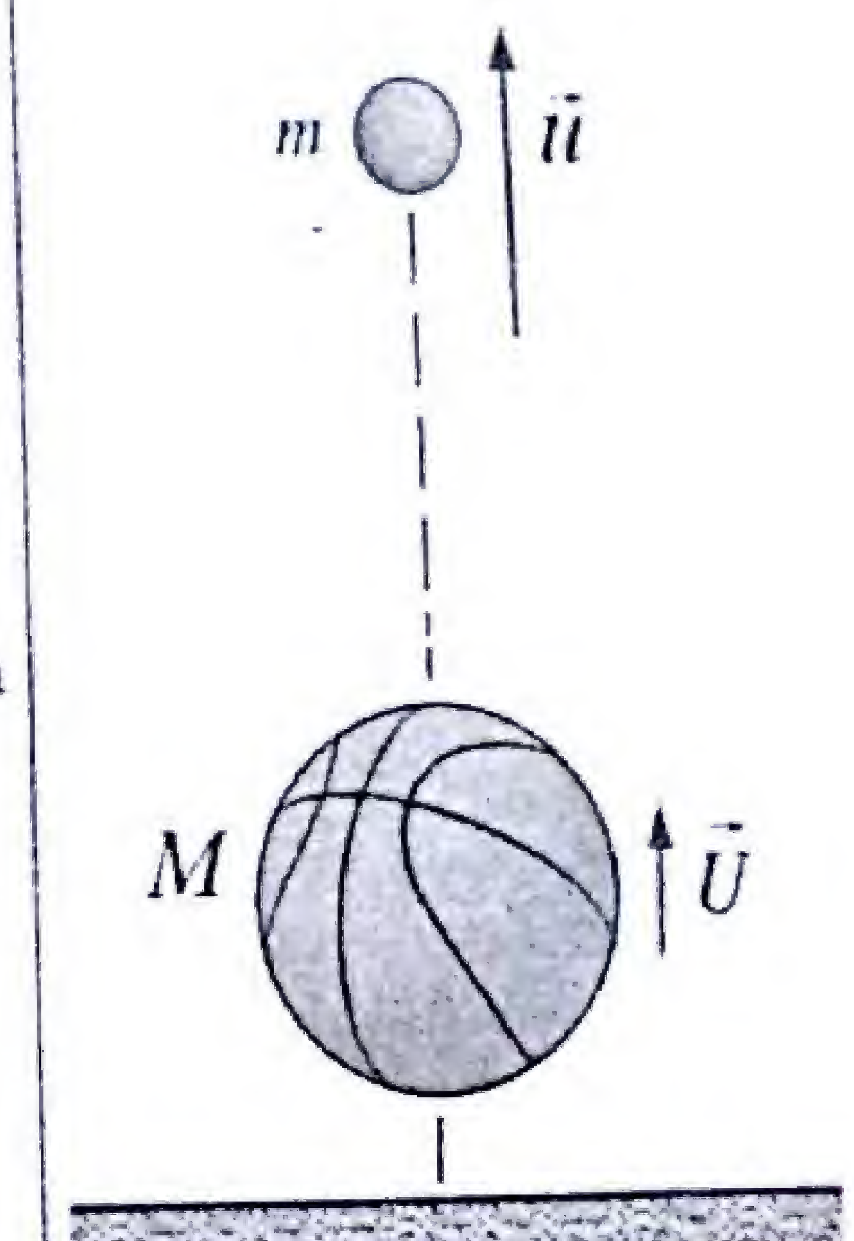
Si consideramos que el choque es perfectamente elástico se conserva también la energía cinética:

$$\frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}MU^2 + \frac{1}{2}mu^2 \quad \Rightarrow$$

$$M(V^2 - U^2) = m(u^2 - v^2) \qquad (2)$$

Dividiendo la ecuación (2) entre la ecuación (1), se tiene:

$$V + U = u - v \qquad (3)$$



Segundo choque:
La pelota pequeña bajando rebota de la grande que está subiendo

Podemos despejar U de esta ecuación y sustituirla en la ecuación (1), para hallar una expresión para u:

$$u = \frac{2MV + (M-m)v}{M+m}$$

Recordando que $v = V = \sqrt{2gh}$, hallamos:

$$u = (\frac{3M-m}{M+m})\sqrt{2gh}$$

Finalmente, la altura máxima H que alcanza la pelota pequeña después de rebotar de la grande vendrá dada por:

$$\frac{1}{2}mu^2 = mgH \quad \Rightarrow \quad H = (\frac{3M-m}{M+m})^2 h$$

En el caso óptimo, si se cumple la condición $M >> m$, entonces la altura alcanzada sería: $\underline{H = 9h}$

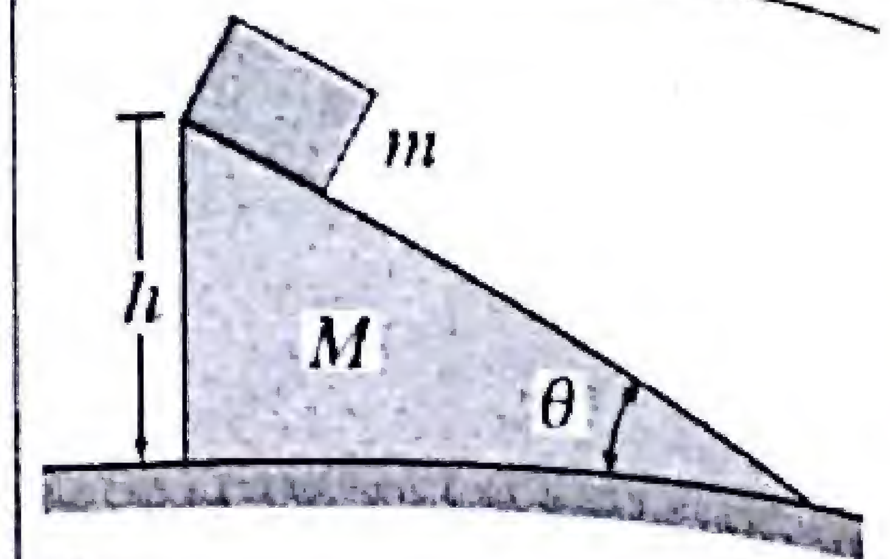
Respuesta:

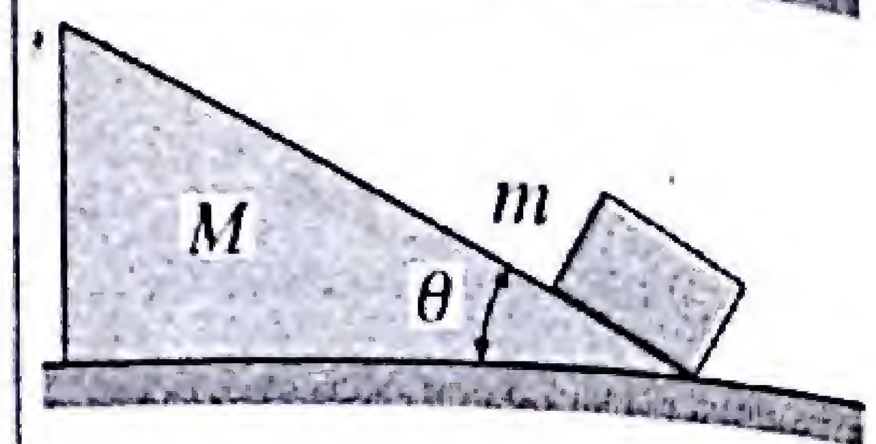
$H = 9h$
¡ Haz el experimento!

PR-5.39. *Al soltar el bloque, retrocede la cuña*

Un bloque de masa m está colocado sobre una cuña de masa M que, a su vez, se apoya sobre una mesa horizontal, tal como se muestra en la figura. Todas las superficies son lisas y sin fricción. El sistema cuña inicialmente en reposo y el bloque se suelta desde una altura h por encima de la mesa.

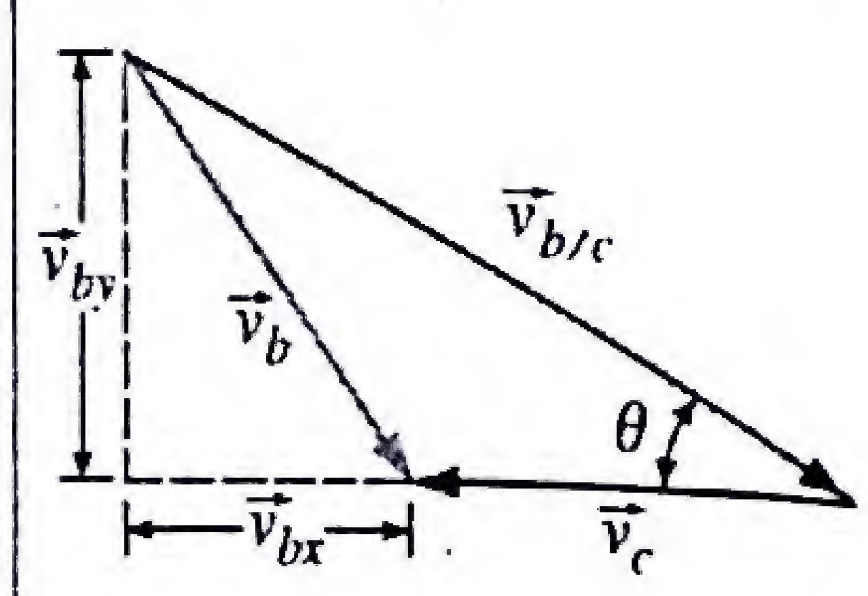
Determine la velocidad de la cuña en el instante en que el bloque toca la mesa.





Solución: La velocidad del bloque con respecto a la mesa, $\vec{v}_b$, es igual a la velocidad del bloque respecto a la cuña, $\vec{v}_{b/c}$, sumada vectorialmente a la velocidad de la cuña respecto a la mesa, $\vec{v}_c$:

$$\vec{v}_b = \vec{v}_{b/c} + \vec{v}_c$$



El bloque desciende por la cuña paralelamente al plano inclinado y la cuña se desplaza horizontalmente hacia la izquierda, de modo que los tres vectores forman el triángulo mostrado en la figura. De acuerdo a esta figura se deduce la relación:

$$tg\theta = \frac{v_{by}}{v_{bx} + v_c} \quad \Rightarrow \quad v_{by} = (v_{bx} + v_c)tg\theta \qquad (1)$$

El momento lineal en la dirección horizontal inicialmente es cero y este valor se conserva:

$$mv_{bx} - Mv_c = 0 \quad \Rightarrow \quad v_{bx} = (M/m)v_c \qquad (2)$$

Por otra parte la energía potencial inicial del bloque se convierte finalmente en energía cinética de la cuña y del bloque:

$$mgh = \frac{1}{2}Mv_c^2 + \frac{1}{2}m(v_{bx}^2 + v_{by}^2) \qquad (3)$$

Sustituyendo v_{bx} y v_{by} de las relaciones (1) y 2) en (3), encontramos la velocidad de la cuña:

$$v_c^2 = \frac{2ghm^2}{(M+m)[M + (M+m)tg^2\theta]} = \frac{2ghm^2 cos^2\theta}{(M+m)(M + msen^2\theta)}$$

Respuesta:

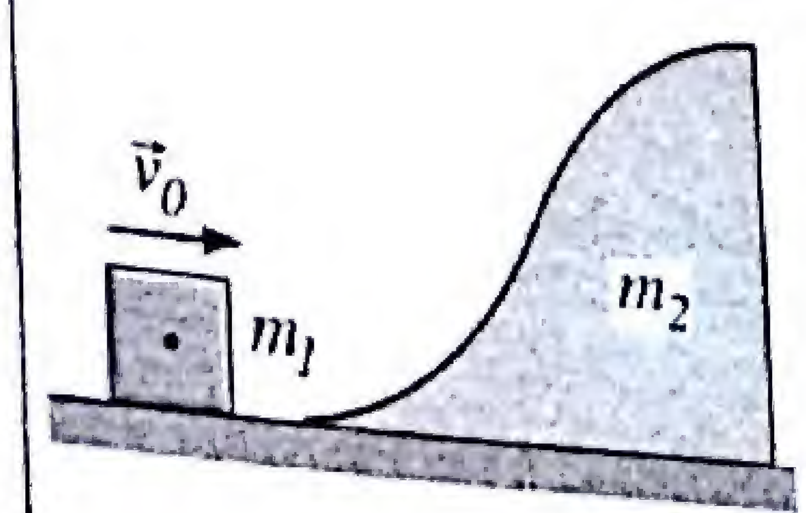
$$\boxed{v_c = -\sqrt{\frac{2ghm^2 cos^2\theta}{(M+m)(M+msen^2\theta)}}}$$

PR-5.40. *Sube por una rampa móvil y se devuelve*

Un bloque de masa $m_1 = 1$ kg desliza por un plano horizontal sin fricción a velocidad $\vec{v}_0 = 5$ m/s y choca con una rampa en reposo de masa $m_2 = 4$ kg. La rampa está libre de moverse sin fricción sobre el piso horizontal. A medida que el bloque sube por la rampa, ésta se mueve hacia la derecha. El bloque no llega a sobrepasar la altura máxima de la rampa.

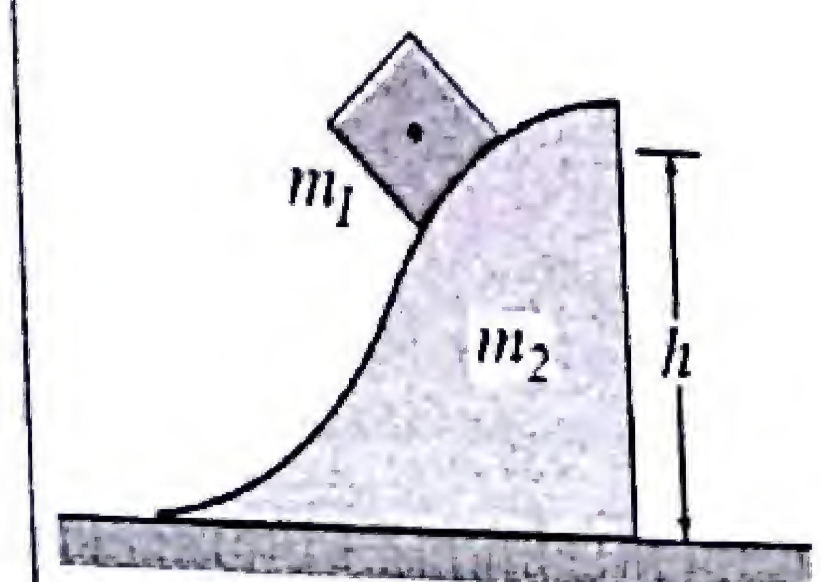
a) ¿Hasta que altura h sube el bloque por la rampa?

b) Halle las velocidades finales de la rampa y del bloque.



Solución: a) Cuando el bloque alcanza la altura máxima, su velocidad es horizontal e igual a la de la rampa en ese instante. La energía se conserva: $(K+U)_{ini} = (K+U)_{fin}$,

$$\frac{1}{2}m_1 v_0^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 + mgh$$



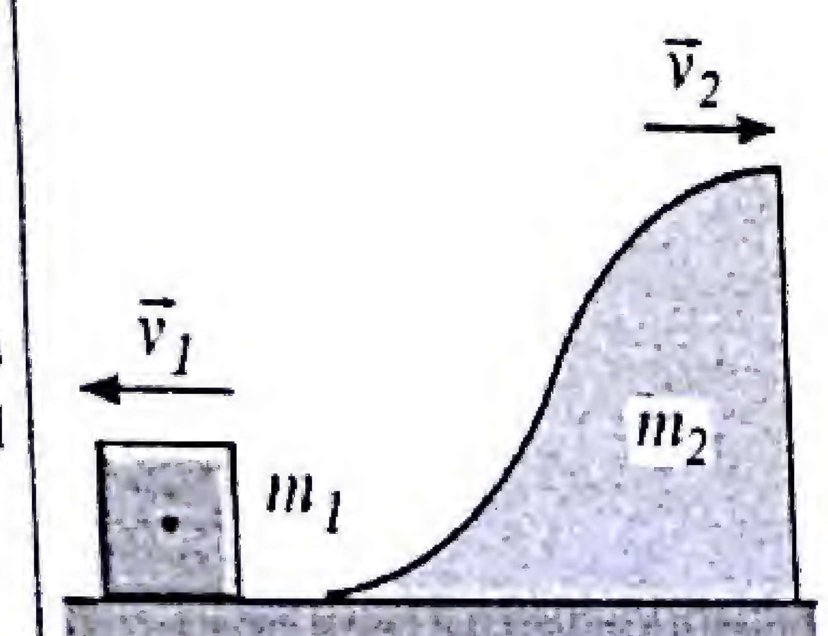
Además, el momento lineal horizontal se conserva:

$$\sum p_x: \quad m_1 v_0 = (m_1 + m_2)v$$

Eliminando v de estas dos ecuaciones, obtenemos la altura h:

$$h = \frac{v_0^2}{2g}\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) = \frac{(5\text{m/s})^2}{2(9{,}8\text{m/s}^2)}\left(\frac{4\text{kg}}{1\text{kg} + 4\text{kg}}\right) = 1.02\text{m}$$

b) Después del descenso, el bloque se desprende de la rampa y aplicamos la conservación de la energía y del momento lineal:



$$\frac{1}{2}m_1 v_0^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2$$

$$m_1 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

Eliminando v_0 de estas dos ecuaciones, obtenemos:

$$v_1 = -\left(\frac{m_2 + m_1}{m_2 + m_1}\right)v_0 = -\left(\frac{4\text{kg} - 1\text{kg}}{4\text{kg} + 1\text{kg}}\right)5\text{m/s} = -3\text{m/s}$$

$$v_2 = \left(\frac{2m_1}{m_2 + m_1}\right)v_0 = \left(\frac{2(1\text{kg})}{4\text{kg} + 1\text{kg}}\right)5\text{m/s} = 2\text{m/s}$$

Respuesta:

$$\boxed{\begin{aligned} h &= \frac{v_0^2}{2g}\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right) = 1.02\text{m} \\ v_1 &= -\left(\frac{m_2 + m_1}{m_2 + m_1}\right)v_0 = -3\text{m/s} \\ v_2 &= \left(\frac{2m_1}{m_2 + m_1}\right)v_0 = 2\text{m/s} \end{aligned}}$$

PR-5.41. *Bombero desciende deslizándose en un poste*

Al sonar la llamada de emergencia, un bombero de masa m = 70 kg desciende deslizándose por un poste que ofrece una fuerza de fricción constante, F = 180 N. Partiendo desde reposo, cae desde una altura h = 9,03 m sobre una plataforma de masa M = 30 kg y luego de hacer contacto comprime un resorte de constante elástica k = 8000 N/m:

a) ¿Cuál es su velocidad al chocar con la plataforma?

b) Halle la distancia x que se comprime el resorte.

Solución: a) El bombero desciende la distancia h, y antes de chocar con la plataforma alcanza la velocidad v_0. El trabajo de la fricción es igual a la variación de la energía mecánica: $W_{nc} = (K+U)_{fin} - (K+U)_{ini}$

$$-Fh = [\frac{1}{2}mv_0^2 + 0] - [0 + mgh] \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{2h(mg-F)}{m}}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2\text{x}9{,}03\text{m}(9{,}8\text{m/s}^2\text{x}70\text{kg} - 180\text{N})}{70\text{kg}}} = 11{,}4\text{m/s}$$

b) El choque del bombero con la plataforma es perfectamente inelástico y ocurre en un tiempo muy corto, de modo que el efecto de las fuerzas externas es despreciable y se conserva el momento lineal. Si v es la velocidad del sistema:

$$mv_0 = (M+m)v$$

$$v = \frac{m}{M+m}v_0 = \frac{70\text{kg}}{30\text{kg} + 70\text{kg}}11{,}43\text{m/s} = 8\text{m/s}$$

Cuando el bombero desciende con la plataforma la distancia x, el trabajo de la fricción es igual a la variación de la energía mecánica:

$$W_{nc} = (K+U)_{fin} - (K+U)_{ini}$$

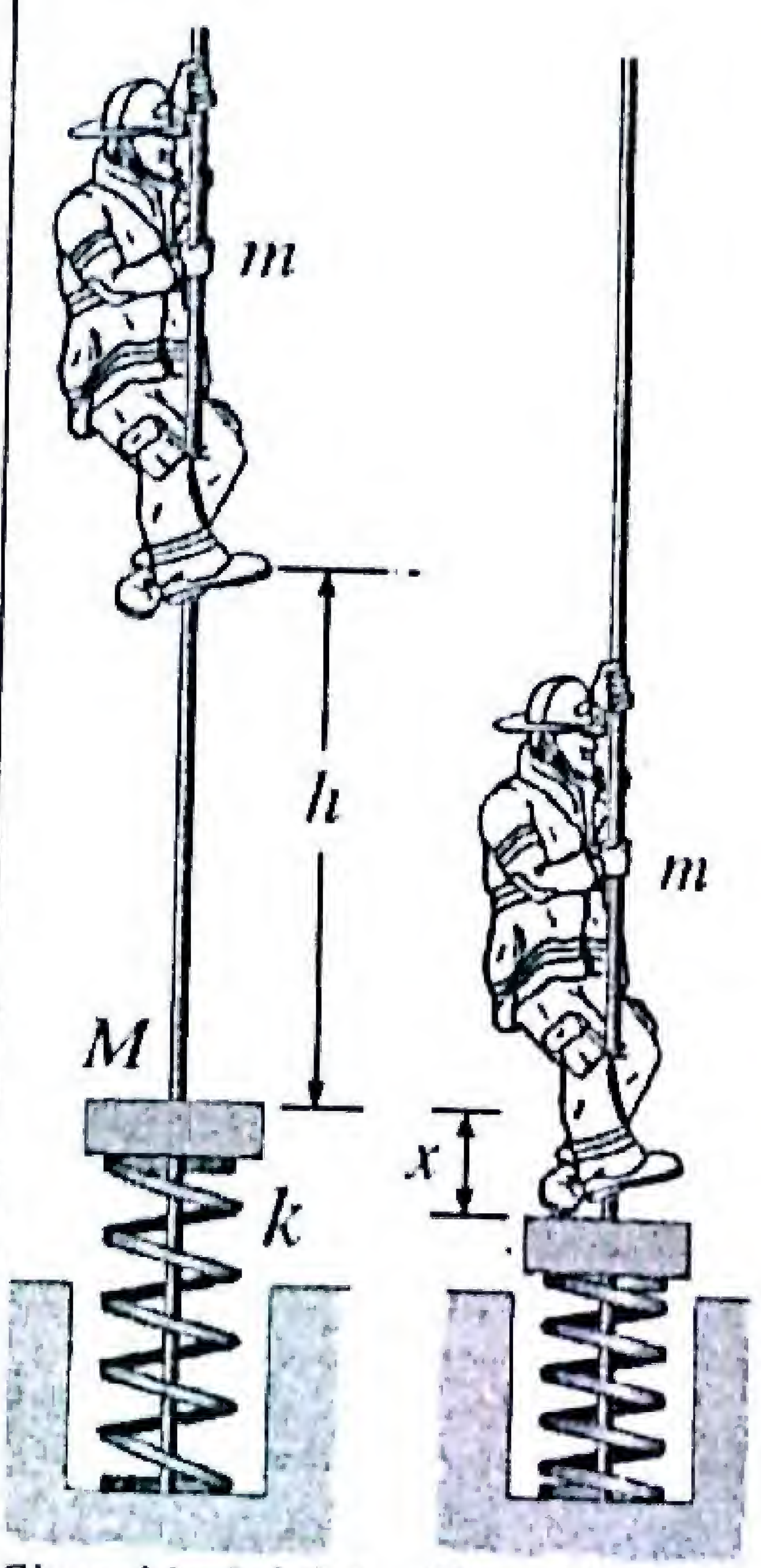
$$-Fx = [0 + 0 + \frac{1}{2}kx^2] - [\frac{1}{2}(M+m)v^2 + (M+m)gx]$$

$$\frac{1}{2}kx^2 - [(M+m)g - F]x - \frac{1}{2}(M+m)v^2 = 0$$

Sustituyendo los valores numéricos, se obtiene la ecuación:

$$4000x^2 - 800x - 3200 = 0$$

Cuya raíz positiva es: x = 1 m



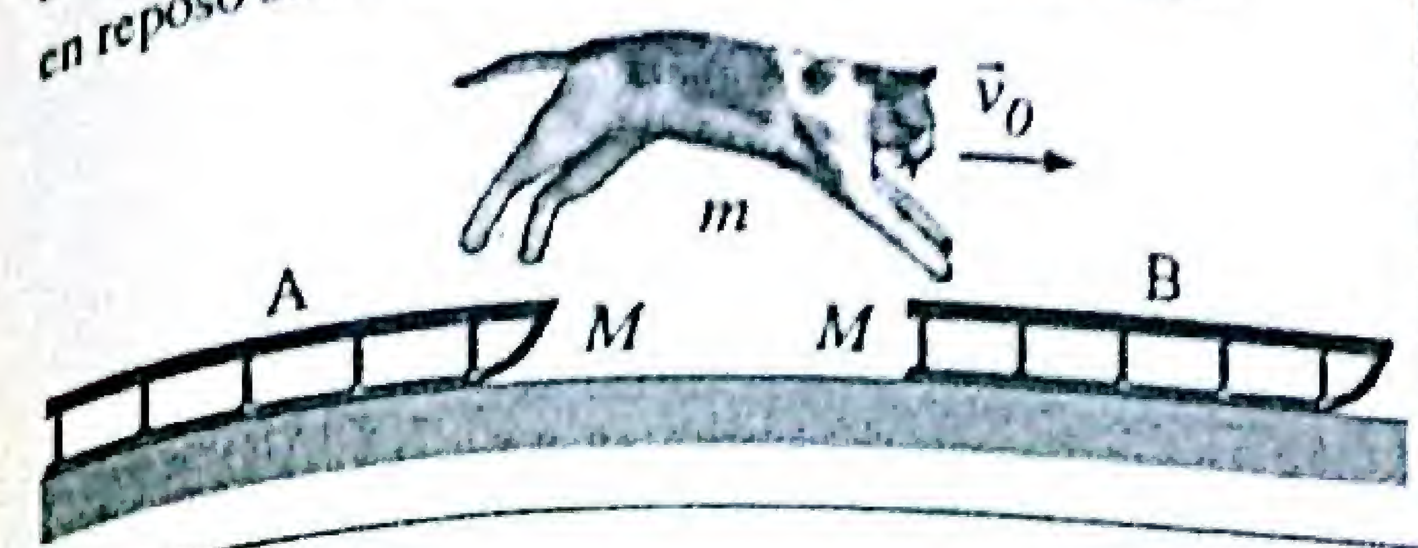
Situación Inicial Situación Final

Respuesta:

a) $v_0 = 11{,}4\text{m/s}$
b) $x = 1$ m

PR-5.42. *Una gata que brinca entre dos trineos*

Dos trineos de igual masa, M = 20 kg están inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal de hielo.



Una gata de masa m = 4 kg salta desde el trineo A hasta el trineo B, e inmediatamente se devuelve al trineo A. La gata se mueve en el aire con una velocidad horizontal v_0 = 2 m/s, con respecto al suelo. Halle las velocidades de ambos trineos después de los dos saltos.

Solución: Para el *salto de ida* aplicamos la conservación del momento lineal en la dirección horizontal.:

Desde A: $\quad 0 = Mv'_A + mv_0 \qquad (1)$

Hacia B: $\quad mv_0 = (M+m)v'_B \qquad (2)$

De la misma manera, para el *salto de regreso*:

Desde B: $\quad mv_0 = -mv_0 + Mv_B \qquad (3)$

Hacia A: $\quad -mv_0 + Mv'_A = (M+m)v_A \qquad (4)$

Despejando v_B de la relación (3) se obtiene:

$$v_B = (\frac{2m}{M})v_0 = (\frac{2(4\text{kg})}{20\text{kg}})2\text{m/s} = +\frac{4}{5}\text{m/s}$$

Similarmente, combinando (1) y (4) se obtiene v_A:

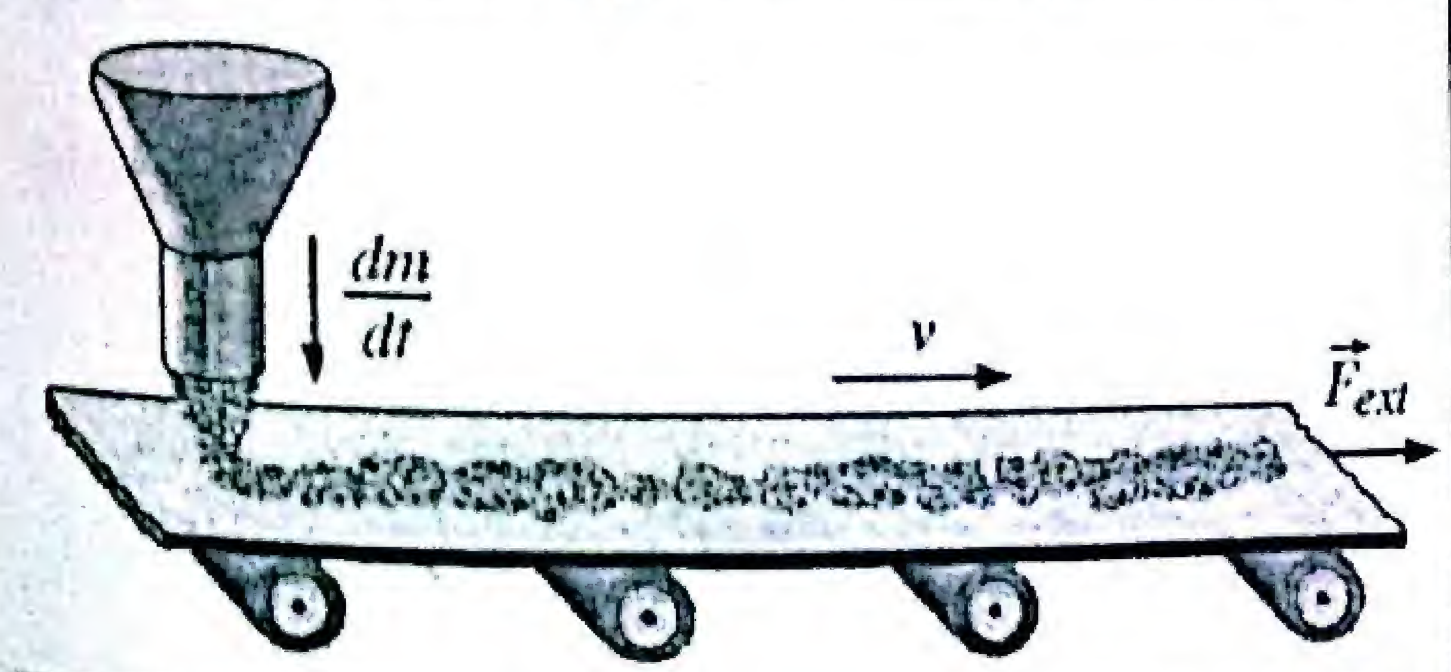
$$v_A = -(\frac{2m}{M+m})v_0 = -\frac{2(4\text{kg})}{(20+4)\text{kg}}2\text{m/s} = -\frac{2}{3}\text{m/s}$$

Respuesta:

$v_A = -\frac{2}{3}\text{m/s}$
$v_B = +\frac{4}{5}\text{m/s}$

PR-5.43. *Transportando una masa variable*

De una tolva fija cae arena sobre una banda muy larga que la transporta a una tasa dm/dt = 8 kg/s. La banda descansa sobre rodillos sin fricción y avanza a una velocidad v = 2 m/s, impulsada por una fuerza externa horizontal constante, F_{ext}, suministrada por un motor.



Determine:

a) La fuerza de roce ejercida por la banda sobre la arena.

b) La fuerza externa ejercida sobre la banda.

c) El trabajo realizado por la fuerza externa en un segundo.

d) La energía cinética adquirida por la arena en cada segundo.

e) ¿Por qué la respuesta obtenida en (e) es diferente a la de (d)?

Solución: a) Durante cada segundo, una masa de 8 kg adquiere desde el reposo una velocidad horizontal de 2 m/s. La fuerza de roce ejercida sobre la arena es igual al cambio del momento lineal:

$$F_r = \frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{p_x - 0}{\Delta t} = \frac{mv'_x - 0}{\Delta t} = \frac{8\text{kg}(2\text{m/s}) - 0}{(1\text{s})} = 16\text{N}$$

a) Para mantener la banda a velocidad constante, la fuerza neta debe ser cero. Sobre la banda se ejercen dos fuerzas: la de fricción con la arena $\vec{F}_r$ y la ejercida por el motor $\vec{F}_{ext}$, entonces:

$$\vec{F}_{ext} + \vec{F}_r = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{ext} = -\vec{F}_r \quad \Rightarrow \quad |\vec{F}_{ext}| = 16\text{N}$$

c) El trabajo realizado por la fuerza externa en un segundo es:

$$\Delta W_{ext} = F_{ext}\Delta x = F_{ext} v \Delta t = (16\text{N})(2\text{m/s})(1\text{s}) = 32\text{J}$$

d) La energía cinética adquirida por la arena en cada segundo es:

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(8\text{kg})(2\text{m/s})^2 = 16\text{J}$$

e) Vemos que $\Delta W_{ext} = 2\Delta K$ y solo la mitad del trabajo realizado aparece como energía cinética de la arena. Esta aparente falla en el teorema del trabajo-energía tiene una explicación. Cuando los granos de arena caen, primero ocurre un deslizamiento con la banda mientras la arena va aumentando su velocidad desde cero hasta v. La energía que falta es la energía térmica que se desarrolla por fricción durante este proceso de aceleración.

Respuesta:

a) $F_r = 16\text{N}$
b) $|\vec{F}_{ext}| = 16\text{N}$
c) $\Delta W_{ext} = 32\text{J}$
d) $\Delta K = 16\text{J}$
e) $\Delta K = \Delta W_{ext}/2$

PR-5.44. ***¿Qué es lo que empuja a un cohete?***

Un cohete puede acelerarse en el espacio debido a la expulsión de masa gaseosa; ésta adquiere cierta cantidad de movimiento y el cohete recibe una cantidad de movimiento compensadora en la dirección opuesta. Suponga un cohete en el espacio vacío que tiene una masa total de 14000 kg, e inicialmente en reposo con relación a Tierra. El motor se enciende y en la combustión ha expulsado y consumido 10000 kg de combustible a razón de 150 kg/s y a una velocidad relativa al cohete, v_g = 1500 m/s.

a) Si pudiéramos despreciar todas las fuerzas externas como la gravedad, halle la velocidad final alcanzada.
b) Determine la fuerza que empuja el cohete.

Solución: a) Supongamos que en el tiempo t la masa inicial del cohete mas el combustible es $(M + \Delta m)$ y su velocidad v. Poco tiempo después $(t + \Delta t)$, el cohete expulsa una masa Δm de gas y la velocidad del cohete se incrementa a $(v + \Delta v)$. Si el gas se expulsa a una velocidad v_g con relación al cohete, entonces, con relación a Tierra su velocidad es $(v - v_g)$. Por conservación del momento lineal:

$$(M + \Delta m)v = M(v + \Delta v) + \Delta m(v - v_g)$$

Simplificando:

$$M\Delta v = v_g \Delta m$$

El incremento de gas expulsado, Δm, corresponde a una disminución igual de la masa del cohete, $\Delta m = -\Delta M$. Si se pasa al límite cuando $\Delta t \to 0$, la expresión anterior queda:

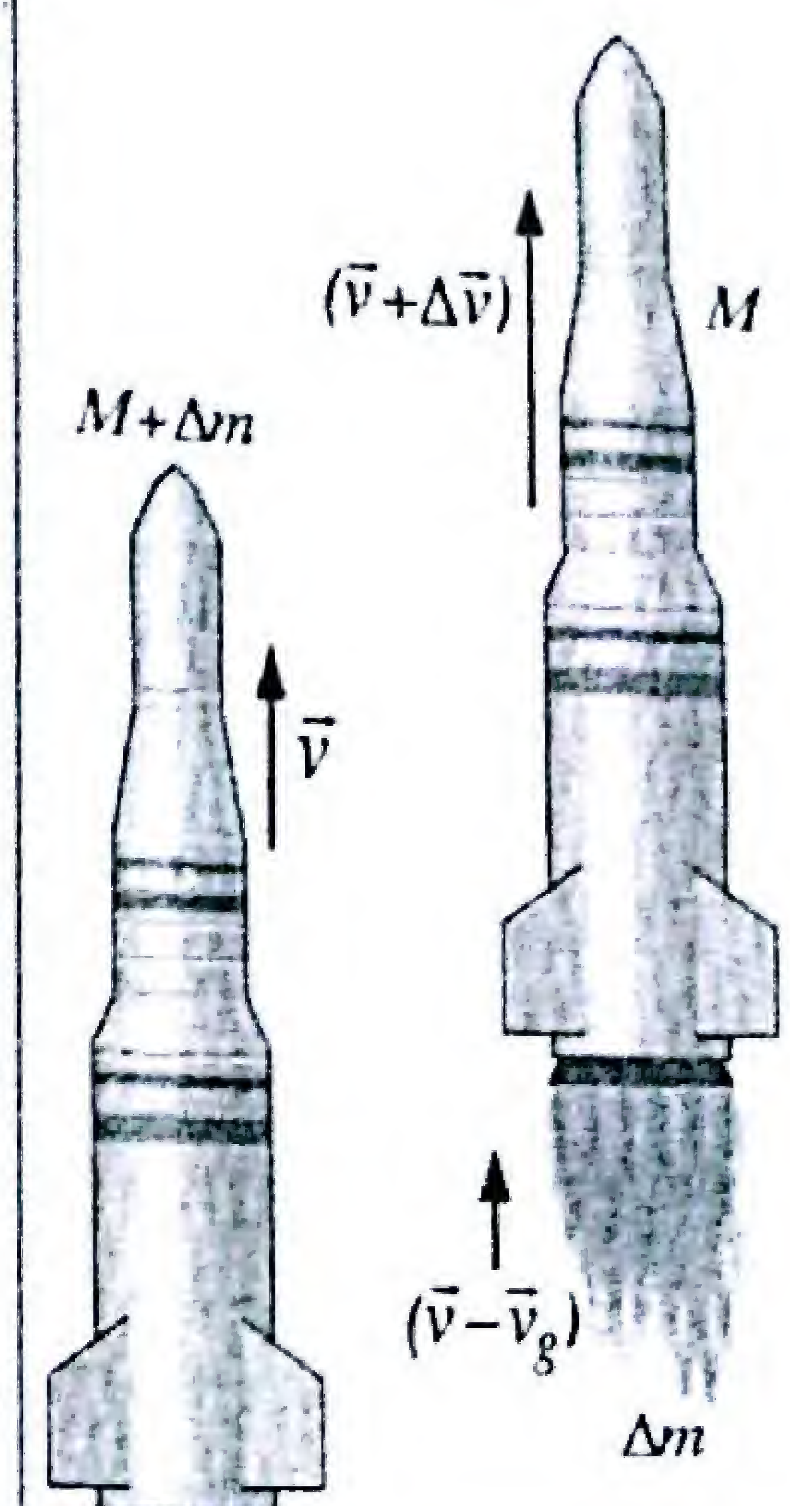
$$M dv = -v_g dM$$

Integrando desde la masa inicial, M_0, hasta la final, M_f, se obtiene

$$\int_{v_o}^{v_f} dv = -v_g \int_{M_o}^{M_f} \frac{dM}{M}$$

$$v_f = v_0 + v_g \ln\left(\frac{M_0}{M_f}\right)$$

$$v_f = 0 + (1500\text{m/s})\ln\left(\frac{14000\text{kg}}{14000\text{kg} - 10000\text{kg}}\right) = 1880\text{m/s}$$



Instante t Instante $(t+\Delta t)$

b) La fuerza del empuje que recibe el cohete debido a los gases expulsados, se obtiene a partir de la expresión:

$$M dv = -v_g dM:$$

Es decir:

$$F_e = M\frac{dv}{dt} = |v_g \frac{dM}{dt}| = (1500\text{m/s})(150\text{kg/s}) = 2{,}25\text{x}10^5\text{N}$$

Respuesta:

a) $v_f = v_0 + v_g \ln\left(\frac{M_0}{M_f}\right) = 1880\frac{\text{m}}{\text{s}}$
b) $F_e = |v_g \frac{dM}{dt}| = 2{,}25\text{x}10^5\text{N}$

VERIFICA TU COMPRENSIÓN

PE-5.01. ***Solo una de estas afirmaciones es verdadera***

a) Un cuerpo puede poseer momento lineal y no necesariamente poseer energía.

b) El momento lineal se conserva solo cuando se conserva la energía mecánica.

c) El momento lineal se conserva tanto en las colisiones elásticas como en las inelásticas.

d) En un choque perfectamente inelástico se pierde toda la energía cinética de las partículas.

e) En un choque perfectamente elástico la energía cinética de cada partícula es la misma antes y después del choque.

PE-5.02. ***Energía cinética vs momento lineal***

¿Si la energía cinética de un objeto se duplica qué sucede con momento lineal?

a) es 2 veces mayor.

b) es 4 veces mayor.

c) es 3 veces mayor.

d) es $\sqrt{2}$ veces mayor.

e) no necesariamente debe variar.

PE-5.03. ***El golpe en la caída: ¿De qué depende?***

Un niño travieso cae desde lo alto de un árbol y choca contra el suelo. La fuerza que ejerce el suelo sobre el niño...

a) Es igual a su peso.

b) Depende únicamente de la altura de caída.

c) Depende únicamente del peso del niño.

d) Depende únicamente de la naturaleza del suelo.

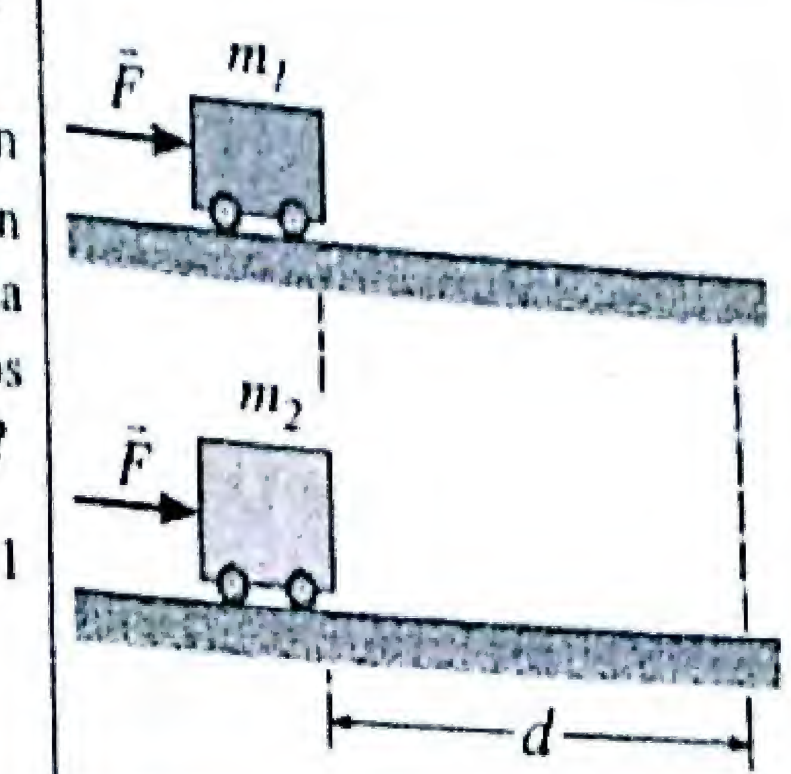
e) Depende de: la altura de caída, el peso del niño, la postura de su cuerpo y la naturaleza del suelo.

PE-5.04. ***¿Cuál carrito adquiere mayor momento lineal?***

Dos carros de masas respectivas, m_1 y $m_2 = 4m_1$, están inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción. Si a ambos se le aplica la misma fuerza horizontal constante, ¿cómo se relacionan sus momentos lineales después de haber recorrido la misma distancia d?

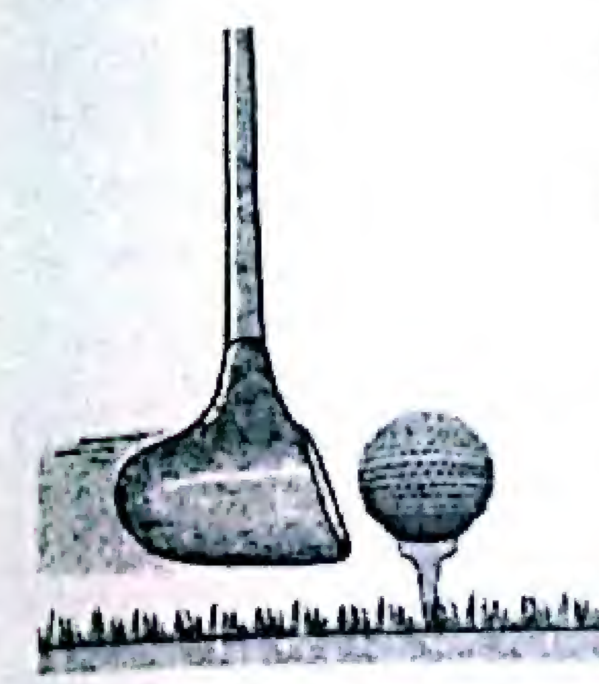
a) $p_2 / p_1 = 4$ b) $p_2 / p_1 = 2$ c) $p_2 / p_1 = 1$

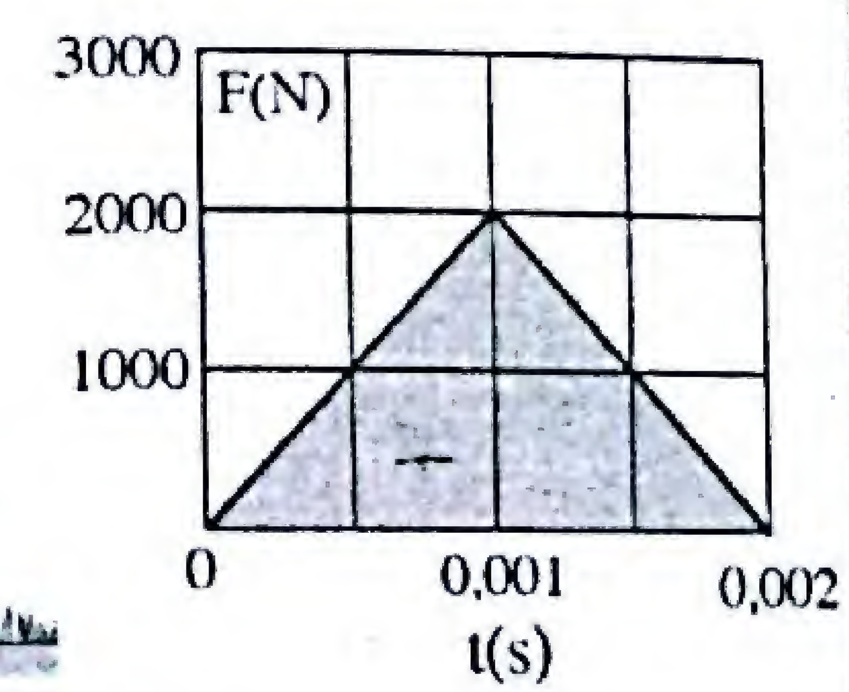
d) $p_2 / p_1 = 1/2$ e) $p_2 / p_1 = 1/4$



PE-5.05. ***Golpe sobre una pelota de golf***

Una pelota de golf de masa m = 0,05 kg es golpeada. Suponga que la fuerza ejercida sobre la pelota durante el contacto con el palo varía en la forma mostrada:





¿Cuál es la velocidad con que sale la pelota?

a) 4 m/s

b) 20 m/s

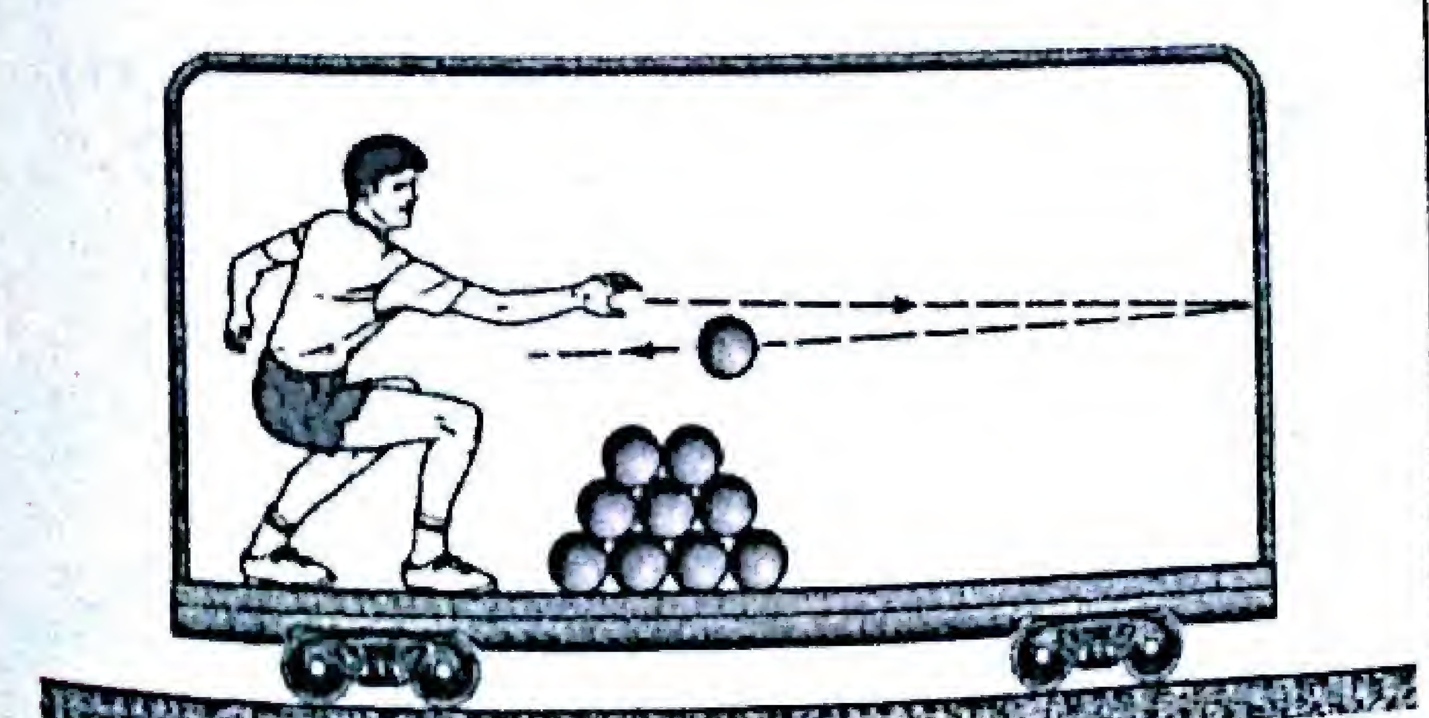
c) 40 m/s.

d) 80 m/s

e) 200 m/s.

PE-5.06. ***Tratando de impulsar el vagón a pelotazos***

Un vagón completamente cerrado, está inicialmente en reposo sobre unos rieles sin fricción.



Dentro del vagón, un estudiante lanza pelotas hacia la pared opuesta, las cuales rebotan elásticamente y regresan hacia él. Podemos afirmar que ....

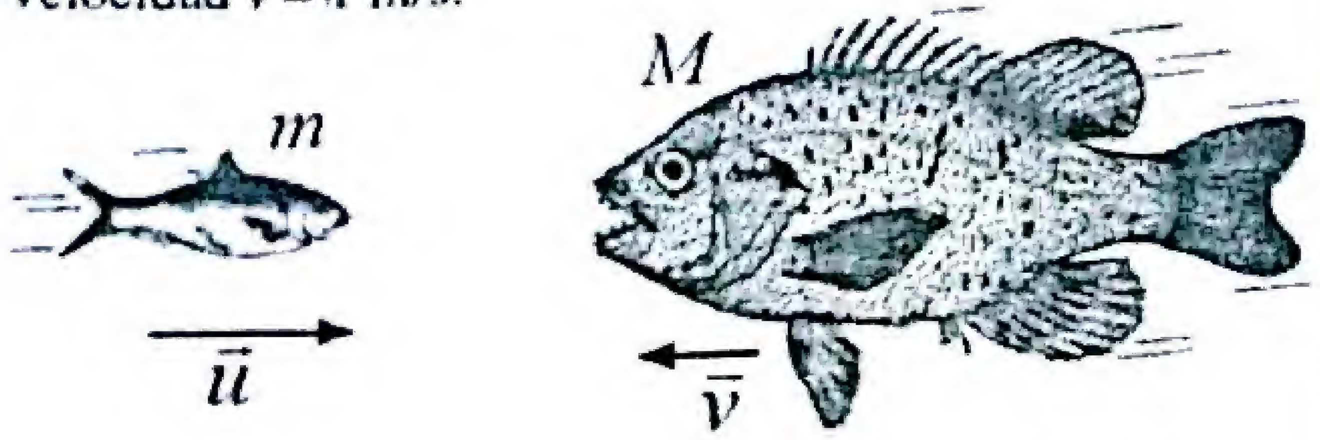
a) El vagón no se desplaza.

b) El vagón se desplaza hacia la derecha.

c) El vagón se desplaza hacia la izquierda.

PE-5.07. *El pez mas grande se traga al mas pequeño*

Un pececito de masa $m = 0{,}5$ kg que nada hacia la derecha con una velocidad $u = 2$ m/s es tragado por un pez grande de masa $M = 4{,}5$ kg que nada hacia la izquierda con una velocidad $v = 1$ m/s.

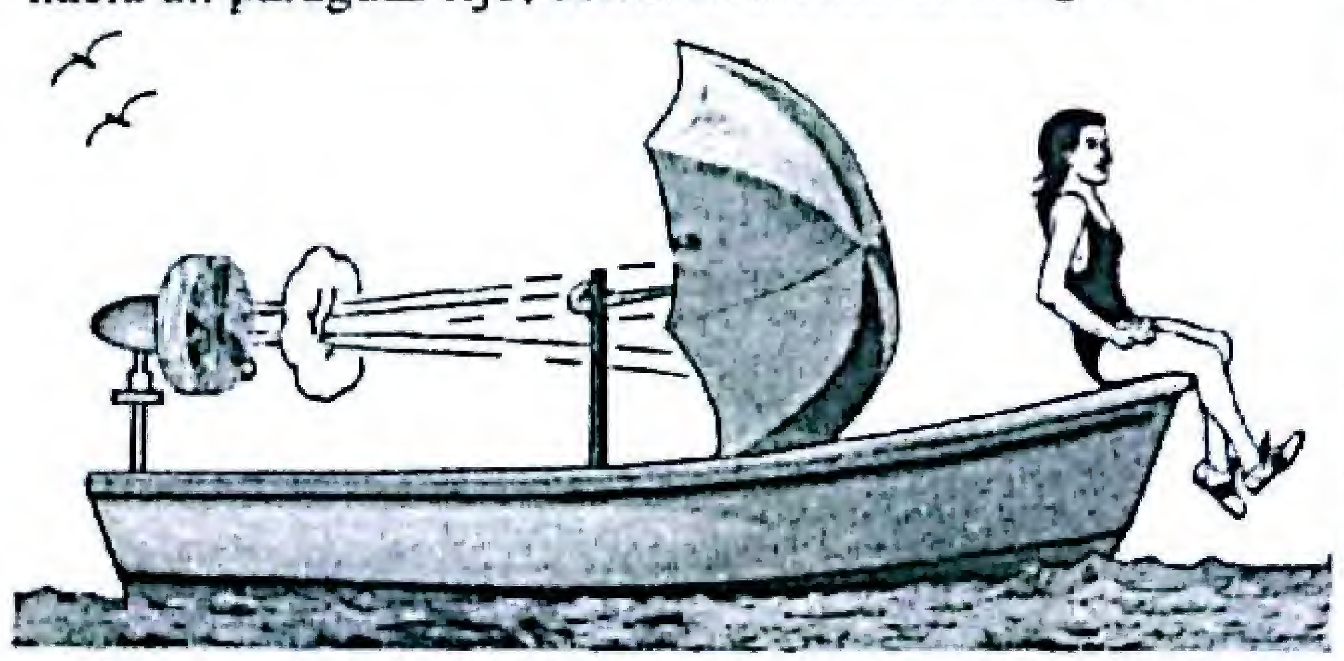


¿Cuál será la nueva velocidad del pez grande inmediatamente después de haberse tragado al pequeño?

a) 0,5 m/s
b) 0,7 m/s
c) 1,0 m/s
d) 1,5 m/s
e) 2 m/s

PE-5.08. *¿ Se moverá el velero ?*

En un día en que no sopla viento, una persona trata de impulsar su velero mediante un ventilador que funciona con baterías, colocándolo de forma tal que sopla el aire hacia un paraguas fijo, como se indica en la figura.



Mediante este método podemos afirmar que...

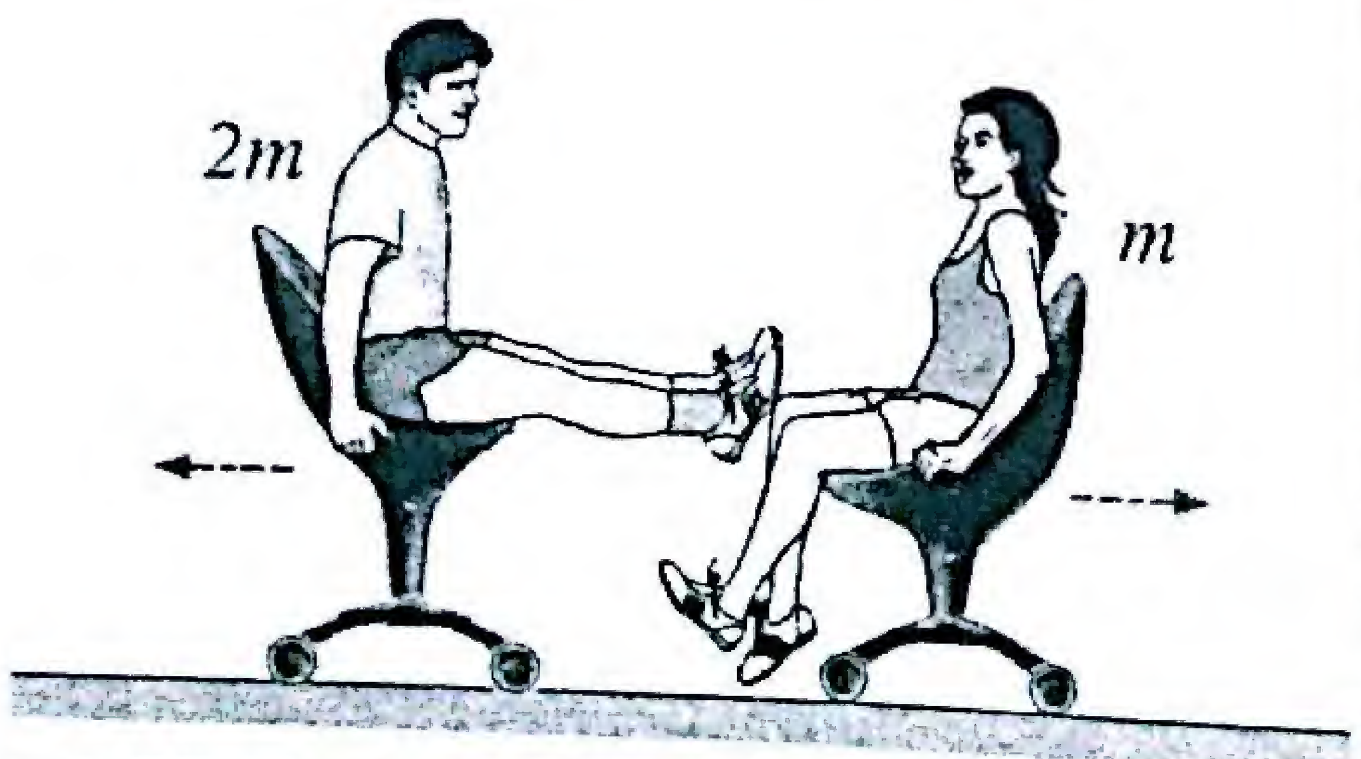
a) el velero se desplazará hacia la derecha.

b) el velero se desplazará hacia la izquierda.

c) es imposible desplazar el velero.

PE-5.09. *Ellos son muy impulsivos*

Teodoro y Dorotea están sentados sobre sillas provistas de ruedas. Las masas (incluidas las sillas) de Dorotea y de Teodoro son m y $2m$, respectivamente. Teodoro se apoya sobre Dorotea, toma impulso y sale hacia atrás.

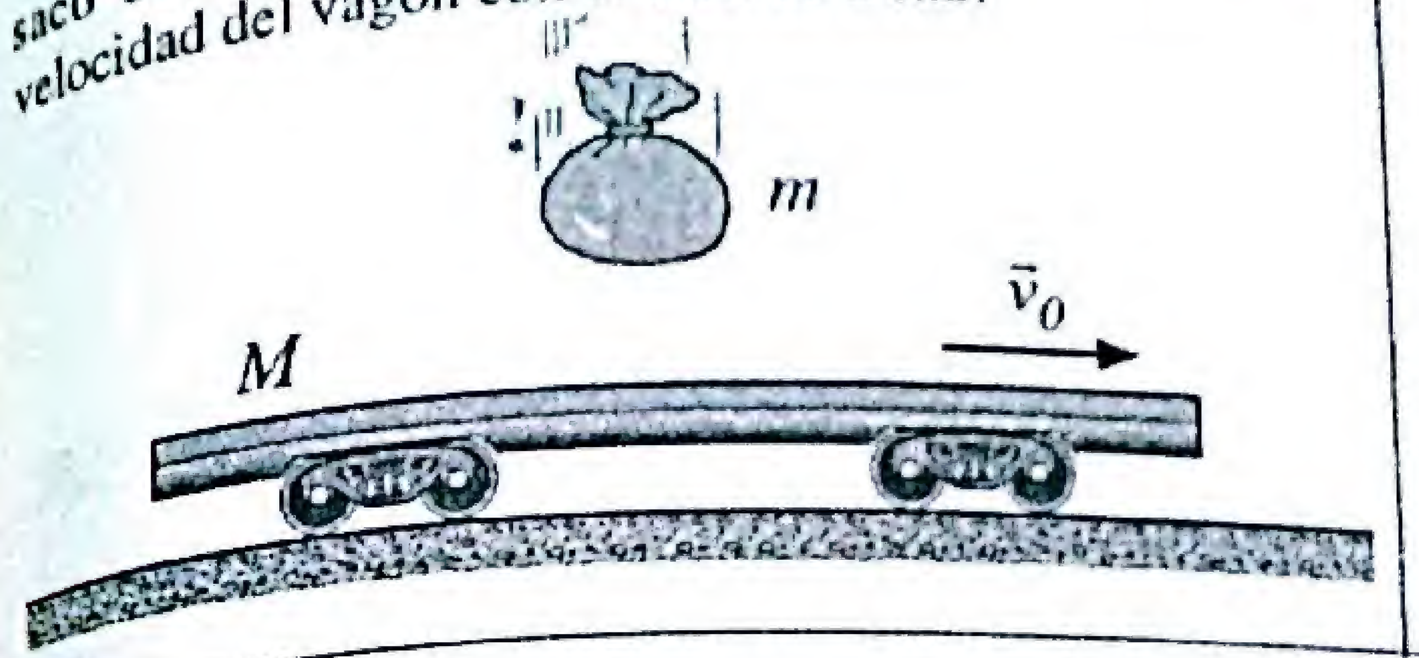


Si se desprecia la fricción y se comparan tanto los valores de las energías cinéticas, K, como las cantidades de movimiento P, de Dorotea y de Teodoro, entonces...

a) $K_D > K_T$ y $P_D > P_T$
b) $K_D > K_T$ y $P_D = P_T$
c) $K_D > K_T$ y $P_D < P_T$
d) $K_D < K_T$ y $P_D = P_T$
e) $K_D = K_T$ y $P_D = P_T$

PE-5.10. *Un saco cae sobre el vagón en movimiento*

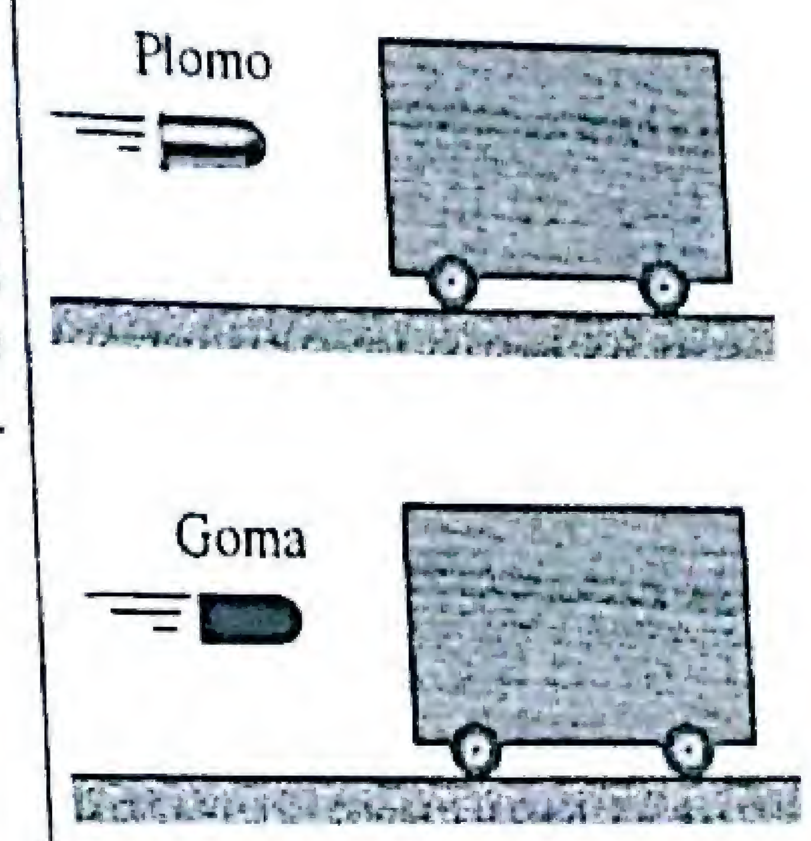
Un vagón de masa M se desplaza horizontalmente sobre rieles sin fricción con una velocidad v_o. Se deja caer un saco de arena cuya masa es m. ¿Cuál será la nueva velocidad del vagón con el saco de arena?



a) $v = (\frac{m}{M})v_0$
b) $v = (\frac{M}{m})v_0$
c) $v = (\frac{M}{M+m})v_0$
d) $v = (\frac{M+m}{m})v_0$
e) $v = (\frac{m}{M+m})v_0$

PE-5.11. *Bala de goma vs. bala de plomo.*

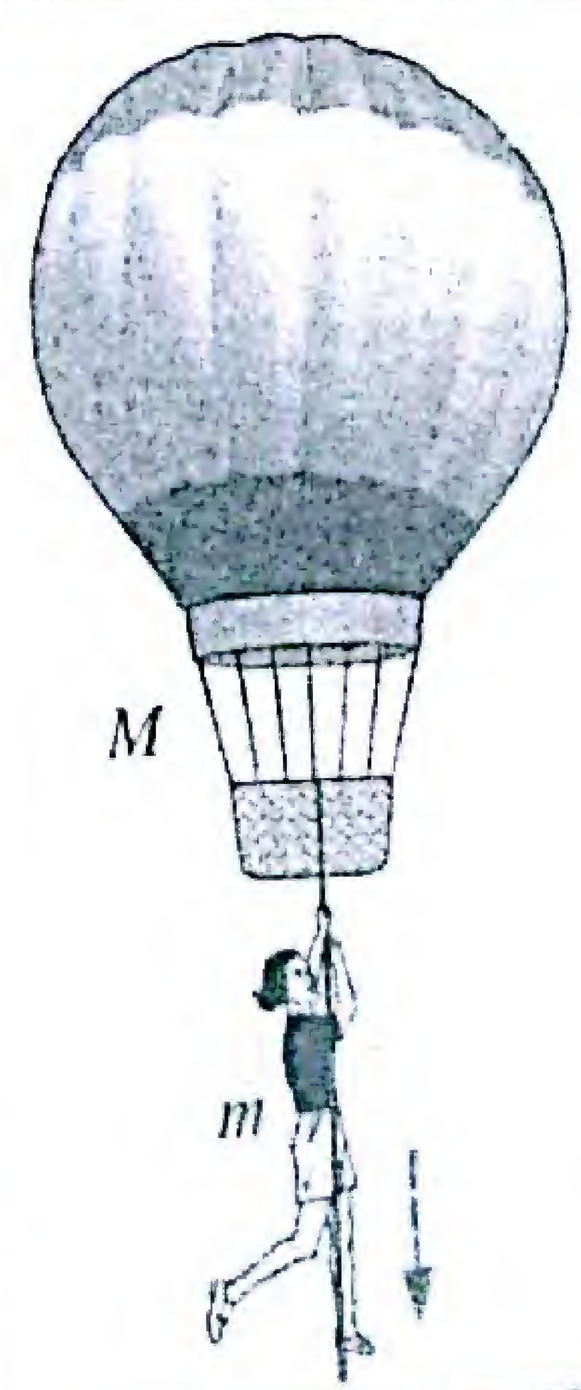
Una bala de plomo y otra de goma tienen igual masa y se disparan con igual velocidad sobre un bloque de madera maciza. Se observa que la bala de plomo se incrusta en la madera mientras que la bala de goma rebota. El bloque de madera puede moverse sobre una superficie sin fricción. Podemos afirmar que…



a) La de goma da al carrito mas momento lineal.
b) La de plomo da al bloque mas momento lineal.
c) Ambas balas dan al bloque igual momento lineal

PE-5.12. *Tratando de bajarse del globo*

Un globo de masa M lleno de helio, está inicialmente estacionario respecto al suelo. Una persona de masa m trata de descender por una cuerda suspendida del globo. Si la persona baja con velocidad v_o con respecto al globo, ¿con qué velocidad sube el globo con respecto al suelo?



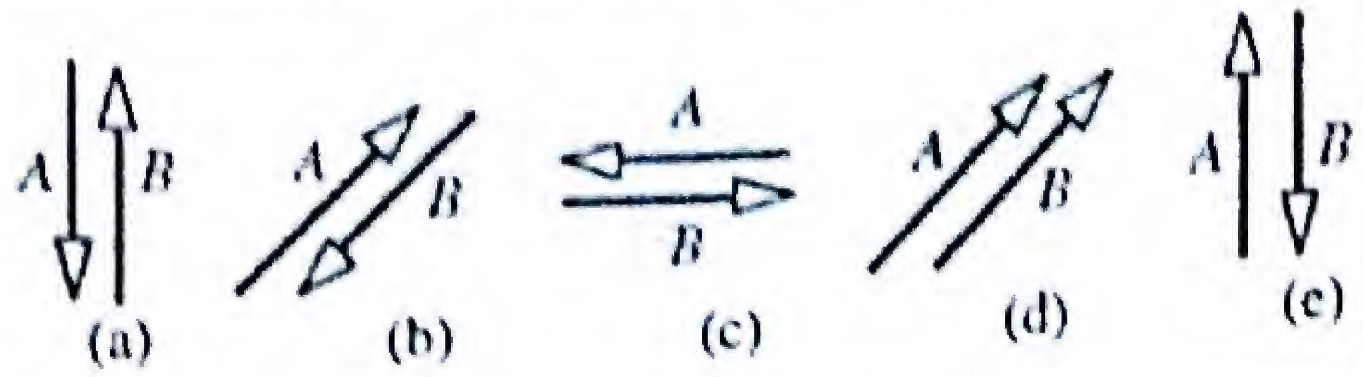
a) $v = (\frac{M}{M-m})v_0$, b) $v = (\frac{m}{M-m})v_0$

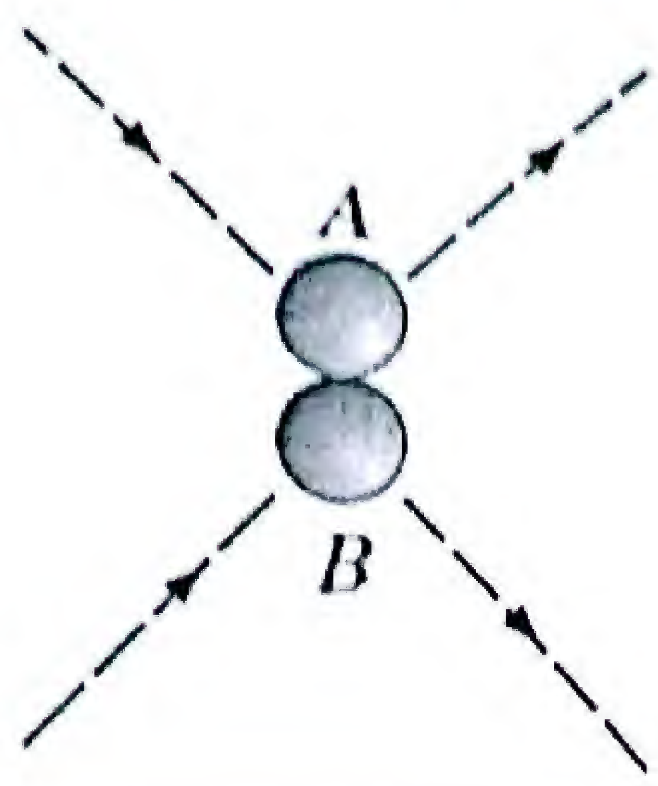
c) $v = (\frac{M}{M+m})v_0$, d) $v = (\frac{M+m}{m})v_0$

e) $v = (\frac{m}{M+m})v_0$

PE-5.13. *Impulso sobre bolas de billar*

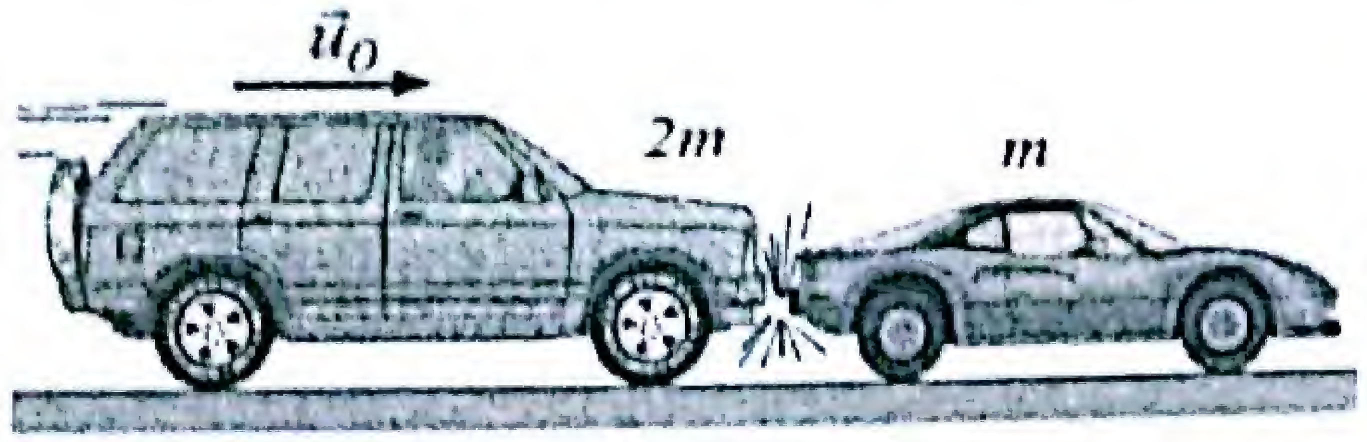
El diagrama de la derecha ilustra el camino que siguen dos bolas de billar, A y B que chocan ¿Cuál de los siguientes pares de flechas representa mejor la dirección del vector impulso recibido por cada bola?





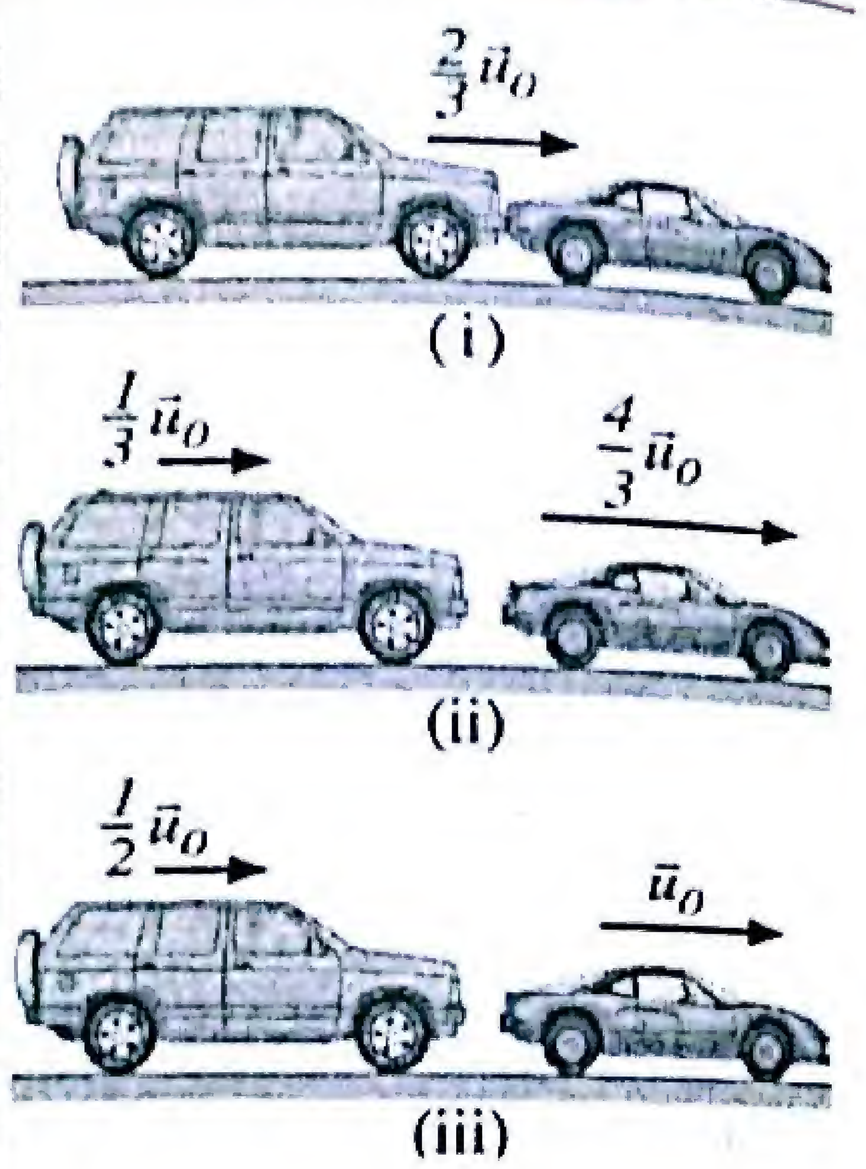
PE-5.14. *Colisiones posibles*

Un camión de masa $2m$ viaja con una rapidez u_o y choca con un carro de masa m que está en reposo en la vía.



Si despreciamos la fricción con la carretera, ¿cuál de las tres situaciones mostradas puede ser posible inmediatamente después del choque?

a) Sólo la *(i)*, b) Solo la *(ii)*, c) Solo la *(iii)*, d) Todas



PE-5.15. *Un jalón brusco del mantel y.........*

En una demostración de física de la USB, colocamos varios objetos sobre una mesa y cuando retiramos el mantel bruscamente, los objetos quedan casi estacionarios. Esto es debido a que..

a) Así lo estipula la tercera ley de Newton.

b) Los objetos son mas livianos que el mantel.

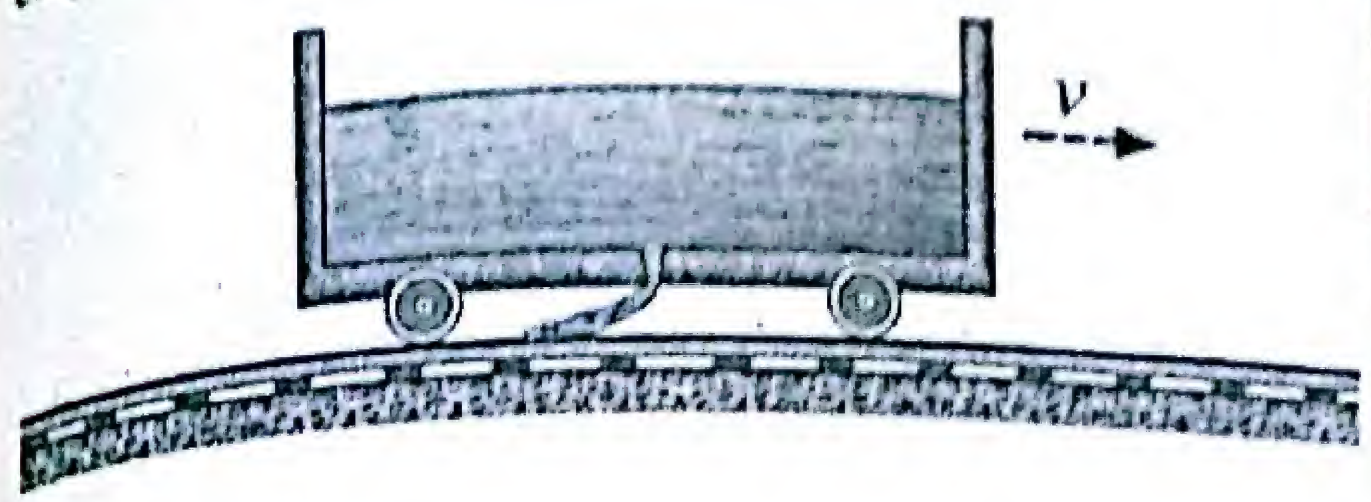
c) Sobre ellos no actúa la fuerza de gravedad.

d) La fuerza de fricción del mantel sobre el objeto ($F\Delta t = m\Delta v$) ocurre en un tiempo muy corto y $\Delta v \approx 0$.

e) Según la tercera ley de Newton la fuerza sobre el mantel es hacia adelante mientras que sobre el objeto es hacia atrás.

PE-5.16. *El vagón en movimiento va botando agua*

Un vagón lleno de agua se mueve horizontalmente a cierta velocidad sobre rieles sin fricción y de repente empieza a escapar agua por un hueco en el piso.



El efecto del agua derramada sobre la velocidad v del vagón y sobre su energía cinética K es..

a) v no cambia y K disminuye

b) v aumenta y K disminuye

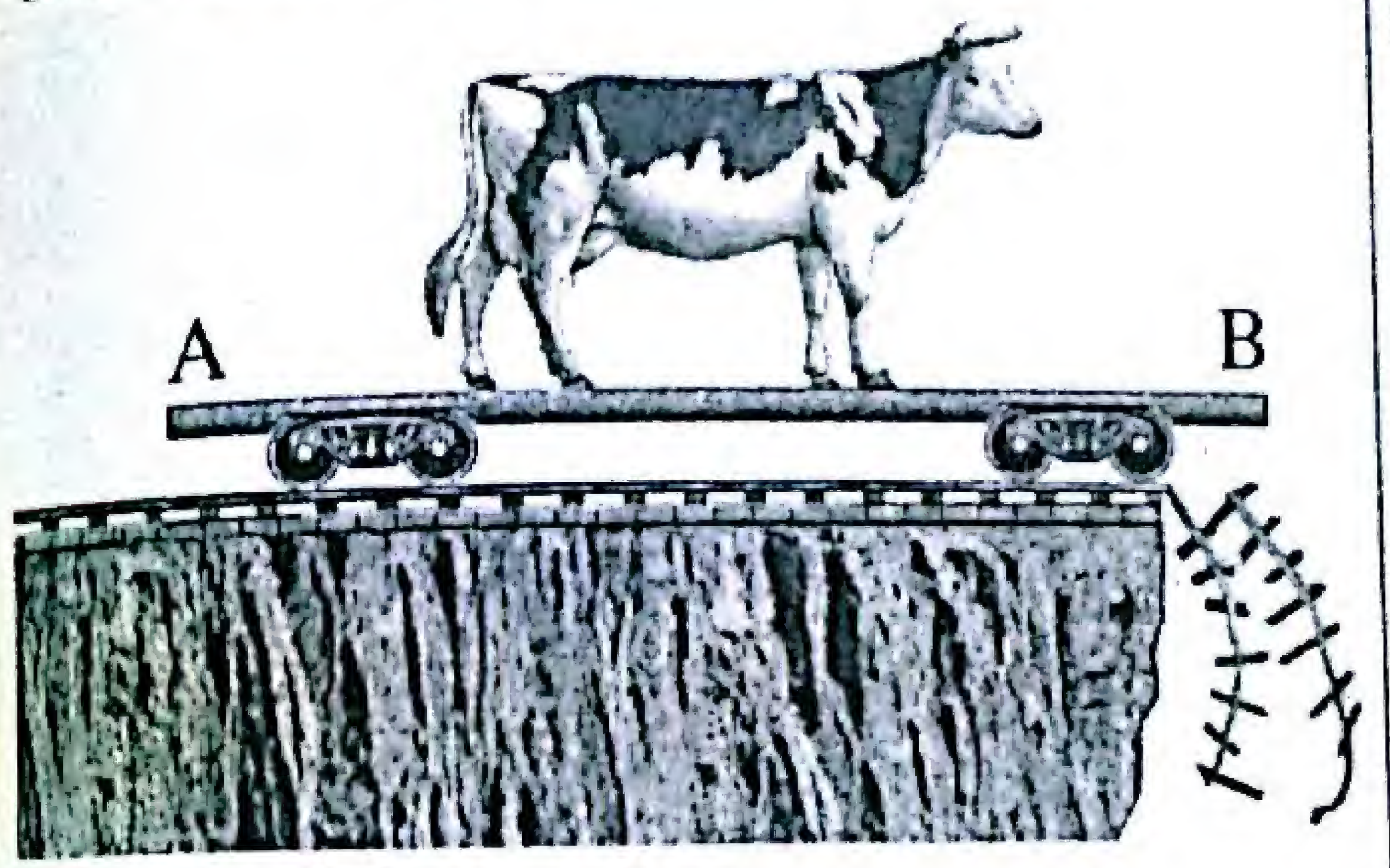
c) v disminuye y K aumenta

d) v aumenta y K aumenta

e) v disminuye y K disminuye

PE-5.17. *Un paso que podría ser fatal*

Una vaca quedó en el medio de un vagón sobre rieles descarrilados a la orilla de un barranco.



Si la vaca está a punto de dar un paso, entonces el riesgo de caer al barranco sería *mayor*...

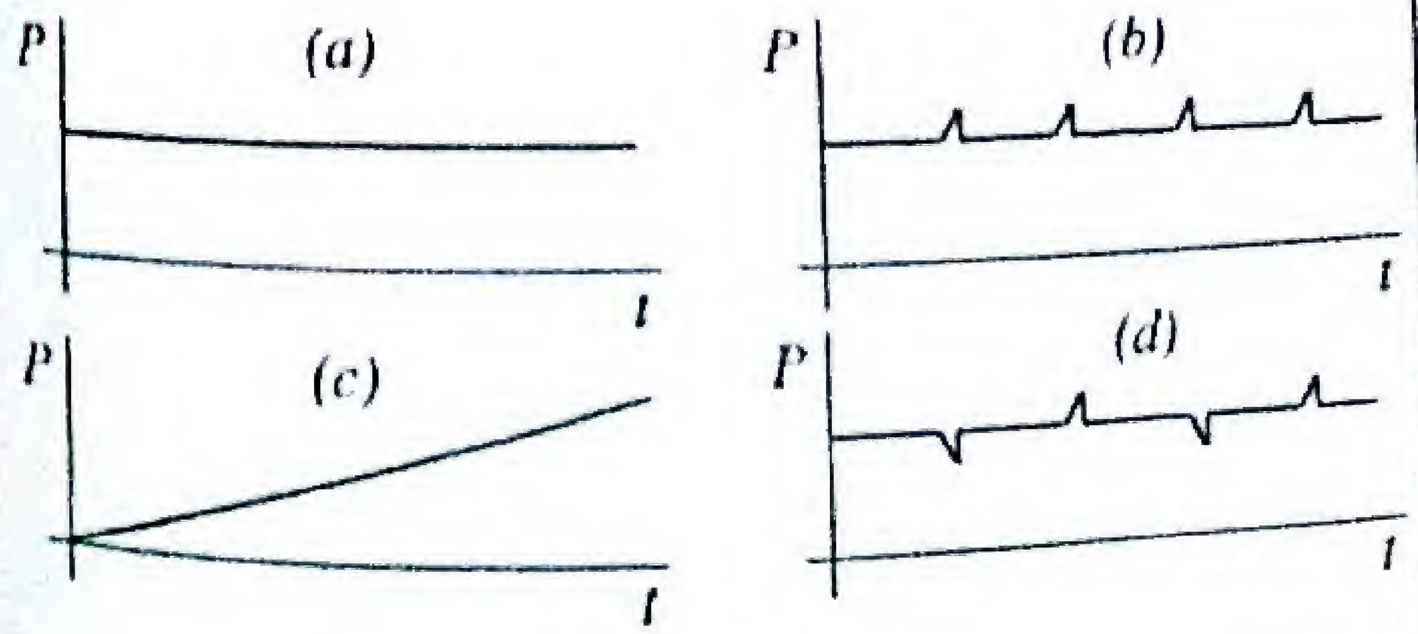
a) Si da el paso hacia atrás (hacia el extremo A).

b) Si da el paso hacia adelante (hacia el extremo B).

c) Si se queda quieta sin moverse.

PE-5.18. *Pesando un reloj de arena*

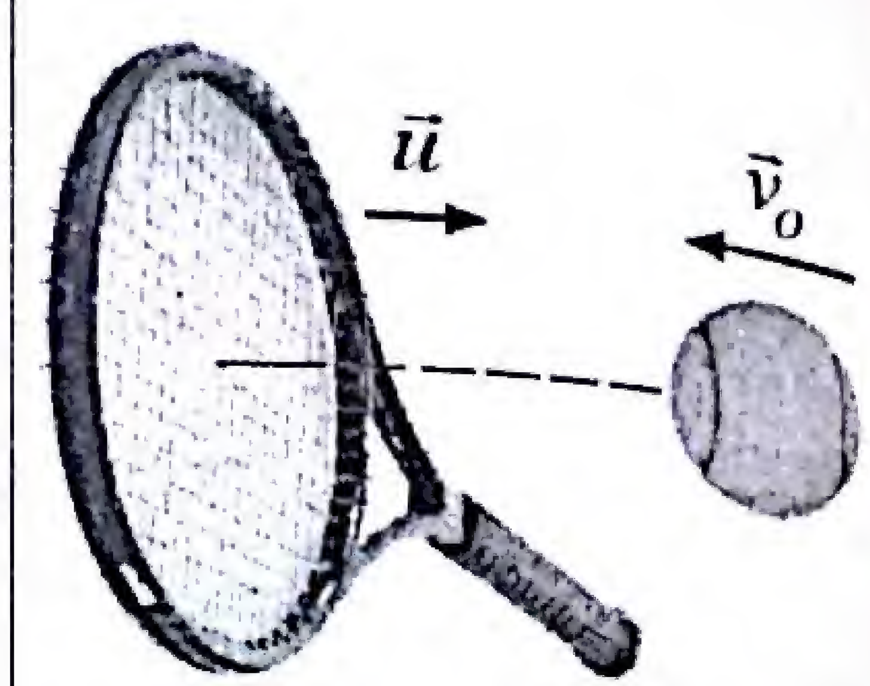
Un reloj de arena tiene toda la arena en el compartimiento superior y es colocado sobre una báscula electrónica muy sensible. ¿Cuál de los gráficos representaría mejor la lectura del peso P con el tiempo?



PE-5.19. *Rebote de una raqueta en movimiento*

Una pelota de masa m se mueve hacia la izquierda y sin girar, con velocidad, $v_0 = 8$ m/s en dirección horizontal. La pelota es golpeada por una raqueta que se aproxima con velocidad $u = 3$ m/s en sentido contrario y con su plano vertical. Suponga que el choque es perfectamente elástico. ¿Cuál será la velocidad de la pelota inmediatamente después de la colisión?

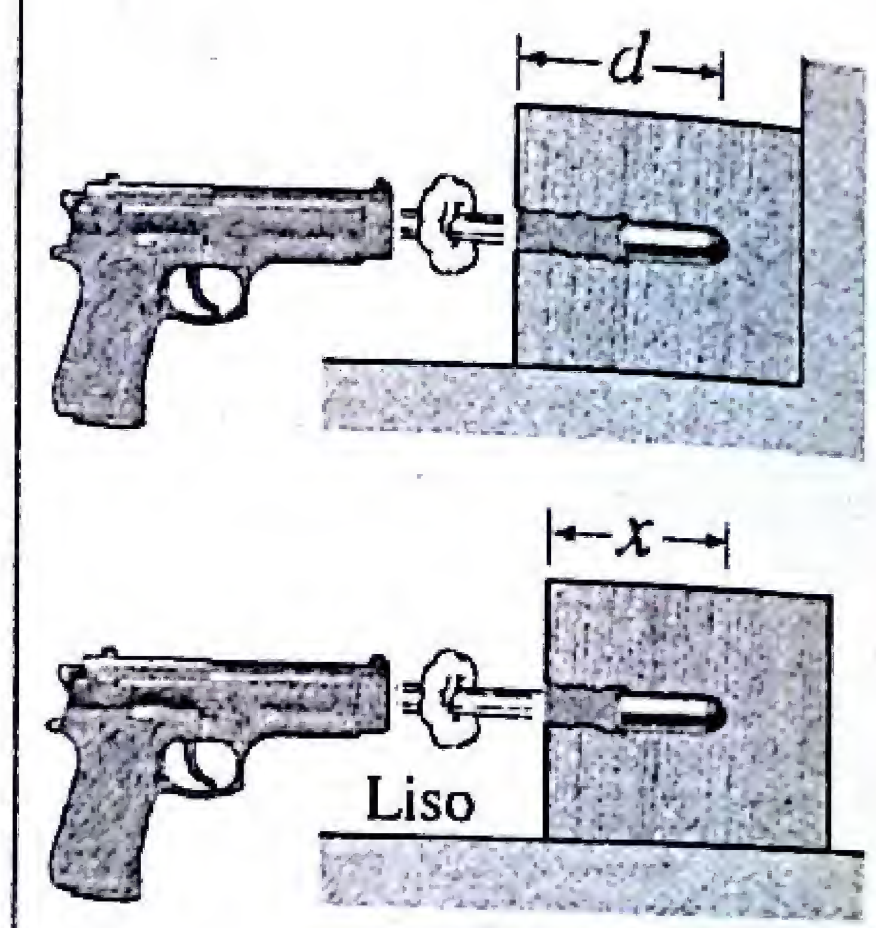
a) 11 m/s, b) 5 m/s, c) 14 m/s d) 2 m/s, e) 8 m/s



PE-5.20. *¿Cuál será la penetración de la bala?*

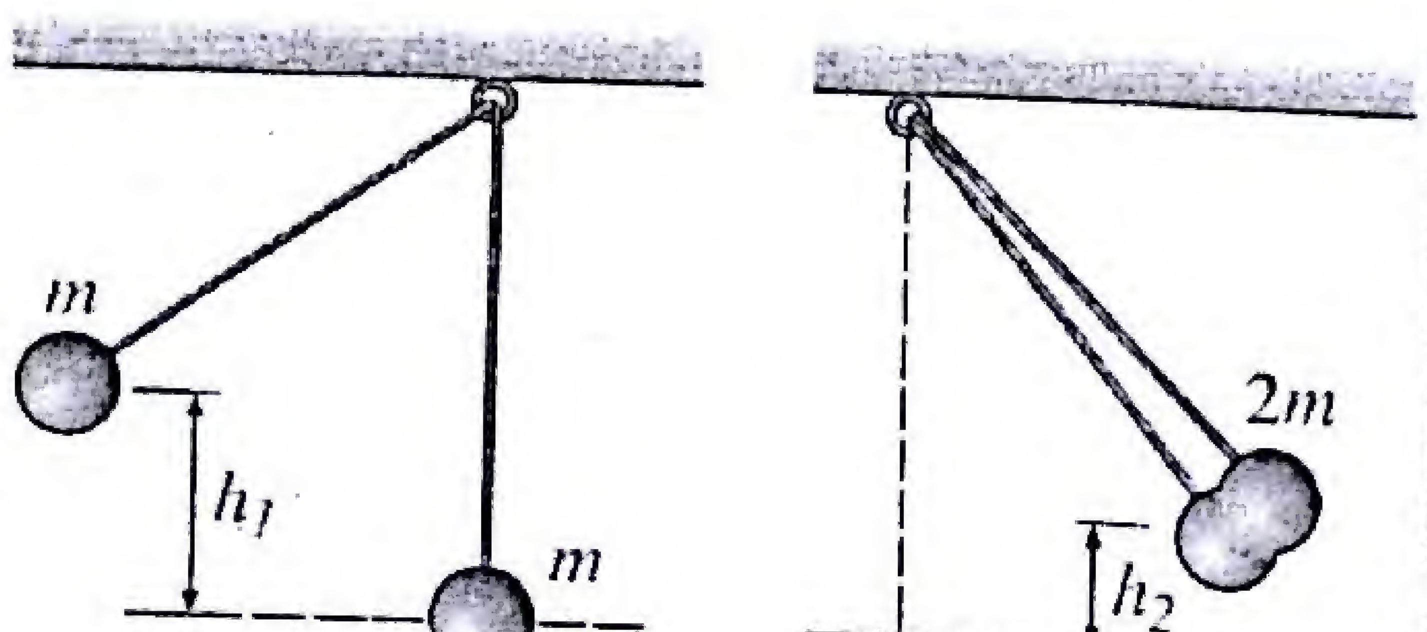
Un bloque de madera de masa $M = 0{,}5$ kg se encuentra sujeto en una mesa de modo que no pueda moverse. Se dispara una bala de masa $m = 40$ g, y se observa que ésta penetra una distancia $d = 5$ cm y queda incrustada en el bloque. En un segundo experimento, colocamos el bloque de forma tal que pueda moverse libremente en una mesa sin fricción. Si se dispara una bala idéntica a la anterior y con igual velocidad, ¿cuál será la distancia x que penetrará la bala dentro del bloque?

a) 1,50 cm, b) 2,4 cm, c) 3,2 cm, d) 4,0 cm e) 4,6 cm



PE-5.21. *Colisión inelástica en un péndulo doble*

Dos péndulos idénticos están inicialmente con uno de ellos a una altura h_1 sobre la posición mas baja. Cuando se suelta la esferita de la izquierda y choca la otra, se quedan pegadas (la colisión es perfectamente inelástica).



¿Hasta que altura máxima llegará el centro de masas del sistema?

a) $h_2 = h_1/4$

b) $h_2 = h_1/8$

c) $h_2 = h_1/3$

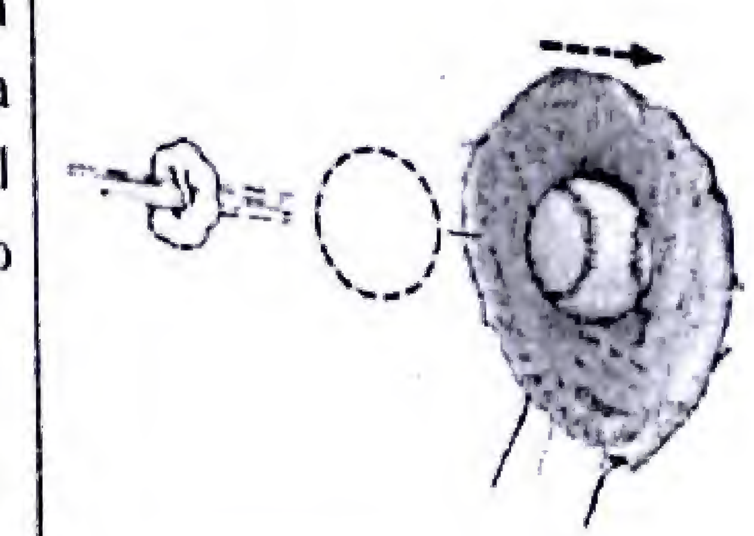
d) $h_2 = h_1/2$

e) $h_2 = h_1$

PE-5.22. *Para reducir el golpe de la pelota de béisbol*

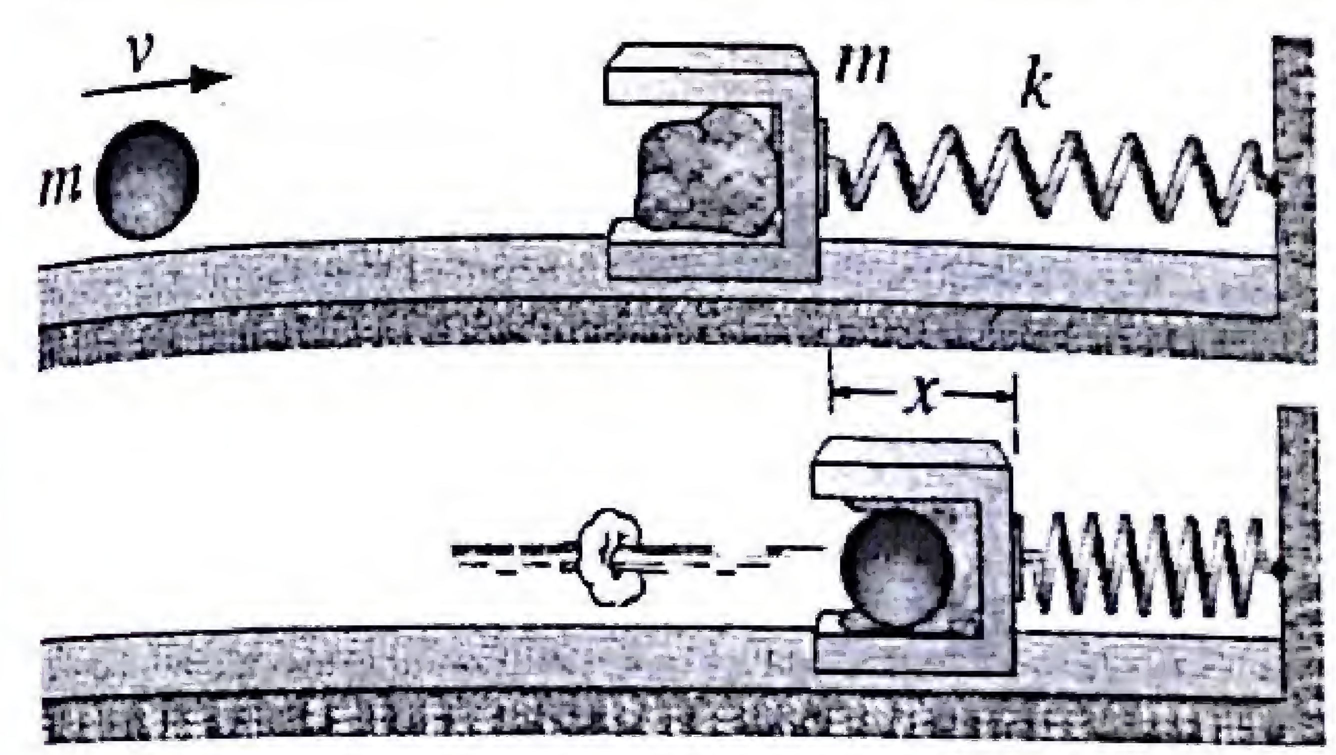
Si un jugador de béisbol coloca el guante en posición rígida, cuando recibe una pelota muy rápida sentirá un fuerte golpe en su mano. Para reducir la magnitud de la fuerza que lo golpea a la cuarta parte, debe retroceder el guante con la pelota al cacharla, de modo que el tiempo de contacto se incremente por un factor....

a) $\sqrt{2}$, b) 2, c) 4, d) $2\sqrt{2}$, e) 8



PE-5.23. *Colisión inelástica de pelota contra resorte*

Una cajita llena de plastilina de masa total $m = 0{,}4$ kg está montada en un resorte de constante elástica $k = 500$ N/m.



Se lanza una pelota de masa $m = 0{,}4$ kg con velocidad $v = 12$ m/s hacia la cajita, ¿cuál será la compresión máxima del resorte?

a) $x = 18$ cm

b) $x = 24$ cm

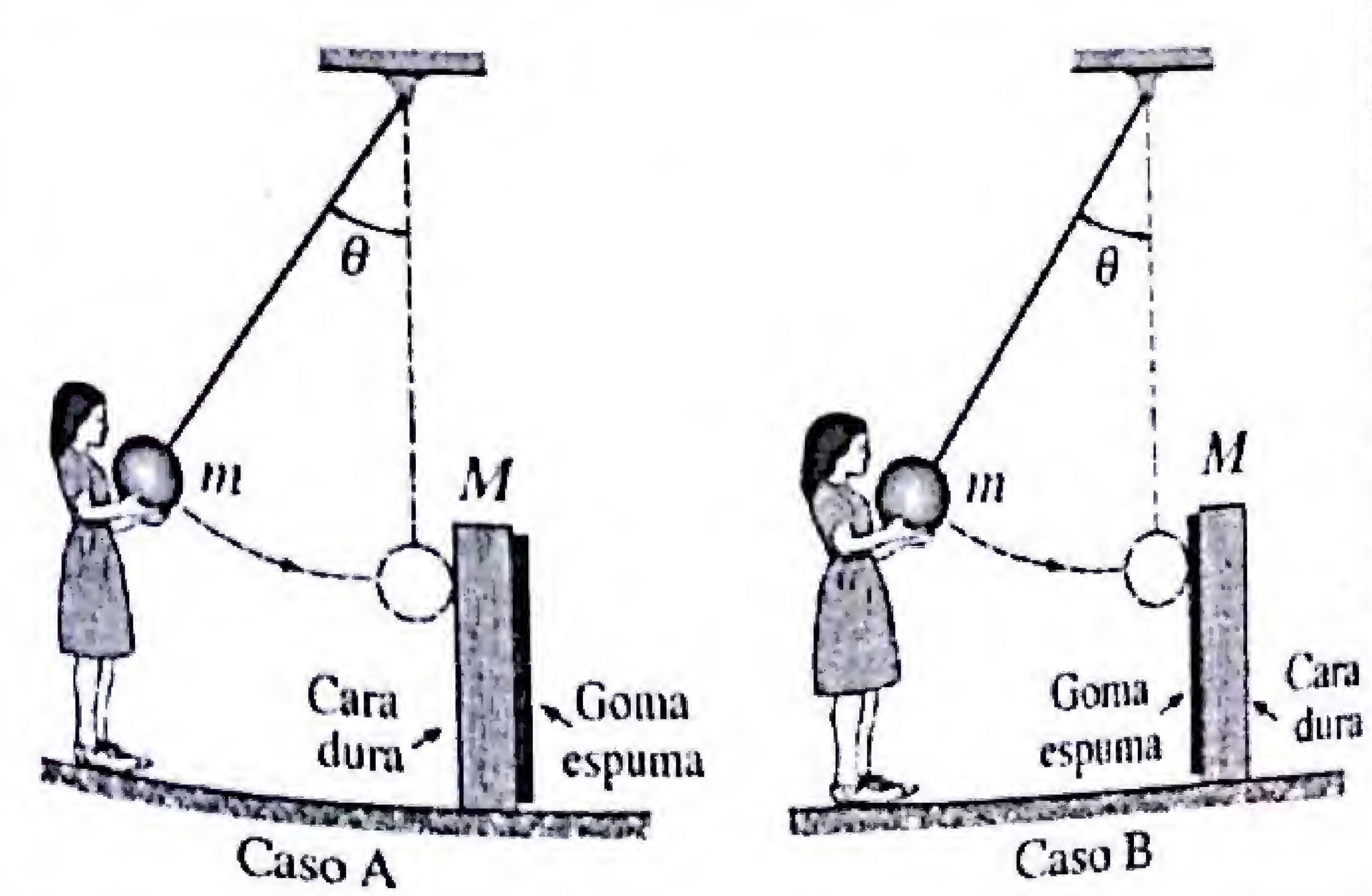
c) $x = 12$ cm

d) $x = 6$ cm

e) $x = 3$ cm

PE-5.24. *Dos opciones para tumbar el bloque*

En una demostración de física de la USB, se suspende una bola del techo y una alumna aparta el hilo a un ángulo θ. Luego suelta la pelota tratando de derribar un pesado bloque de madera que ha sido colocado en el suelo.



El bloque de madera tiene adherido en una de sus caras una capa de goma espuma. En el caso A se coloca el bloque de madera de modo que la bola pegue con la cara dura. En el caso B, se coloca el bloque de modo que la bola pegue con la goma espuma. ¿En cuál caso es mas probable que la bola derribe al bloque?

a) En el caso A.

b) En el caso B.

c) Igual de probable en los dos casos

PE-5.25. ***Fuerza para disparar una metralleta***

En una escena de la película de Rambo, éste agarra una metralleta y dispara balas de masa m = 45 g con una velocidad v = 1000 m/s, a razón de 240 balas por minuto. La fuerza media que él debe ejercer contra el arma durante la ráfaga es:

a) 45 N, b) 90 N, c) 360 N, d) 240 N, e) 180N

PE-5.26. ***Leyes de Newton introducidas a martillazos***

En una demostración de Física de la USB, colocamos un yunque de 25 kg sobre el pecho de un alumno voluntario. Luego procedemos a martillar fuertemente sobre el yunque, sin que el alumno perciba molestia alguna.

El alumno no puede sentir los golpes, debido a que el yunque impide que del martillo a su cuerpo se transfiera ....

a) El momento lineal.
b) El momento lineal y la fuerza.
c) La fuerza y la energía.
d) El momento lineal, la fuerza y la energía.

CAP. 5: RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS

	a	b	c	d	e
5.01			✓		
5.03					✓
5.05			✓		
5.07		✓			
5.09		✓			
5.11	✓				
5.13					✓
5.15				✓	
5.17	✓				
5.19			✓		
5.21	✓				
5.23		✓			
5.25					✓

	a	b	c	d	e
5.02				✓	
5.04		✓			
5.06	✓				
5.08	✓				
5.10			✓		
5.12					✓
5.14				✓	
5.16	✓				
5.18				✓	
5.20					✓
5.22			✓		
5.24	✓				
5.26			✓		

6

MOVIMIENTO OSCILATORIO

Los fenómenos periódicos, es decir, aquellos que se repiten a intervalos regulares de tiempo, son muy comunes en nuestra experiencia cotidiana. Su característica distintiva es un patrón repetitivo; el sistema adopta en cierto momento la misma configuración que mostraba antes. Ejemplos de acontecimientos periódicos son: las estaciones debido a la rotación de la Tierra alrededor del Sol, la noche, el día, el respirar, el latir del corazón y las vibraciones de un instrumento musical de cuerda. Los movimientos oscilatorios o vibratorios, siempre ocurren como una respuesta natural de casi cualquier sistema que es perturbado, estando en un equilibrio estable. De todos los movimientos oscilatorios, el mas fundamental del mundo físico es el movimiento armónico simple (MAS), el cual además de ser el mas simple de describir matemáticamente, constituye una buena aproximación a muchas oscilaciones que ocurren en la naturaleza, incluyendo las vibraciones atómicas y moleculares. Un movimiento armónico simple es el que ejecuta cualquier partícula bajo la influencia de una fuerza restauradora que es proporcional al desplazamiento respecto al punto de equilibrio. El prototipo de esta fuerza es la que ejerce un resorte sobre un objeto. La posición del objeto en función del tiempo presenta una dependencia del tipo armónico (seno o coseno). El estudio del movimiento armónico simple es de gran importancia en diversas áreas de la ciencia y de la tecnología

En este capítulo Ud. encontrará aspectos relacionados con:

- Movimiento vibratorio
- Movimiento armónico simple
- El oscilador masa - resorte
- Relación entre el MAS y el movimiento circular
- El péndulo simple
- Energía de un sistema oscilatorio
- Oscilaciones amortiguadas y resonancia

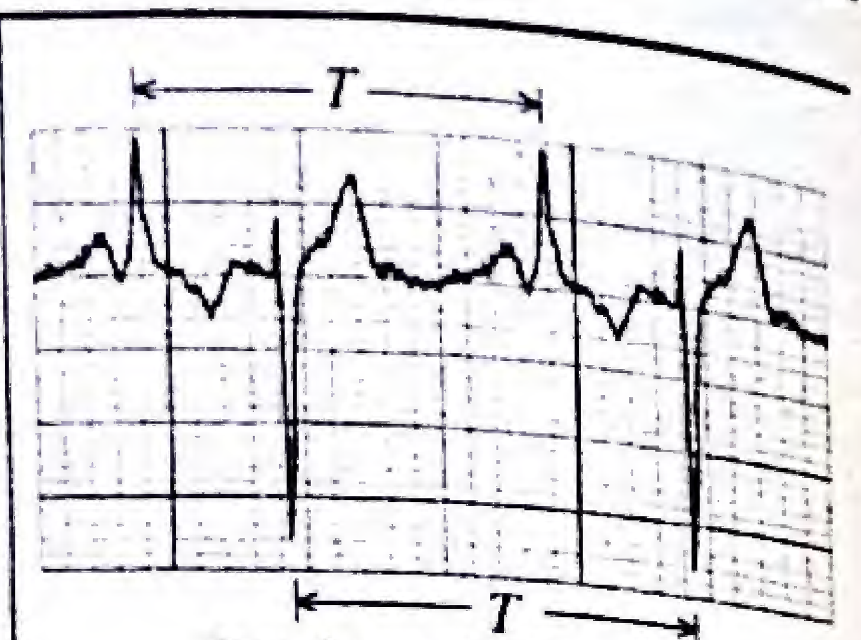
PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

MOVIMIENTO VIBRATORIO

Un movimiento es cíclico o periódico cuando se repite a intervalos regulares de tiempo. El tiempo, T, que emplea el sistema en ejecutar un ciclo se denomina período:

$$f(t+T) = f(t)$$

Si el movimiento es de vaivén entre dos puntos extremos en una dada trayectoria, se llama oscilatorio o vibratorio.



Patrón periódico de un electrocardiograma

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Las oscilaciones mas sencillas son las armónicas. Un movimiento armónico simple (MAS) presenta las siguientes características:

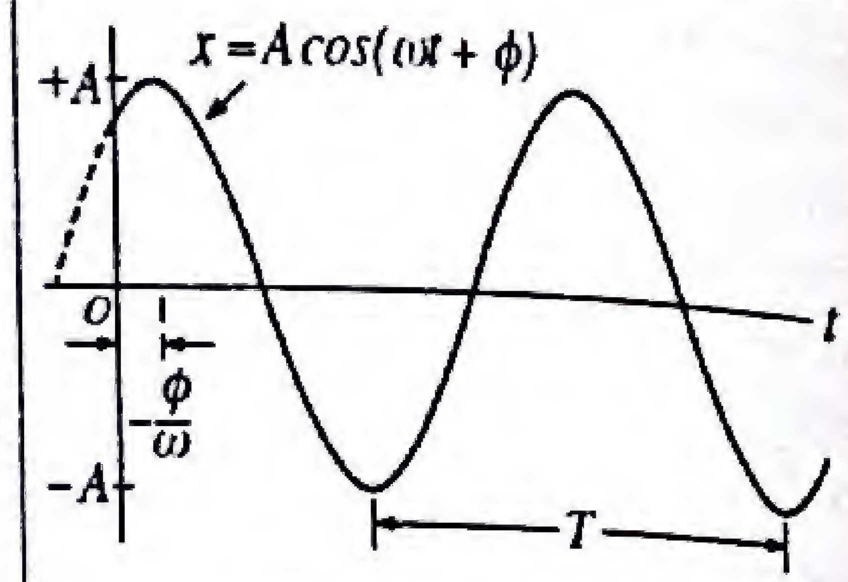
a) La amplitud A, de la magnitud física que oscila es constante.

b) El período T, no depende de la amplitud.

c) La variación del desplazamiento en el tiempo tiene forma sinusoidal:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

Siendo ω la frecuencia angular y ϕ una constante de fase.



Desplazamiento

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega t + \phi)}$$

A = Amplitud (m)
ω = Frecuencia angular (rad/s)
ϕ = Constante de fase (radianes)

PERIODO Y FRECUENCIA

La cantidad $(\omega t + \phi)$ es la *fase* de la vibración y la constante, ϕ, representa el valor que tiene la fase en el instante de tiempo inicial, $t = 0$.

El intervalo de tiempo durante el cual la fase aumenta en 2π radianes corresponde al *período* T y está relacionado con ω, mediante la condición:

$$[\omega(t+T) + \phi] - [\omega t + \phi] = 2\pi \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi/\omega$$

La *frecuencia* es el número de oscilaciones por unidad de tiempo, es decir, el recíproco de la duración, T, de una oscilación:

$$f = 1/T = \omega/2\pi$$

Período

$$\boxed{T = 2\pi/\omega}$$

Frecuencia

$$\boxed{f = 1/T = \omega/2\pi}$$

VELOCIDAD Y ACELERACIÓN EN EL MAS

En un movimiento armónico simple, la velocidad de la partícula está dada por la derivada temporal del desplazamiento, x:

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A\,sen(\omega t + \phi)$$

Se observa que la velocidad es nula cuando el oscilador se encuentra en sus puntos de retorno, $x = \pm A$ y su magnitud es máxima en la posición de equilibrio $x = 0$.

$$v_{máx} = A\omega$$

La aceleración está dada por la segunda derivada de x:

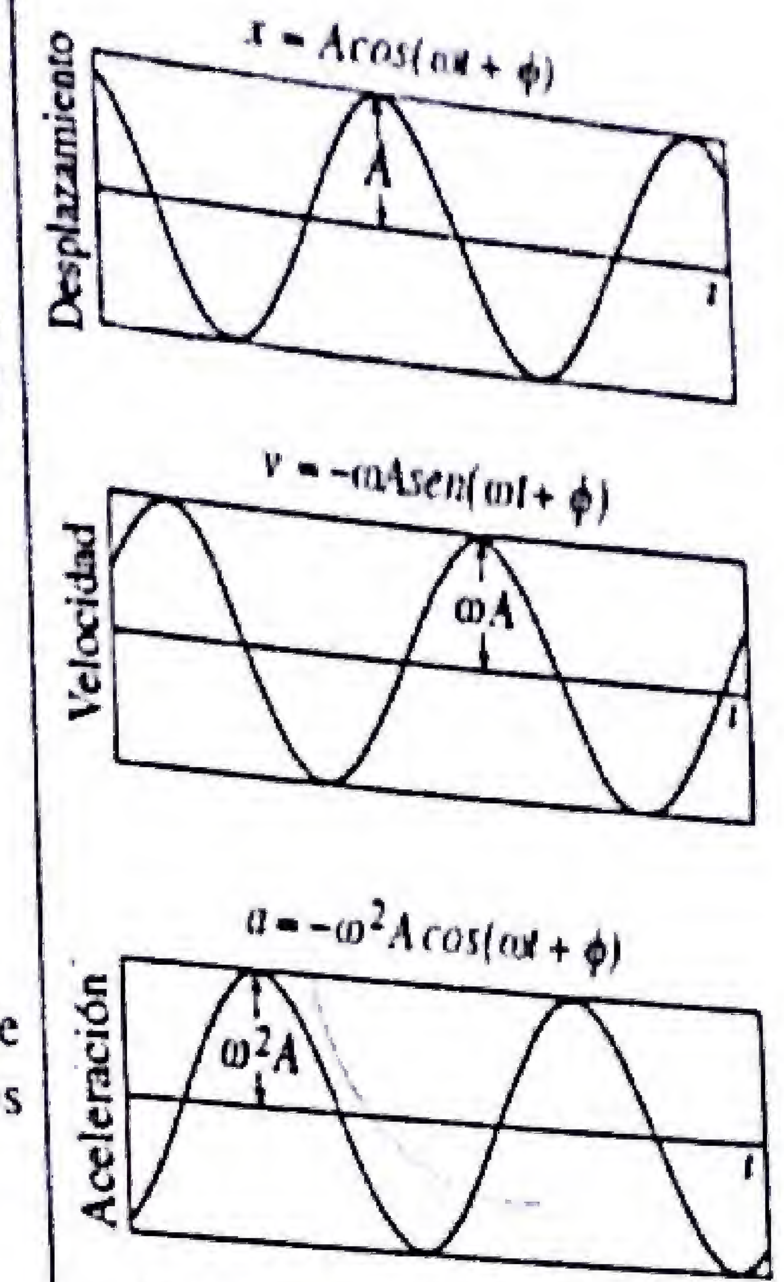
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$$

Vemos que la aceleración es cero en la posición de equilibrio y su magnitud es máxima en los puntos extremos de retorno:

$$a_{máx} = A\omega^2$$

Si comparamos las expresiones para a y x se observa que la aceleración es proporcional al desplazamiento pero tiene sentido contrario.

$$a = -\omega^2 x$$



$$\boxed{v_{máx} = A\omega}$$

$$\boxed{a_{máx} = A\omega^2}$$

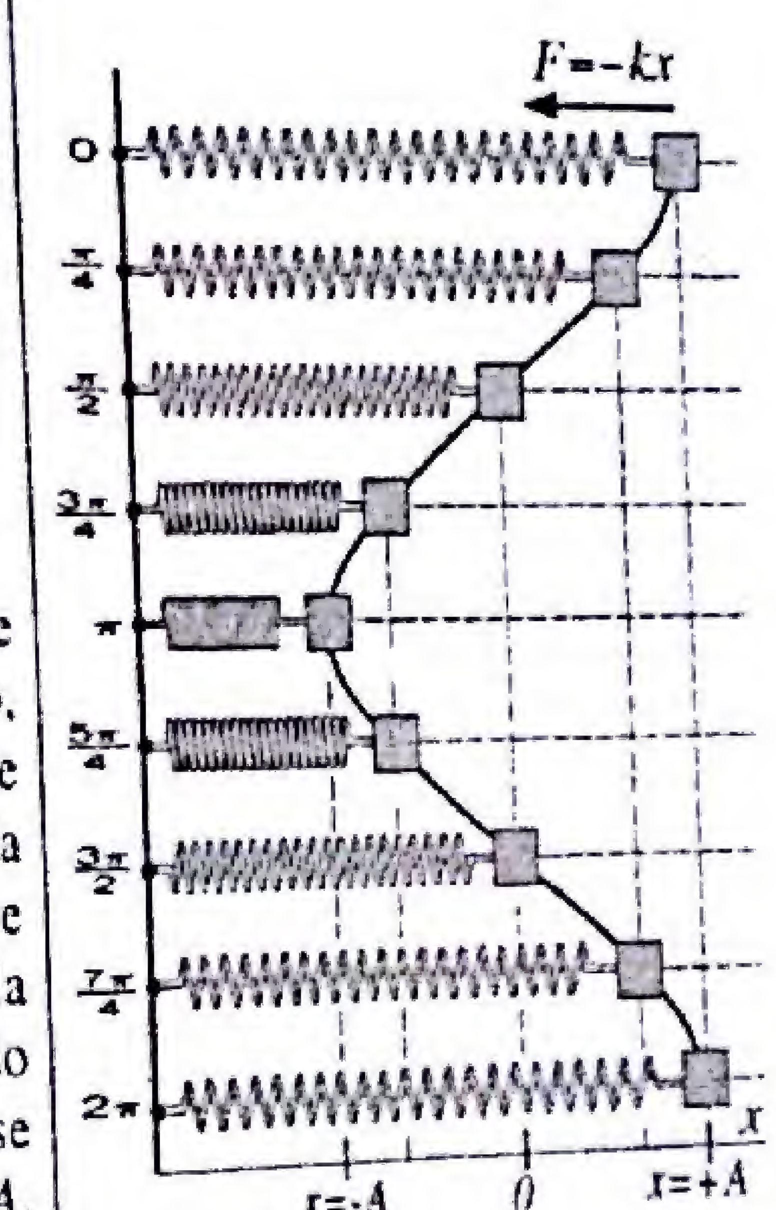
OSCILADOR MASA-RESORTE

Sea un bloque de masa m que está oscilando en el extremo de un resorte de constante elástica k. La fuerza que ejerce el resorte sobre el bloque obedece la ley de Hooke $F = -kx$, y aplicando la segunda ley de Newton:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{F}{m} = \frac{-kx}{m} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Siendo la constante $\omega^2 = k/m$.

Esta ecuación diferencial es característica de todo tipo de movimiento armónico simple, sea mecánico, eléctrico, etc.. La función $x(t)$ que es solución de esta ecuación se puede obtener experimentalmente si atamos una plumilla a la masa en vibración mientras frente a esta se mueve una hoja de papel a velocidad constante, la plumilla trazaría una curva sinusoidal (seno o coseno) dependiendo de la posición inicial. Por ejemplo, si en $t = 0$ la masa se pone en movimiento en su desplazamiento máximo $x = A$, trazará una curva coseno, como se ilustra a continuación.



En general, podemos escribir el desplazamiento como:

$$x = A\cos(\omega t + \phi)$$

La frecuencia angular ω está relacionada con el período:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

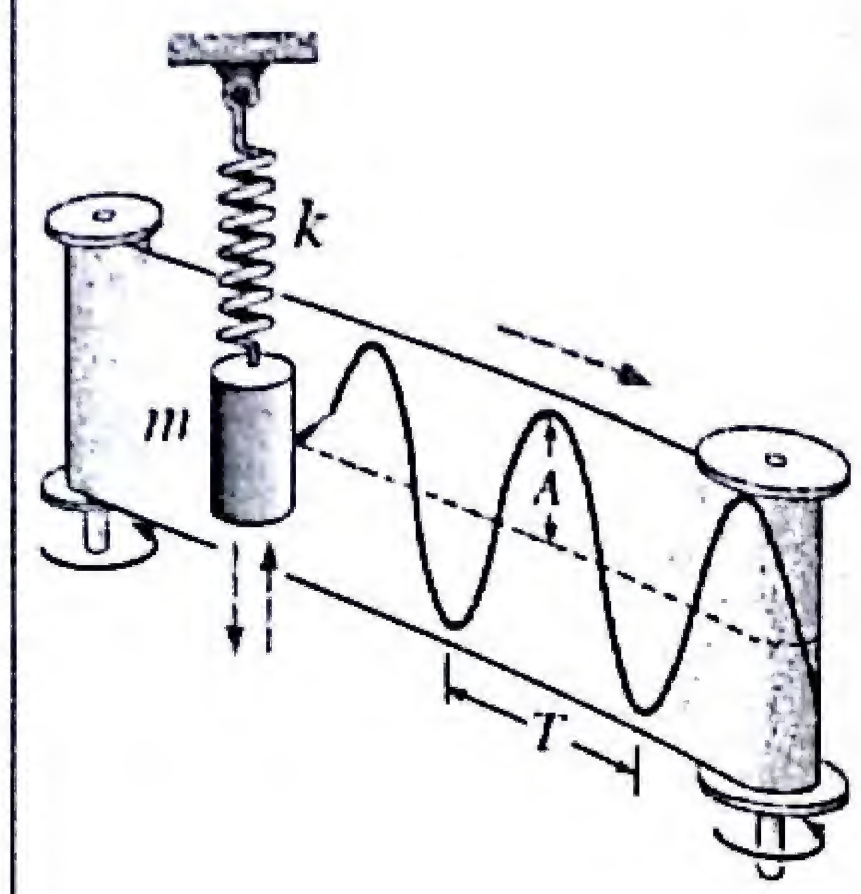
Es decir, el período es independiente de la amplitud, aumenta con la masa m y disminuye con la constante elástica k.

La velocidad es $v = dx/dt$: $v = -\omega A\,sen(\omega t + \phi)$

El valor máximo de la velocidad es: $v_{max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{m}}A$

La aceleración es $a = dv/dt$: $a = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$

El valor máximo de la velocidad es: $v_{max} = \omega^2 A = \frac{k}{m}A$



Período: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

MOVIMIENTO CIRCULAR Y MAS

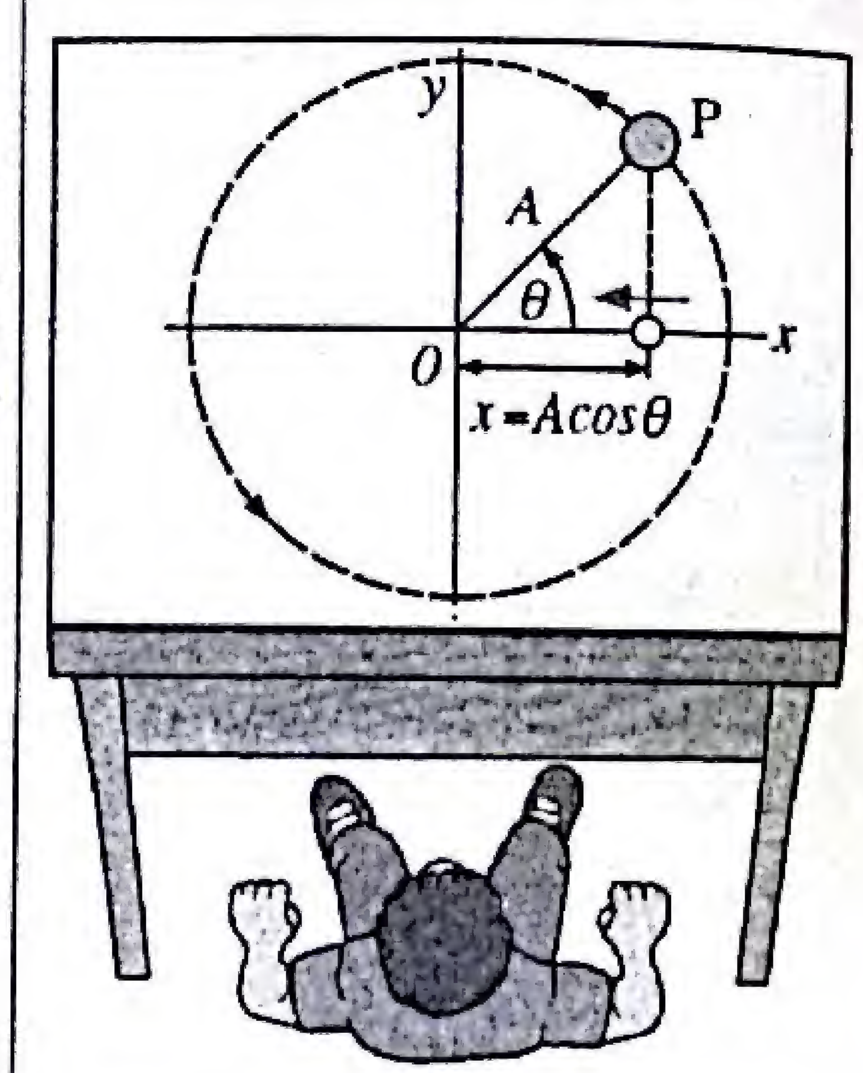
El movimiento circular uniforme se relaciona estrechamente con el movimiento armónico simple. Sea una partícula que se mueve en una circunferencia de radio A con velocidad angular constante ω. El ángulo θ aumenta linealmente con el tiempo:

$$\theta = \omega t + \phi$$

En donde ϕ es el desplazamiento angular inicial. A partir de la figura vemos que el punto P proyectado sobre el eje x se mueve con MAS:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

Además, el período y la frecuencia del movimiento circular son los mismos que los del movimiento armónico simple.



El MAS se puede representar por la proyección sobre el eje x de un movimiento circular

ENERGÍA EN EL MOVIMIENTO ARMÓNICO

La oscilación armónica es un proceso continuo de intercambio entre la energía cinética de la masa y la energía potencial almacenada en el resorte. La energía cinética del MAS oscila en el transcurso del tiempo de la forma:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 sen^2(\omega t + \phi)$$

La energía cinética es cero en los puntos de retorno y máxima en el punto de equilibrio.

Por otra parte la energía potencial es:

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi)$$

La energía potencial es máxima cuando la partícula está en sus puntos de retorno y es cero en el punto de equilibrio.

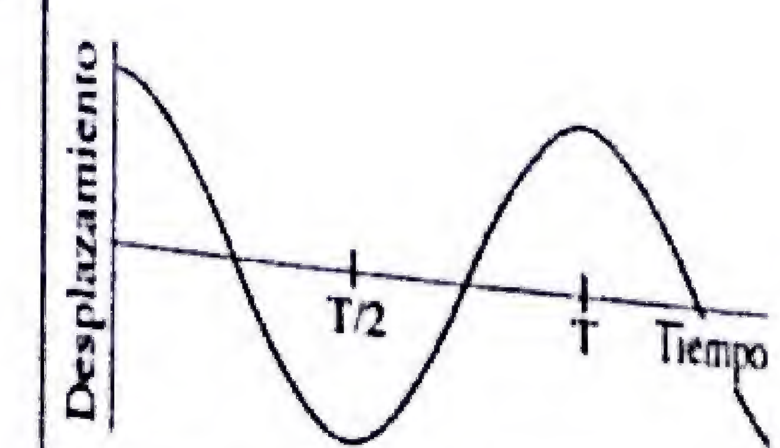
La energía total es la suma de la cinética y la potencial. Tomando en cuenta la identidad:

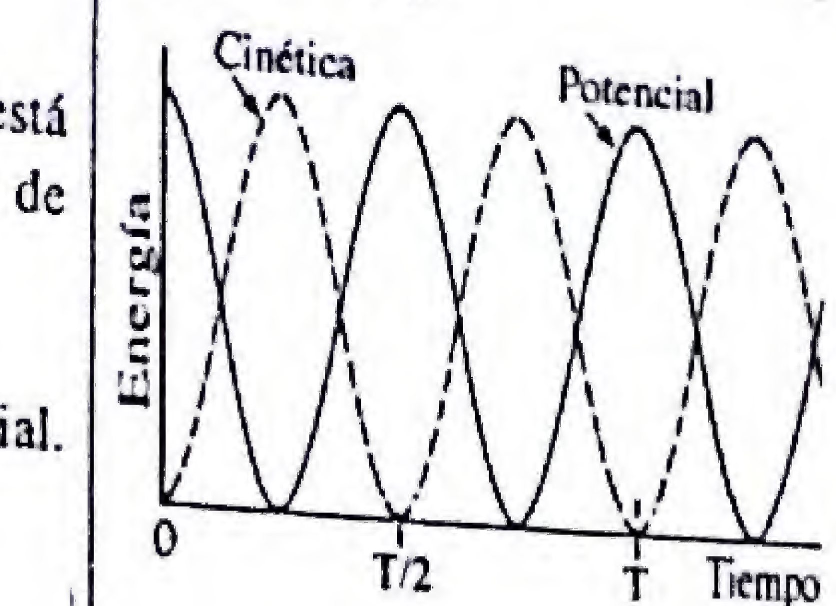
$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

se verifica que:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

Las energías cinética y potencial del oscilador armónico varían con el tiempo, pero la energía total no depende del tiempo y es proporcional al cuadrado de la amplitud.





La energía total del oscilador armónico simple es constante

$$\boxed{E = \frac{1}{2}kA^2}$$

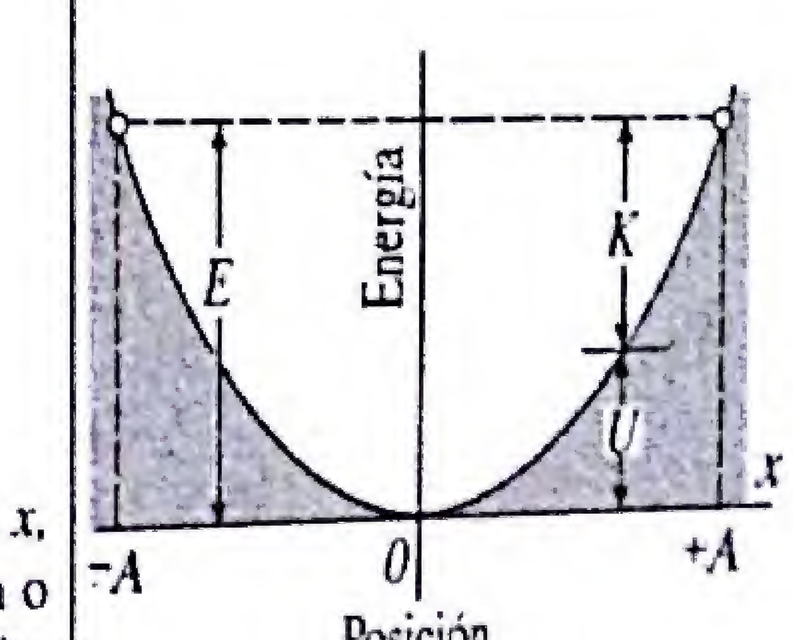
A partir de la conservación de la energía, podemos expresar la velocidad en términos del desplazamiento:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2$$

$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{A^2 - x^2} = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

El doble signo ($\pm$) significa que, para un dado valor de x, el sentido del movimiento puede ser hacia la izquierda o hacia la derecha. Según esta relación se verifica el hecho de que la velocidad es cero en los puntos de retorno ($x = \pm A$) y su valor es máximo ($v_{max} = \omega A$) en el punto de equilibrio, $x = 0$.

En la figura se ilustra la dependencia de la energía cinética, potencial y total en función de la posición.



EL PÉNDULO SIMPLE

Un péndulo simple es un sistema idealizado que consiste de un hilo de longitud L, del cual está suspendida una masa puntual, m. Si θ es el ángulo respecto de la vertical (en radianes), la longitud de arco es $s = L\theta$.

El movimiento de vaivén a lo largo de la trayectoria curva es debido a la componente tangencial de la fuerza de gravedad, ($F_t = mgsen\theta$). De acuerdo a la segunda ley de Newton:

$$m\frac{d^2s}{dt^2} = -mgsen\theta$$

Para ángulos pequeños, se puede emplear la aproximación $sen\theta \approx \theta$ y tomando en cuenta que:

$$d^2s/dt^2 = L(d^2\theta/dt^2),$$

la ecuación anterior queda:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + (\frac{g}{L})\theta = 0$$

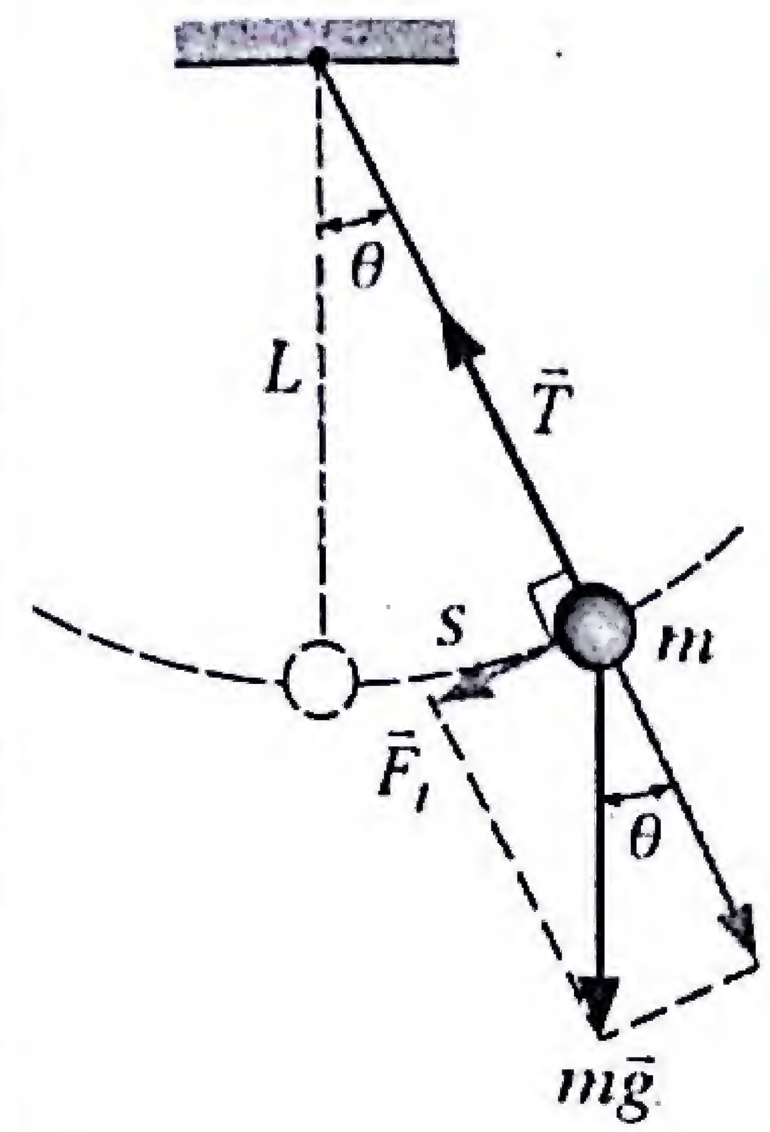
Esta expresión tiene la misma forma que la ecuación del MAS:

$$d^2x/dt^2 + \omega^2 x = 0$$

En este caso $\omega = \sqrt{g/L}$, por lo tanto el periodo del movimiento pendular es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

El período de un péndulo es independiente de la masa.



Desplazamiento angular

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 cos(\omega t + \phi)}$$

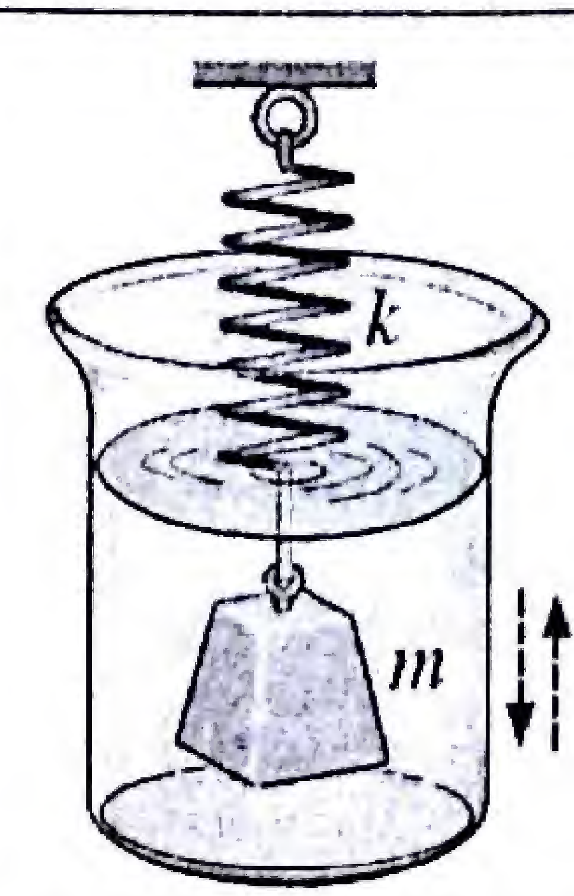
Período del péndulo

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

OSCILACIONES AMORTIGUADAS

Cuando actúan fuerzas disipativas sobre un sistema oscilador, la amplitud disminuye en el tiempo hasta que finalmente, cesan las oscilaciones. Se dice que el movimiento es *armónico amortiguado.*

Un tipo muy común de fuerza retardadora, es aquella que es proporcional a la velocidad: $F = -bv$, donde b es una constante. En este caso, si aplicamos la segunda ley de Newton, se obtiene:



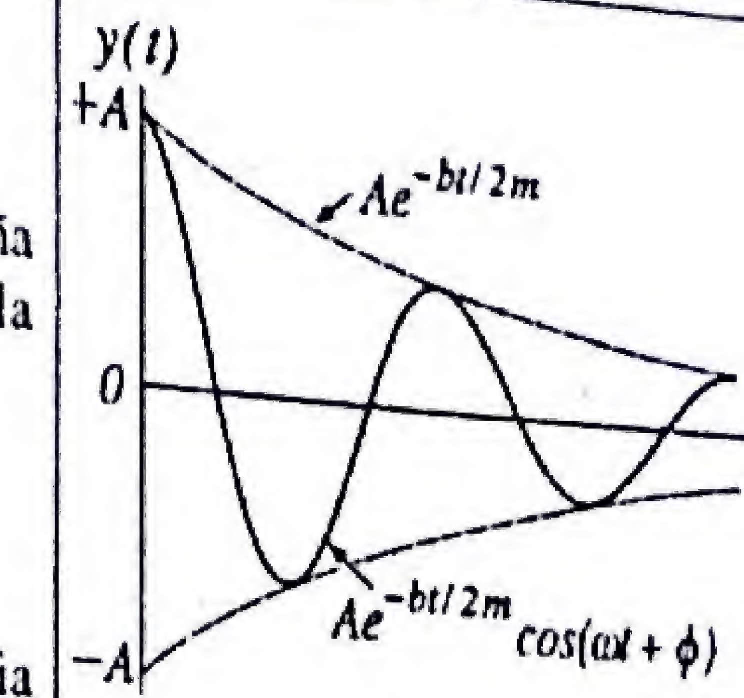
$$m(\frac{d^2x}{dt^2}) + kx + b(\frac{dx}{dt}) = 0$$

En el caso en que la fuerza retardadora ($-bv$) sea pequeña en comparación con la fuerza restauradora ($-kx$), la solución para esta ecuación es:

$$x(t) = Ae^{-\alpha t}cos(\omega t + \phi)$$

donde las constantes son: A y $\alpha = b/2m$. La frecuencia angular del movimiento es:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - (\frac{b}{2m})^2}$$



Oscilaciones amortiguadas

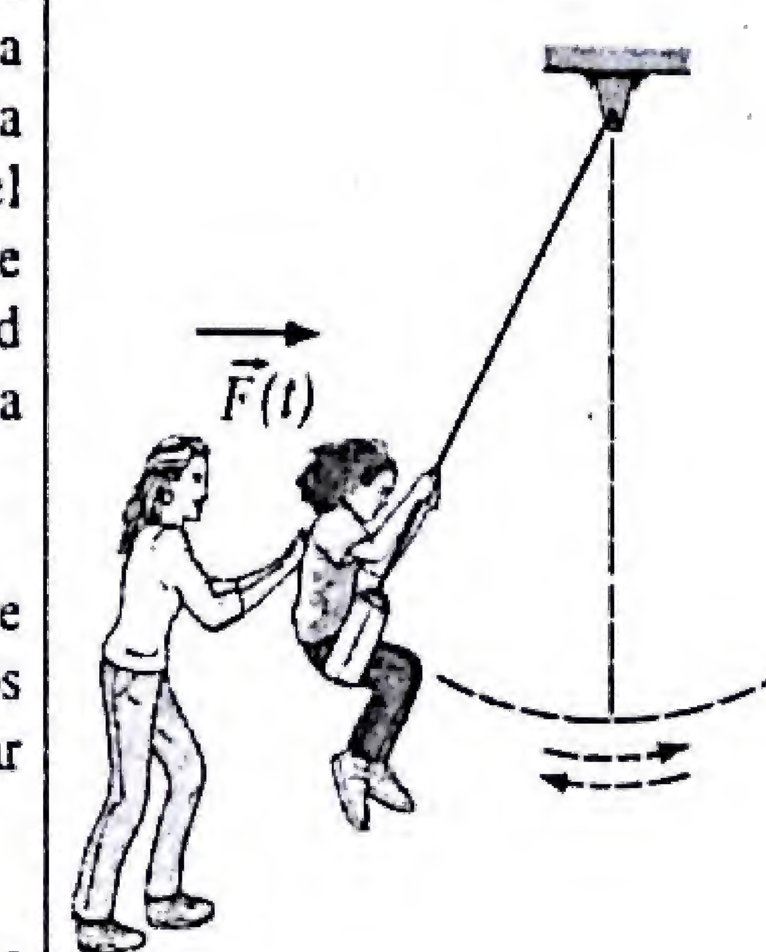
$$\boxed{x(t) = Ae^{-\alpha t}cos(\omega t + \phi)}$$

OSCILACIONES FORZADAS Y RESONANCIA

Es posible compensar la pérdida de energía de un oscilador amortiguado, impulsando el sistema con una fuerza periódica externa, de igual frecuencia que la *frecuencia natural* del oscilador y en fase con el movimiento de éste. En este caso, se transfiere continuamente energía hacia el oscilador y su amplitud puede aumentar sin límite, este fenómeno se denomina *resonancia.*

Una experiencia común que ilustra la resonancia ocurre con un columpio. Cuando se le aplica sucesivos impulsos al mismo ritmo que su frecuencia natural, se puede llegar a provocarle grandes amplitudes de oscilación.

Podríamos citar numerosos ejemplos de vibraciones resonantes. Las grandes estructuras como edificios y puentes, poseen frecuencias propias de vibración y pueden entrar en resonancia con la fuerza periódica de algún mecanismo externo (un sismo) que eventualmente puede provocar su colapso. Por esta razón, es práctica común en el ejército que cuando un pelotón de soldados marcha al paso, se le ordena romper filas en el momento de cruzar un puente.

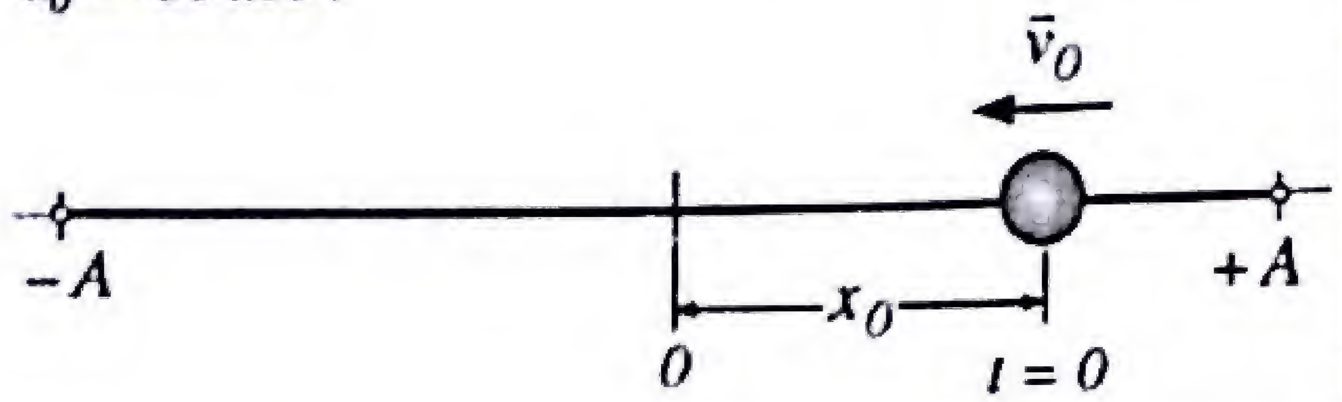


Fuerza periódica de igual frecuencia y en fase con la oscilación

PROBLEMAS RESUELTOS

PR-6.01. ***Dadas las condiciones iniciales, halle ω, A y ϕ***

Un cuerpo oscila en línea recta con un movimiento armónico simple y en el instante inicial su posición es, $x_0 = +0{,}3$ m, su velocidad es $v_0 = -4$ m/s, y su aceleración, $a_0 = -30$ m/s^2.



Determine en la expresión:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

a) La frecuencia angular, ω.
b) La amplitud, A.
c) El ángulo de fase, ϕ.

Solución: a) A partir de la expresión de la posición: $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$, encontramos las correspondientes expresiones para el desplazamiento, la velocidad y la aceleración en el instante inicial ($t = 0$):

$$x_0 = A\cos(\omega \cdot 0 + \phi) = A\cos\phi \qquad (1)$$

$$v_0 = dx/dt\,|_{t=0} = -\omega A sen(\omega \cdot 0 + \phi) = -\omega A sen\phi \qquad (2)$$

$$a_0 = dv/dt\,|_{t=0} = -\omega^2 A sen(\omega \cdot 0 + \phi) = -\omega^2 A\cos\phi \qquad (3)$$

Si dividimos la ecuación (3) entre la (1) se obtiene la velocidad angular:

$$\frac{a_0}{x_0} = -\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{-\frac{a_0}{x_0}} = \sqrt{-\frac{-30\text{m/s}^2}{0{,}3\text{m}}} = 10\text{rad/s}$$

b) Después de elevar al cuadrado la ecuación 1 y sumarla al cuadrado de la ecuación (2) dividida por ω^2, resulta:

$$x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2} = A^2\cos^2\phi + A^2 sen^2\phi = A^2$$

Despejando se obtiene la amplitud del movimiento:

$$A = \sqrt{x_0^2 + (\frac{v_0}{\omega})^2} = \sqrt{(0{,}3\text{m})^2 + (\frac{4\text{m/s}}{10\text{rad/s}})^2} = 0{,}5\text{m}$$

c) Dividiendo la ecuación (2) entre la (1), encontramos:

$$\frac{v_0}{x_0} = \frac{-\omega A sen\phi}{A\cos\phi} = -\omega tg\phi \quad \Rightarrow \quad \phi = arctg(-\frac{v_0}{\omega x_0})$$

$$\phi = arctg(-\frac{-4\text{m/s}}{(10\text{rad/s})(0{,}3\text{m})}) = +0{,}927\text{rad} = 53{,}1°$$

Respuesta:

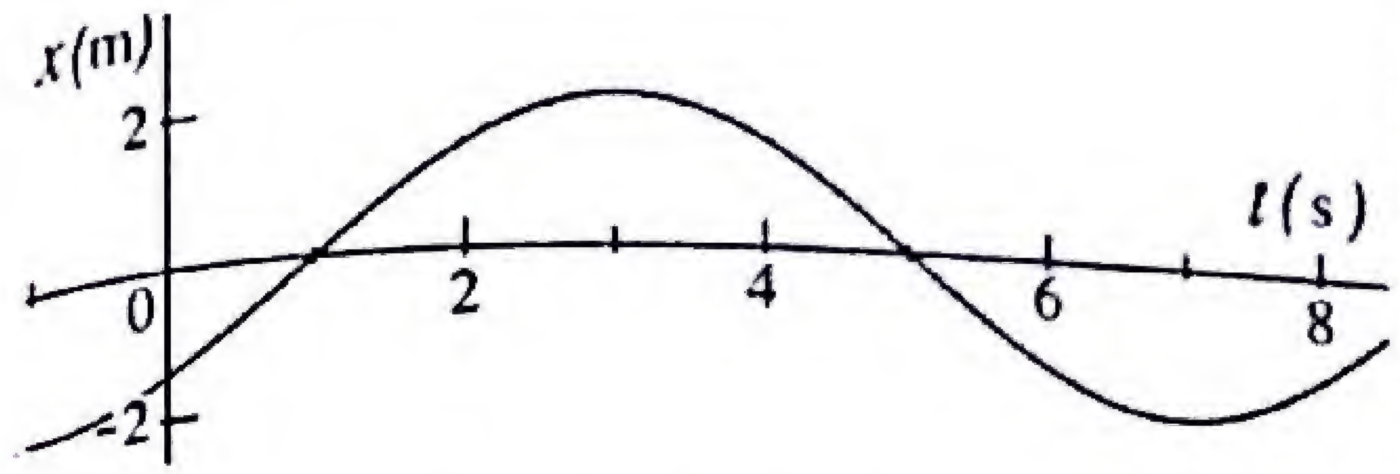
a) $\omega = \sqrt{-\frac{a_0}{x_0}} = 10$ rad/s

b) $A = \sqrt{x_0^2 + (\frac{v_0}{\omega})^2} = 0{,}5$m

c) $\phi = arctg(-\frac{v_0}{\omega x_0}) = 53{,}1°$

PR-6.02. ***Obtenga toda la información de esta gráfica***

La gráfica mostrada representa el movimiento armónico simple que ejecuta una partícula.



a) Halle los valores numéricos para la ecuación:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

b) ¿Es su respuesta única?

Solución: a) Se observa en la gráfica que los valores extremos del desplazamiento son $x = +2$ m y $x = -2$ m, respectivamente, por lo tanto la amplitud del movimiento es $A = 2$ m.

Además, el tiempo requerido para que se repita consecutivamente un mismo valor de x, es decir el período T es 8 segundos. Por lo tanto la frecuencia angular es:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{8s} = 0{,}785\text{rad/s}$$

Para hallar la constante de fase, ϕ, vemos en el gráfico que cuando $t = 3$ s, el valor de x es 2 m, (su valor máximo). Este corresponde al valor del coseno igual a +1 y a un argumento del coseno igual a cero.

$$(0{,}785 \text{ rad/s})(3\text{s}) + \phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = -2{,}36 \text{ rad} = -135°$$

Por consiguiente, la expresión para $x(t)$ es:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) = 2\cos(0{,}785t - 2{,}36) \text{ m}$$

b) Esta expresión no es única ya que el coseno es igual a 1 cada vez que su argumento sea $n\pi$, siendo $n = 0, \pm1, \pm2$,.etc....Así por ejemplo, cuando el argumento es $+2\pi$, la constante de fase es:

$$(0{,}785 \text{ rad/s})(3\text{s}) + \phi = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \phi = +3{,}93 \text{ rad}$$

Por lo tanto, otra solución posible sería:

$$x(t) = 2\cos(0{,}785t + 3{,}93) \text{ m}$$

Respuesta:

a) $x(t) = 2\cos(0{,}785t + 3{,}93)$ m
b) La solución no es única

PR-6.03. *Es posible predecir el futuro*

Una partícula ejecuta un movimiento armónico simple en torno a un punto $x = 0$ con una frecuencia angular $\omega = 4$ rad/s. En un cierto instante t_1, la partícula pasa por la posición $x_1 = 0{,}25$m con una velocidad $v_1 = 1$ m/s.

¿Cuál será su posición x_2 y su velocidad v_2 en un instante posterior, $t_2 = t_1 + 2{,}4$s?

Solución: A partir de la ecuación: $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$, escribimos para el instante t_1:

$$x_1 = A\cos(\omega t_1 + \phi) = 0{,}25 \text{ m}$$

Similarmente, para la velocidad encontramos:

$$v_1 = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=t_1} = -A\omega sen(\omega t_1 + \phi) = 1{,}0 \text{ m/s}$$

Para el instante posterior , $t_2 = t_1 + 2{,}4$s, la posición será:

$$x_2 = A\cos[\omega(t_1 + 2{,}4) + \phi] = A\cos[(\omega t_1 + \phi) + 2{,}4\omega]$$

$$x_2 = A\cos(\omega t_1 + \phi)\cos(2{,}4\omega) - A sen(\omega t_1 + \phi) sen(2{,}4\omega)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp sen\alpha sen\beta$$
$$sen(\alpha \pm \beta) = sen\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha sen\beta$$

$$x_2 = 0{,}25\cos(2{,}4\text{x}4\text{rad}) - \frac{1}{-4} sen(2{,}4\text{x}4\text{rad}) = -0{,}29\text{m}$$

Similarmente, la velocidad en ese instante posterior es:

$$v_2 = -A\omega sen[\omega(t_1 + 2{,}4) + \phi] = -A\omega sen[(\omega t_1 + \phi) + 2{,}4\omega]$$

$$v_2 = -A\omega sen(\omega t_1 + \phi)\cos 2{,}4\omega - A\omega\cos(\omega t_1 + \phi) sen(2{,}4\omega)$$

$$v_2 = -(1)\cos(2{,}4\text{x}4\text{rad}) - (4)(0{,}25) sen(2{,}4\text{x}4\text{rad}) = -0{,}81\text{m/s}$$

Respuesta

a) $x_2 = -0{,}29$m
b) $v_2 = -0{,}81$m/s

PR-6.04. *Con dos observaciones es suficiente*

Una partícula unida a un resorte ejecuta un movimiento armónico simple. La partícula parte de la elongación máxima y se observa que cuando pasa por el punto $x_1 = 0{,}15$ m tiene una velocidad $v_1 = 0{,}4$ m/s y cuando pasa por el punto $x_2 = 0{,}20$ m tiene una velocidad $v_2 = 0{,}3$ m/s.
a) ¿Cuál es el período de este movimiento?
b) ¿Cuál es la amplitud de las oscilaciones?

Solución: a) Escribamos las expresiones de x y de las velocidades v para los dos diferentes instantes t_1 y t_2:

$$x_1 = A\cos\omega t_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{dx_1}{dt} = -\omega A sen\omega t_1$$

$$x_2 = A\cos\omega t_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{dx_2}{dt} = -\omega A sen\omega t_2$$

Si evaluamos las relación:

$$\frac{x_2^2 - x_1^2}{v_1^2 - v_2^2} = \frac{A^2(\cos^2\omega t_2 - \cos^2\omega t_1)}{\omega^2 A^2(sen^2\omega t_1 - sen^2\omega t_2)}$$

$$\frac{x_2^2 - x_1^2}{v_1^2 - v_2^2} = \frac{A^2[(1 - sen^2\omega t_2) - (1 - sen^2\omega t_1)]}{\omega^2 A^2(sen^2\omega t_1 - sen^2\omega t_2)} = \frac{1}{\omega^2} = (\frac{T}{2\pi})^2$$

Se obtiene el período:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{x_2^2 - x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}} = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}20^2 - 0{,}15^2}{0{,}40^2 - 0{,}30^2}} = \pi \text{ s}$$

b) De manera similar evaluamos la relación:

$$\frac{v_1^2 x_2^2 - v_2^2 x_1^2}{v_1^2 - v_2^2} = \frac{\omega^2 A^4(sen^2\omega t_1\cos^2\omega t_2 - sen^2\omega t_2\cos^2\omega t_1)}{\omega^2 A^2(sen^2\omega t_1 - sen^2\omega t_2)}$$

Encontramos así la amplitud (en metros)

$$A = \sqrt{\frac{v_1^2 x_2^2 - v_2^2 x_1^2}{v_1^2 - v_2^2}} = \sqrt{\frac{0{,}40^2 0{,}20^2 - 0{,}30^2 0{,}15^2}{0{,}40^2 - 0{,}30^2}} = 0{,}25$$

Respuesta:

a) $T = \pi$ s
b) $A = 0{,}25$ m

PR-6.05. *Dos partículas vibrando con MAS desfasados*

Dos partículas oscilan en movimiento armónico simple de amplitud $A = 1$ m, a lo largo de segmentos de recta paralelas y adyacentes. Los movimientos de las partículas tienen un período $T = 1{,}5$ s pero difieren en fase por 30°.
a) ¿Qué separación habrá entre ellas, 0,5 s después que la partícula que va atrás deja un extremo de la trayectoria?
b) ¿Cómo se mueven las partículas en ese momento: en el mismo sentido, una hacia la otra o alejándose entre sí?

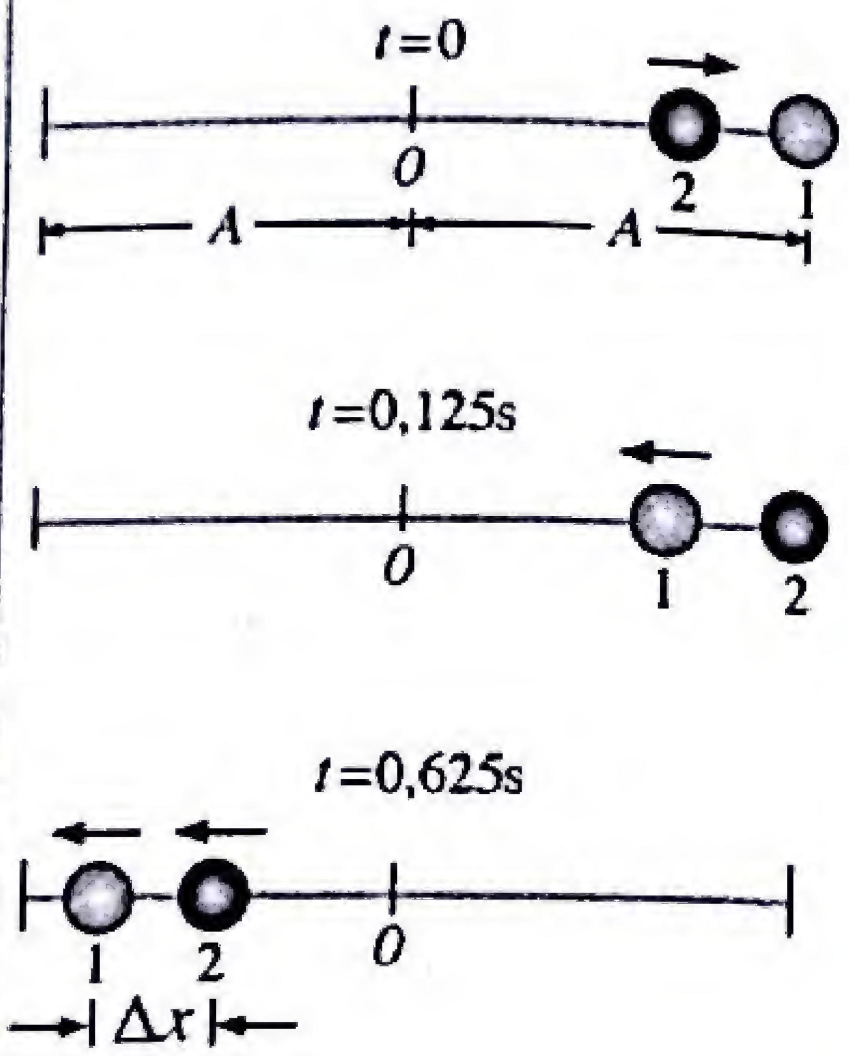
Solución: a) Las posiciones de las partículas en función del tiempo son:

$$x_1 = A\cos(\omega t) \quad \text{y} \quad x_2 = A\cos(\omega t - \pi/6)$$

En el instante inicial, $t = 0$, la partícula 1 está en el extremo derecho, mientras que la partícula 2 alcanzará el mismo punto después de un tiempo dado por:

$$\omega t - \pi/6 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{\pi/6}{\omega} = \frac{\pi/6}{2\pi/T} = \frac{T}{12} = 0{,}125\text{s}$$

La partícula 1 adelanta a la 2 y necesitamos hallar la distancia de separación entre ellas en el instante de tiempo posterior: $t = 0{,}125$ s + 0,5s = 0,625 s. Usando las ecuaciones anteriores tenemos:



$$x_1 = A\cos(\frac{2\pi}{1{,}5\text{s}}0{,}625) = A\cos(\frac{5\pi}{6}) = -(1)0{,}866 = -0{,}866\text{m}$$

$$x_2 = A\cos(\frac{2\pi}{1{,}5\text{s}}0{,}625 - \frac{\pi}{6}) = A\cos(\frac{2\pi}{3}) = -(1)0{,}5 = -0{,}5\text{m}$$

Por lo tanto la distancia entre las partículas en ese instante es:

$$\Delta x = |x_2 - x_1| = |-0{,}866 \text{ m} - (-0{,}50 \text{ m})| = 0{,}366 \text{ m}$$

b) Los sentidos del movimiento se determinan a partir de los signos de las velocidades, $v = dx/dt$, en ese instante:

$$v_1 = -A\omega sen(\omega t) = -A\omega sen(5\pi/6) < 0$$

$$v_2 = -A\omega sen(\omega t - \pi/6) = -A\omega sen(2\pi/3) < 0$$

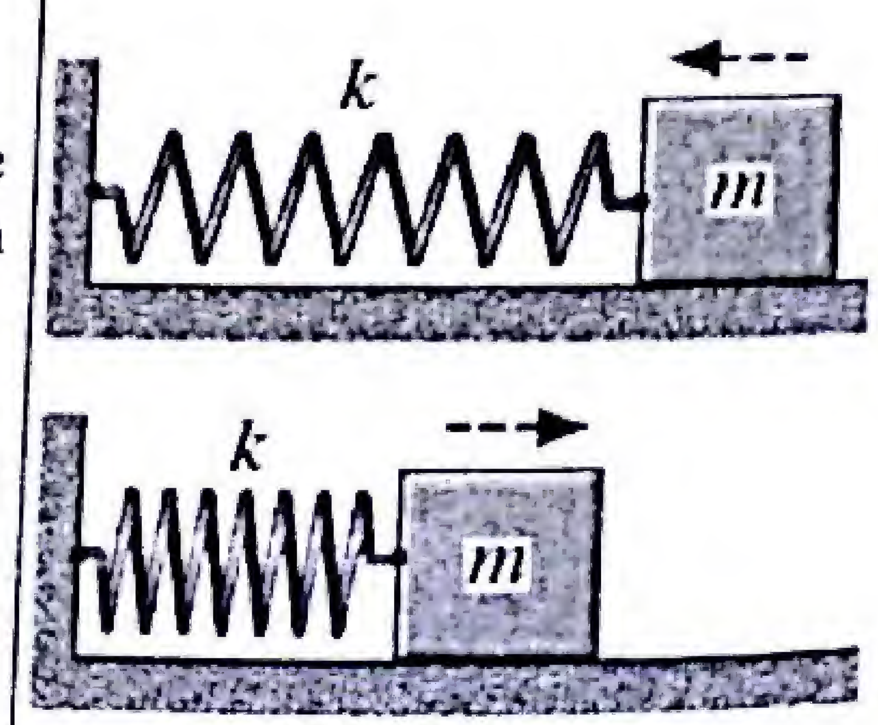
Se observa que las dos velocidades tienen el mismo signo (-) y por lo tanto las partículas viajan en el mismo sentido, una hacia la otra.

Respuesta:

a) $\Delta x = 0{,}366$ m
b) En el mismo sentido

PR-6.06. *¿Cómo distribuye su energía el oscilador?*

Un objeto de masa m = 1 kg está unido a un resorte de constante elástica k = 400 N/m. Si el resorte se estira una distancia x = 0,2 m, y se suelta oscila con un MAS.
a) Halle su velocidad máxima y su aceleración máxima.
b) Cuando x es la mitad de la amplitud, ¿qué fracción de la energía total es cinética y que fracción es potencial?
c) ¿Para qué elongación, la energía es mitad cinética y mitad potencial?



Solución: a) La frecuencia angular de las oscilaciones es:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{400\text{N/m}}{1\text{kg}}} = 20\text{rad/s}$$

La máxima velocidad ocurre cuando el cuerpo pasa por la posición de equilibrio $x = 0$:

$$v = \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2} \quad \Rightarrow \quad v_{max} = \omega\sqrt{A^2 - 0^2}$$

$$v_{max} = \omega A = (20\text{rad/s})(0{,}2\text{m}) = 4\text{m/s}$$

La aceleración ($a = -\omega^2 x$) tiene su valor máximo cuando el cuerpo está en una posición extrema ($x = \pm A$):

$$a_{max} = -\omega^2(-A) = (20\text{rad/s})^2(0{,}2\text{m}) = 80\text{m/s}^2$$

b) Para $x = A/2$ las energías potencial y cinética son:

$$U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k(\frac{A}{2})^2 = \frac{1}{8}kA^2$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2) = \frac{1}{2}k(A^2 - (\frac{A}{2})^2) = \frac{3}{8}kA^2$$

Por consiguiente: $E = K + U = \frac{1}{2}kA^2$

$$\frac{K}{E} = \frac{3kA^2/8}{kA^2/2} = \frac{3}{4}, \qquad \frac{U}{E} = \frac{kA^2/8}{kA^2/2} = \frac{1}{4}$$

c) Las energías cinética y potencial son iguales ($U = K$) en la posición x tal que:

$$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(E) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}kA^2)$$

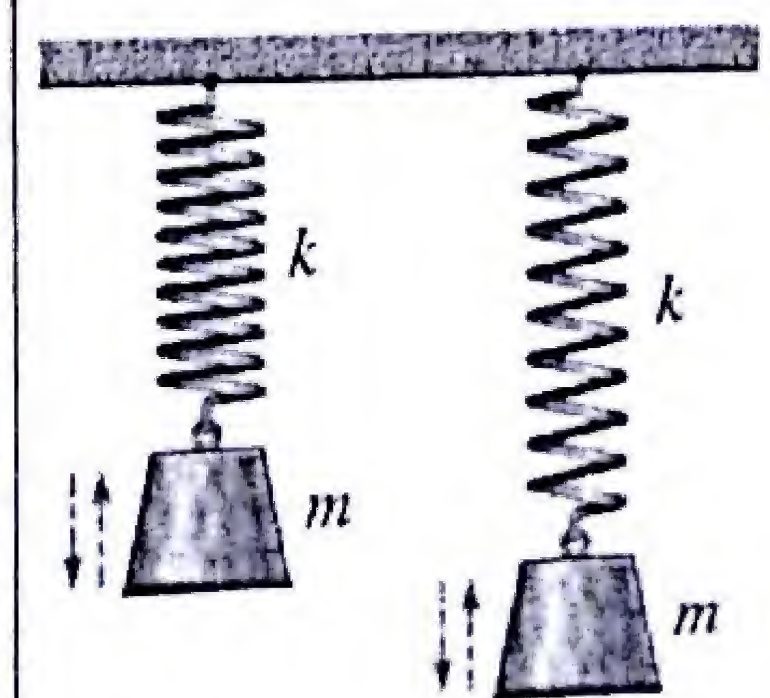
$$x = \frac{A}{\sqrt{2}} = 0{,}707A = 0{,}414\text{m}$$

Respuesta:

a) $v_{max} = 4\text{m/s}, a_{max} = 80\text{m/s}^2$
b) En $x = A/2$ el 25% es potencial y el 75% es cinética.
c) $K = U$ en $x = 0{,}707A$

PR-6.07. *Dos osciladores desfasados*

Dos sistemas masa-resorte idénticos cuelgan uno al lado del otro. En el instante inicial se suelta la primera masa desde un punto a 10 cm por debajo de su posición de equilibrio y vibra con un período T = 2 s. La segunda masa es soltada a 15 cm por debajo de su posición de equilibrio cuando la primera pasa moviéndose hacia arriba por el punto a 5 cm por debajo de su posición de equilibrio. Escriba y grafique la ecuación para cada uno de los movimientos.



Solución: a) Partimos de la expresión para el desplazamiento vertical (en cm) de cada una de las pesas con movimiento oscilatorio:

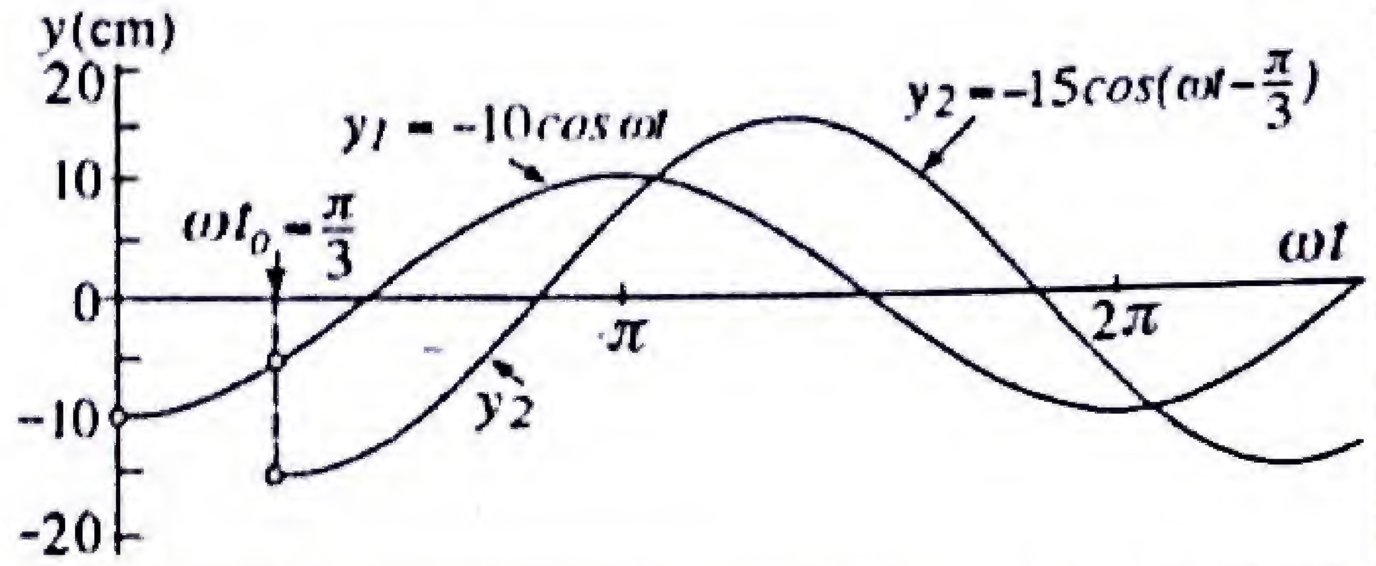
$y_1(t) = -10\cos\omega t$

$y_2(t) = -15\cos(\omega t + \phi)$

Para el instante t_0 se obtienen las expresiones:

$$-5 = -10\cos\omega t_0 \quad \Rightarrow \quad \cos\omega t_0 = 0.5 \quad \Rightarrow \quad \omega t_0 = \frac{\pi}{3}$$
$$-15 = -15\cos(\omega t_0 + \phi) \quad \Rightarrow \quad \omega t_0 + \phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \phi = -\pi/3$$

La correspondientes gráficas son las siguientes:

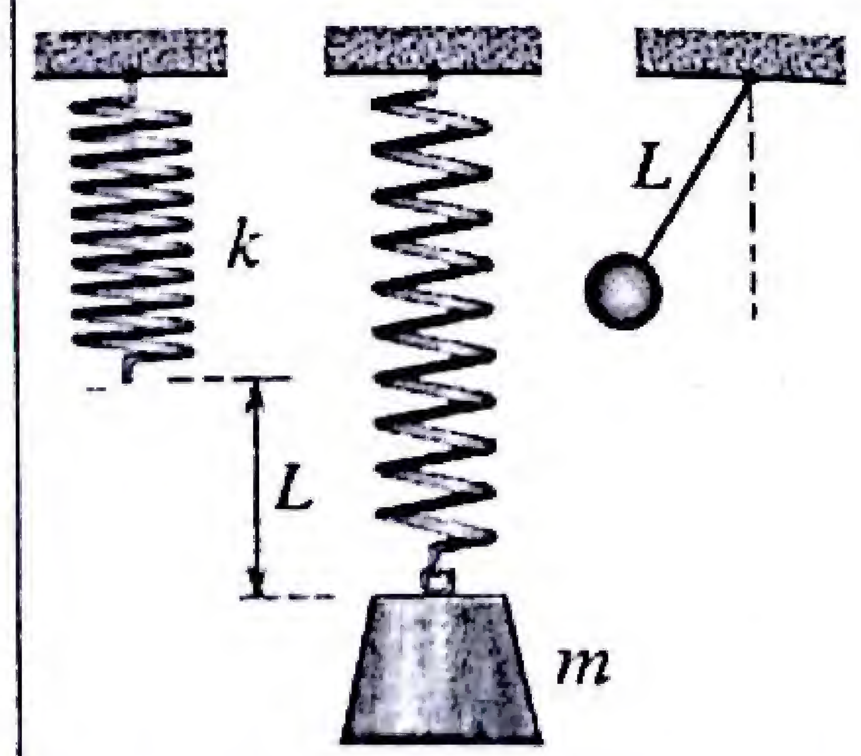


Respuesta:

$$\boxed{\begin{aligned} y_1(t) &= -10\cos\omega t \\ y_2(t) &= -15\cos(\omega t - \frac{\pi}{3}) \end{aligned}}$$

PR-6.08. *Sistema masa-resorte y péndulo simple.*

Supongamos que se suspende un objeto de masa m del extremo de un resorte de constante elástica k, de modo que cuando el objeto está en equilibrio el resorte queda estirado una distancia L. Demuestre que la frecuencia de oscilación de este sistema masa-resorte es la misma que la de un péndulo simple cuyo hilo tiene una longitud L.



Solución: El bloque alcanza el equilibrio cuando fuerza elástica del resorte tiene igual valor que el peso:

$$kL = mg \quad \Rightarrow \quad k = mg/L$$

El periodo de las oscilaciones del sistema masa-resorte es:

$$T_{mr} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/L}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Que es igual al período de un péndulo de longitud L, independiente de su masa.

$$T_p = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

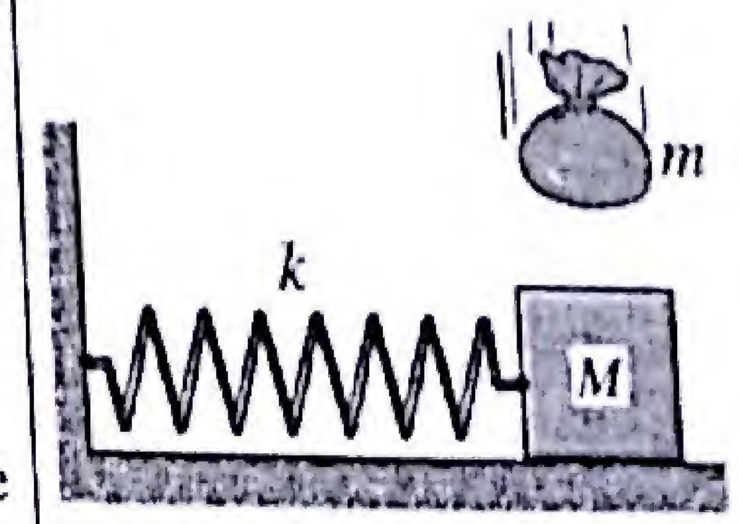
Respuesta:

$$\boxed{T_{mr} = T_p = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}}$$

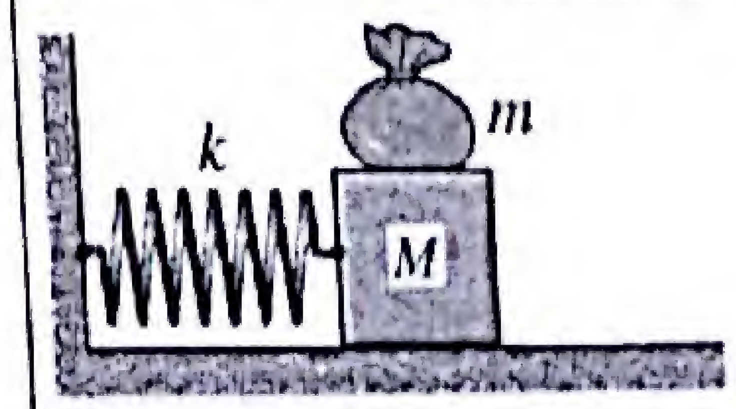
PR-6.09. *¿Cuál será la nueva amplitud de oscilación?*

Un bloque de masa M, unido a un resorte de constante k, oscila en un plano horizontal con un movimiento armónico simple de amplitud A_0. Se deja caer un objeto de masa m sobre el bloque. Si la colisión es perfectamente inelástica, y el objeto queda adherido al bloque, determine la nueva amplitud de oscilación, en los casos:
a) El objeto cae sobre el bloque en el instante en que pasa por la posición de equilibrio.
b) El objeto cae sobre el bloque cuando éste se encuentra en una posición extrema.

Solución: a) En el instante en que el bloque pasa por la posición de equilibrio, su energía es puramente cinética y su velocidad v_0 está determinada por la amplitud inicial de oscilación A_0:



$$E_0 = \frac{1}{2}kA_0^2 = \frac{1}{2}Mv_0^2 \quad \Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}A_0$$



El choque es inelástico y se conserva la cantidad de movimiento horizontal. Si v_a es la velocidad del sistema:

$$Mv_0 + 0 = (M+m)v_a \quad \Rightarrow \quad v_a = (\frac{M}{M+m})v_0$$

La nueva energía total del sistema luego del choque es:

$$E_a = \frac{1}{2}(M+m)v_a^2 = \frac{1}{2}(\frac{M^2}{M+m})v_0^2 = (\frac{M}{M+m})E_0$$

Esta energía estará relacionada con la nueva amplitud A_a:

$$E_a = \frac{1}{2}kA_a^2 = (\frac{M}{M+m})E_0 = (\frac{M}{M+m})(\frac{1}{2}kA_0^2)$$

$$A_a = A_0\sqrt{\frac{M}{M+m}}$$

b) Cuando la masa m cae, estando el bloque instantáneamente en reposo en la posición extrema, toda la energía del sistema está almacenada como energía elástica del resorte.

$$E_a = E_0 = \frac{1}{2}kA_0^2 \quad \Rightarrow \quad A_b = A_0$$

Respuesta:

a) $A_a = A_0\sqrt{\frac{M}{M+m}}$

b) $A_b = A_0$ (Amplitud no cambia)

PR-6.10. *Oscilaciones verticales masa-resorte*

Una pesa de masa m se coloca al extremo inferior de un resorte de constante elástica k. Se desplaza la pesa hacia abajo una distancia A por debajo de la posición de equilibrio y después se suelta. Halle el periodo de las oscilaciones.

Solución: En la posición de equilibrio, el peso mg es igual a la fuerza del resorte ky_0

$$ky_0 = mg$$

Siendo y_0 el alargamiento del resorte en equilibrio. Supongamos ahora que la pesa se desplaza hacia abajo una distancia A por debajo de la posición de equilibrio. La pesa entra en oscilación alrededor de su posición de equilibrio. En un instante dado su desplazamiento respecto de la posición de equilibrio es y. El alargamiento del resorte es $(y_0 + y)$ y la fuerza neta sobre la pesa en ese instante es

$$F_{neta} = \sum F_y = mg - k(y_0 + y)$$

Usando la relación, $ky_0 = mg$:

$$F_{neta} = -ky$$

Aplicando la segunda ley de Newton ($F_{neta} = ma$), tenemos

$$m(\frac{d^2y}{dt^2}) = -ky \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

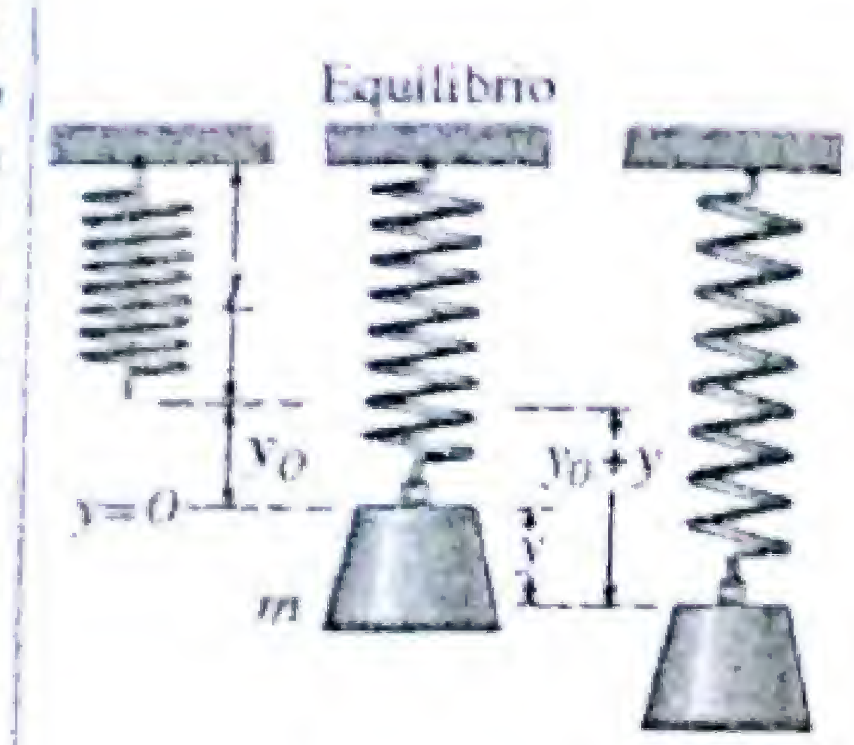
Siendo la constante, $\omega^2 = k/m$. Esta es la ecuación diferencial de segundo orden, lineal y homogénea de un MAS. La solución de esta ecuación es del tipo sinusoidal:

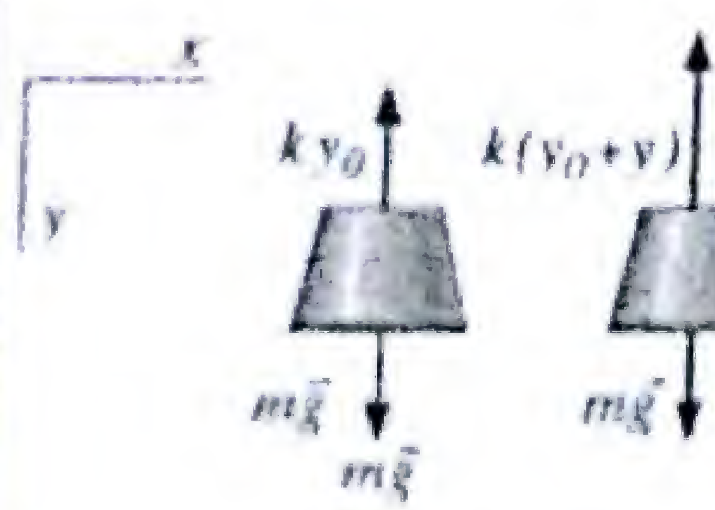
$$y(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

Es decir, las oscilaciones verticales de una masa suspendida de un resorte tienen el mismo periodo que las del movimiento horizontal:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

La única diferencia está en que en las oscilaciones verticales la posición de equilibrio, $y = 0$, corresponde a una situación en que el resorte está estirado.





Respuesta:

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

PR-6.11. *Provocando oscilaciones verticales a balazos*

Un bloque de masa $M = 5$ kg está en equilibrio suspendido de un resorte de constante elástica $k = 100$ N/m. Se dispara desde abajo una bala de masa $m = 0.05$ kg con una rapidez $v_0 = 92$ m/s. La bala se queda empotrada en el bloque.

a) Halle la amplitud del movimiento oscilatorio del sistema.

b) ¿Qué fracción de la energía inicial de la bala es aprovechada como energía mecánica en el oscilador?

Solución: En la posición de equilibrio inicial, el resorte está alargado una distancia dada por:

$$ky_0 = Mg \qquad \Rightarrow \qquad y_0 = Mg/k$$

Cuando la bala choca se conserva el momento lineal del sistema:

$$mv_0 = (m+M)V \qquad \Rightarrow \qquad V = (\frac{m}{m+M})v_0$$

Después de que la bala queda en reposo en el bloque, el sistema bloque + bala se eleva una altura y, y por conservación de la energía: $(K+U)_{ini} = (K+U)_{fin}$

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2 + \frac{1}{2}ky_0^2 = \frac{1}{2}k(y-y_0)^2 + (m+M)gy$$

Al sustituir las expresiones de V y y_0 en esta ecuación:

$$(\frac{m+M}{2})(\frac{mv_0}{m+M})^2 + \frac{k}{2}(\frac{Mg}{k})^2 = \frac{k}{2}(y - \frac{Mg}{k})^2 + (m+M)gy$$

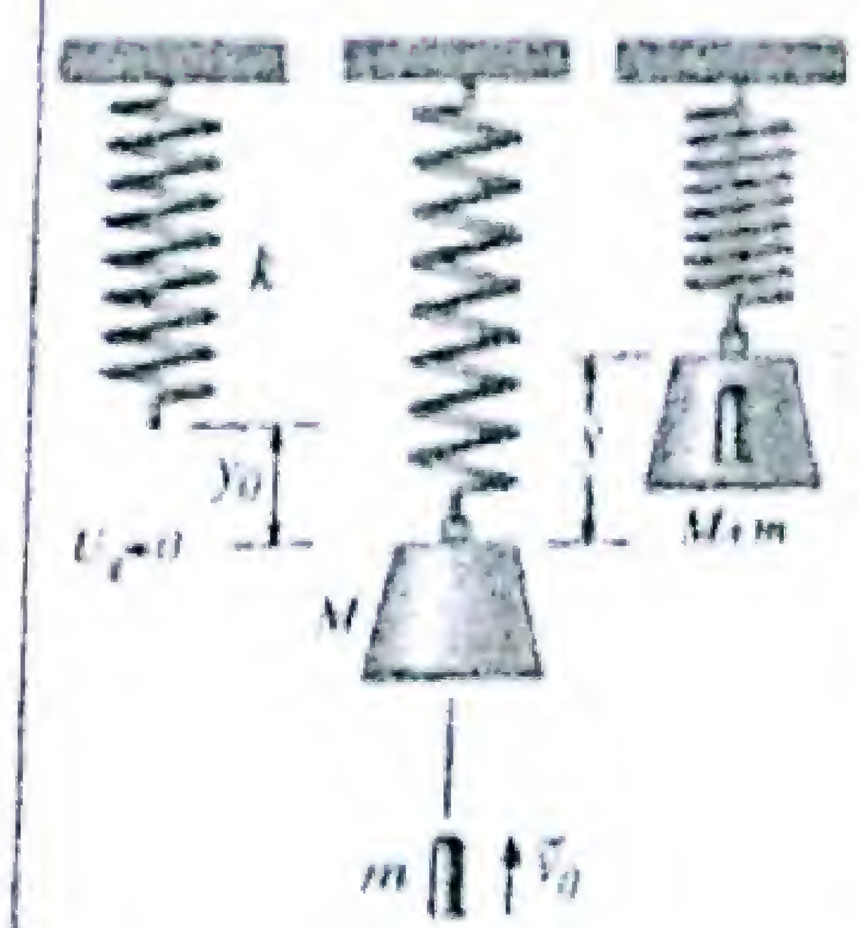
Simplificando y reemplazando los valores numéricos, queda:

$$ky^2 + (2mg)y - \frac{(mv_0)^2}{m+M} = 0 \Rightarrow 100y^2 + 0{,}98y - 4{,}19 = 0$$

Esta ecuación cuadrática tiene como raíz positiva: $y = 0{,}2$ m. El sistema oscila alrededor de una nueva posición de equilibrio y'_0 (mas baja):

$$y'_0 - y_0 = \frac{(m+M)g}{k} - \frac{Mg}{k} = \frac{mg}{k} = 0{,}005\text{m}$$

La amplitud de oscilación es: $A = 0{,}2\text{m} + 0{,}005\text{m} = 0{,}205$ m



b) La fracción de la energía aprovechada es:

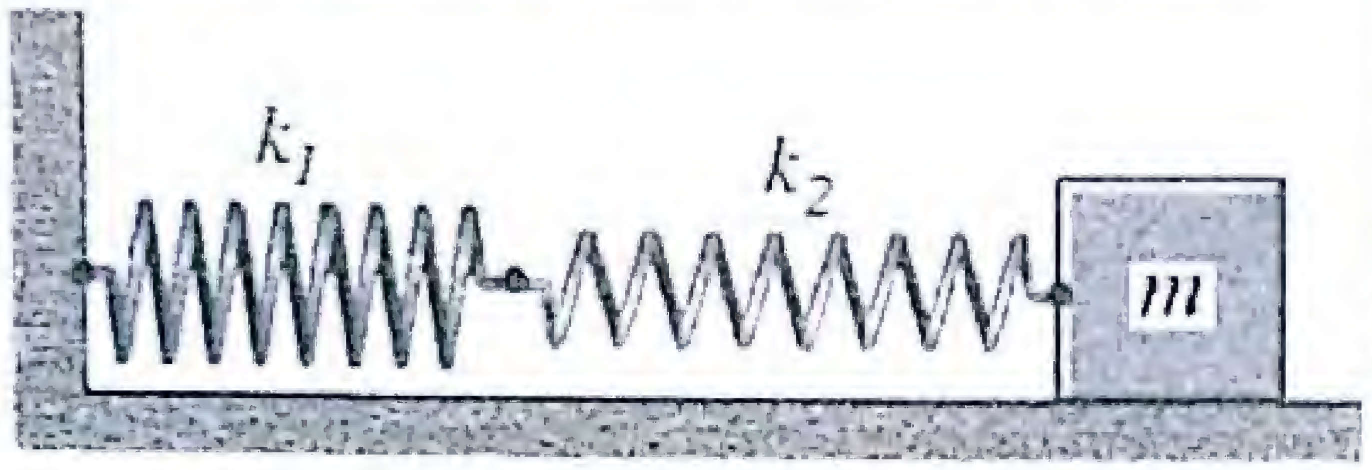
$$\frac{E_{fin}}{E_{ini}} = \frac{\frac{1}{2}ky^2}{\frac{1}{2}mv_0^2} = \frac{\frac{1}{2}(m+M)V^2}{\frac{1}{2}mv_0^2} = \frac{m}{m+M} = \frac{0{,}05}{5+0{,}05} = 0{,}01$$

Respuesta:

a) Amplitud: $A = 0{,}205$ m
b) $E_{fin} / E_{ini} = 1\%$

PR-6.12. *Oscilaciones con dos resortes en serie*

Dos resortes de constantes elásticas k_1 y k_2 están unidos en serie a un bloque de masa m, que puede deslizarse libremente sobre una superficie horizontal sin fricción.



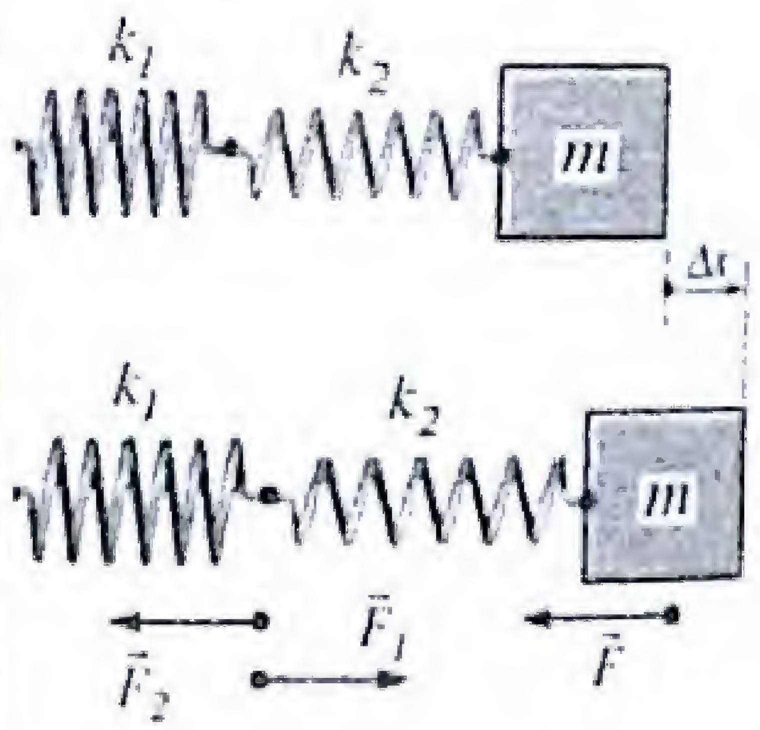
Demuestre que la frecuencia de oscilación del bloque es:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1+k_2)m}} = \frac{f_1 f_2}{\sqrt{f_1^2+f_2^2}}$$

Donde f_1 y f_2 son las frecuencias a las que oscilaría el bloque si estuviera unido solamente al resorte k_1 o al resorte k_2.

Solución: Cuando el bloque oscila, el resorte k_1 está estirado (o comprimido) una distancia Δx_1 y el resorte k_2 una distancia Δx_2. Por la ley de Hooke: $F_1 = -k\Delta x_1$ y $F_2 = -k\Delta x_2$

En el punto de unión de los resortes, según la tercera ley de Newton, las fuerzas son iguales. Además, los resortes no tienen masa y la tensión tiene igual magnitud en cualquier punto a lo largo de éstos e igual a la fuerza restauradora, F, sobre el bloque: $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = F$



El desplazamiento del bloque, Δx, respecto de su posición de equilibrio es la suma de las deformaciones de los resortes:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = (-\frac{F_1}{k_1}) + (-\frac{F_2}{k_2}) = -F(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2})$$

Despejando, obtenemos la fuerza neta sobre el bloque:

$$F = -(\frac{k_1 k_2}{k_1+k_2})\Delta x = -k_{eq}\Delta x$$

De modo que los dos resortes se comportan como uno sólo de constante elástica equivalente:

$$k_{serie} = \frac{k_1 k_2}{k_1+k_2}$$

La frecuencia de oscilación:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{serie}}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1+k_2)m}} = \sqrt{\frac{1}{(\frac{4\pi^2 m}{k_1}+\frac{4\pi^2 m}{k_2})}}$$

$$f = \sqrt{\frac{1}{(\frac{1}{f_1^2}+\frac{1}{f_2^2})}} = \frac{f_1 f_2}{\sqrt{f_1^2+f_2^2}}$$

Siendo las frecuencias individuales a las que oscilaría el bloque si estuviera unido solamente al resorte k_1 o al resorte k_2.

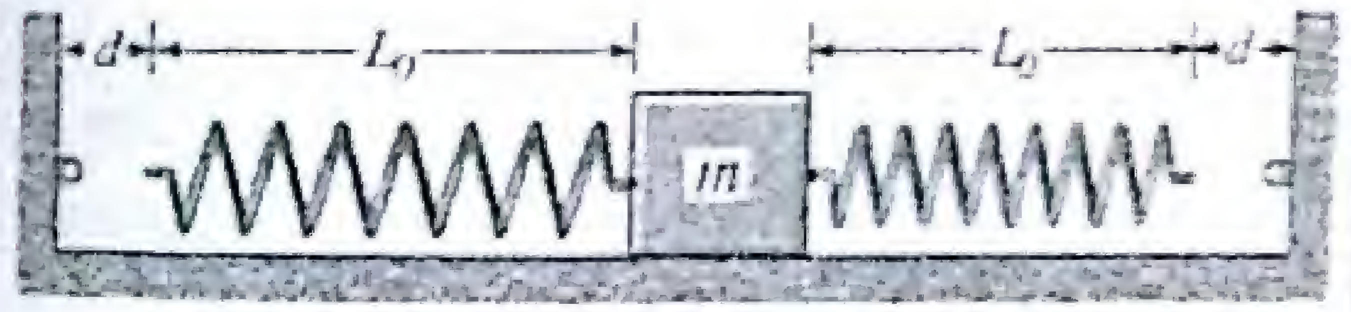
$$f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k_1/m} \qquad y \qquad f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k_2/m}$$

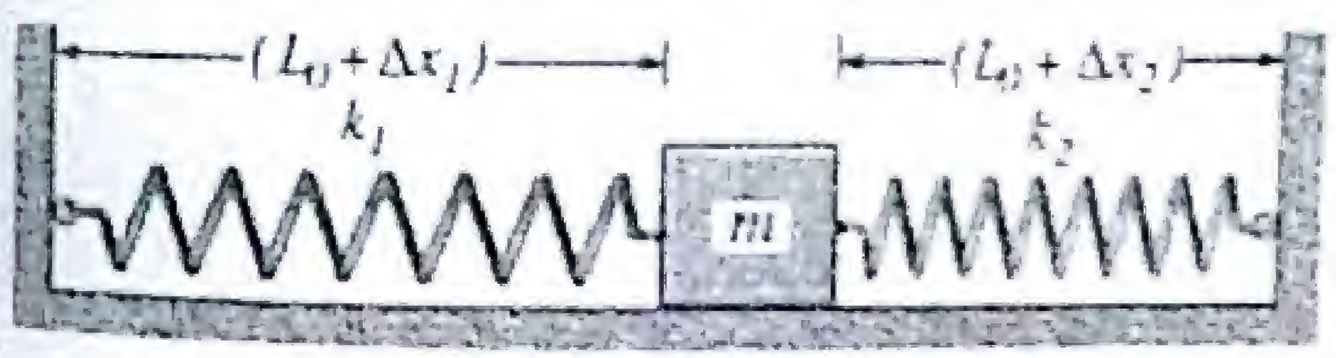
Respuesta:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1+k_2)m}} = \frac{f_1 f_2}{\sqrt{f_1^2+f_2^2}}$$

PR-6.13. *Oscilando con resortes a ambos lados*

Dos resortes de constantes $k_1 = 5$ N/m y $k_2 = 15$ N/m y de igual longitud natural $L_0 = 0{,}4$ m, están unidos a un bloque de masa $m = 0{,}2$ kg sobre un plano horizontal sin fricción. Los extremos libres de los resortes están inicialmente a igual distancia $d = 0{,}2$ m de las paredes y luego se atan a éstas.





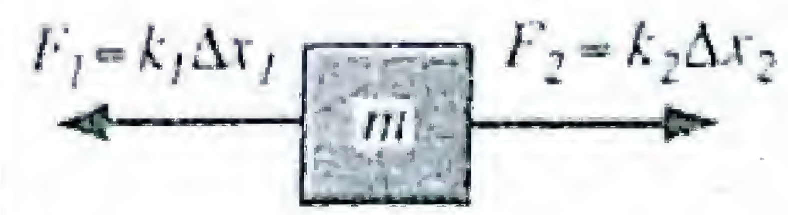
a) Halle la nueva longitud de cada resorte en equilibrio.
b) Si se desplaza el bloque ligeramente desde su posición de equilibrio y luego se suelta, Demuestre que la frecuencia de oscilación del bloque es:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(k_1+k_2)}{m}} = \sqrt{f_1^2+f_2^2}$$

Donde f_1 y f_2 son las frecuencias a las que oscilaría el bloque si estuviera unido solamente al resorte k_1 o al resorte k_2.

Solución: a) Cuando el bloque está en equilibrio se cumple: $\vec{F}_{neta} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$, por lo tanto:

$$k_1\Delta x_1 = k_2\Delta x_2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{15\text{N/m}}{5\text{N/m}} = 3$$



Además la suma de las elongaciones es:

$$\Delta x_1 + \Delta x_2 = 2d \qquad \Rightarrow \qquad 3\Delta x_2 + \Delta x_2 = 4\Delta x_2 = 2d$$

Solución: Partimos de la expresión del periodo del péndulo:

$$T = 2\pi\sqrt{L/g}$$

Tomando logaritmos:

$$\ln T = \ln 2\pi + \frac{1}{2}\ln L - \frac{1}{2}\ln g$$

Tomando diferenciales a ambos lados de esta ecuación, se obtiene el cambio relativo del periodo del péndulo:

$$\frac{dT}{T} = -\frac{1}{2}\frac{dg}{g}$$

b) El retraso del reloj en Guyana respecto a Londres al cabo de un mes es:

$$\Delta T = -\frac{1}{2}\frac{\Delta g}{g}T$$

$$|\Delta T| = \frac{1}{2}\frac{(9{,}81\text{m/s}^2 - 9{,}78\text{m/s}^2)}{9{,}81\text{m/s}^2}(30\text{días})24\frac{\text{horas}}{\text{día}} = 1{,}1\text{hora}$$

Respuesta

a) $\dfrac{\Delta T}{T} = -\dfrac{1}{2}\dfrac{\Delta g}{g}$.

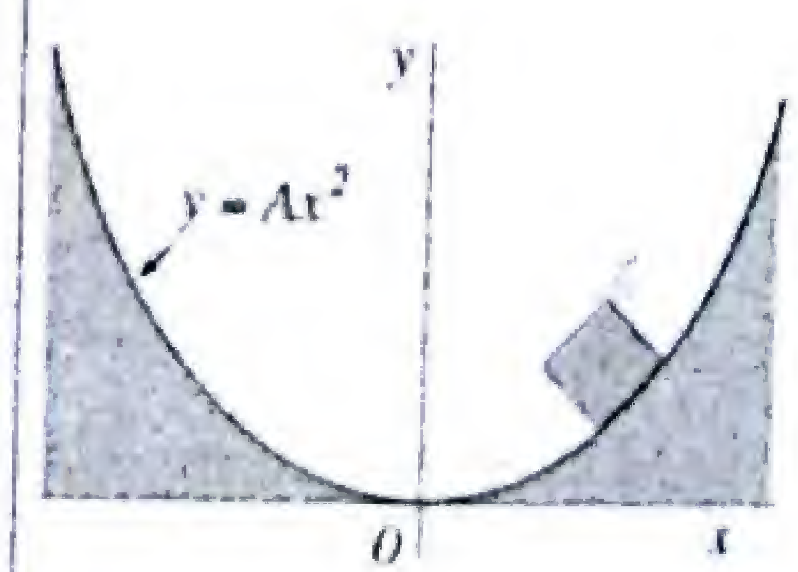
b) $\Delta T = -1{,}10$ horas

PR-6.19. *Partícula oscilando en un pozo parabólico*

Una partícula de masa M es libre de deslizar en una superficie sin fricción cuya forma está dada por:

$$y(x) = Ax^2$$

siendo A una constante. Si se suelta la partícula desde cierta altura, determine el período del movimiento oscilatorio.



Solución: La energía potencial de la partícula a una altura h es:

$$U(x) = mgy(x)$$

y la fuerza restauradora:

$$F_x = -\frac{dU(x)}{dx} = -\frac{d}{dx}(mgy) = (-2mgA)x$$

Aplicando la segunda ley de Newton ($F_x = ma_x$) se obtiene la ecuación diferencial en x:

$$F_x = (-2mgA)x = m\frac{d^2x}{dt^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Siendo la constante: $\omega^2 = 2gA$. Esta es la ecuación diferencial para la aceleración en un MAS. La frecuencia angular y el periodo son, respectivamente:

$$\omega = \sqrt{2gA} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{2gA}}$$

Respuesta

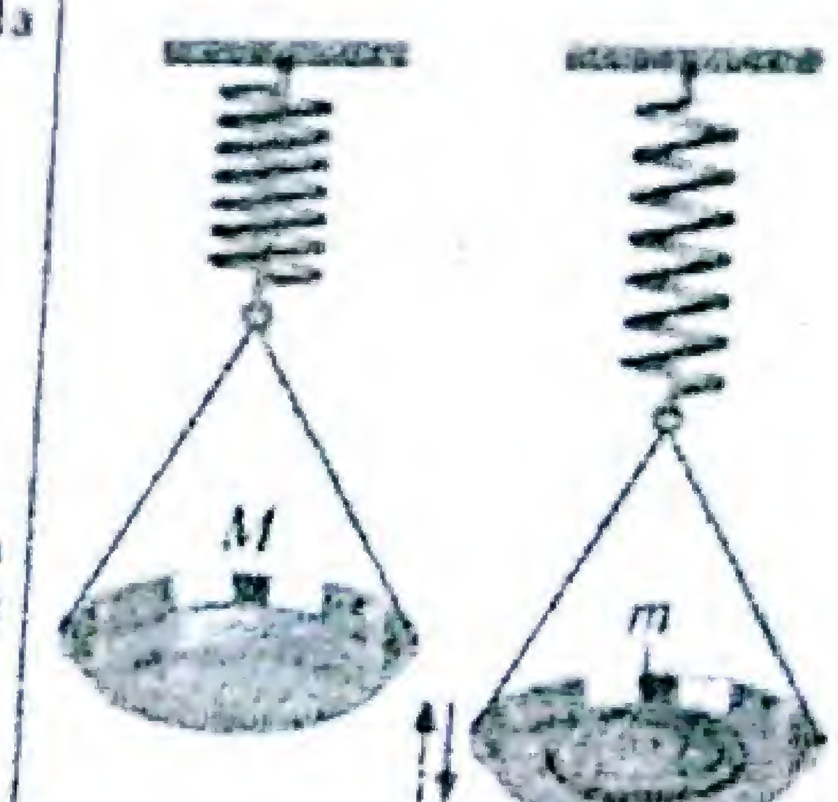
$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{2gA}}$$

PR-6.20. *¿Dónde pierde contacto la moneda?*

Se cuelga un platillo de masa M de un resorte y se pone a oscilar verticalmente con un período $T = 0{,}25$ s y una amplitud $A = 8$ cm. En el momento que el platillo llega a su punto inferior se le coloca una moneda encima. Suponga que la masa m de la moneda es pequeña y no influye sobre la oscilación del platillo. ¿A qué distancia por encima de la posición de equilibrio perderá el contacto la moneda con el platillo?

Solución: La posición, velocidad y aceleración de la moneda en función del tiempo, son respectivamente:

$$y(t) = -A\cos\omega t$$
$$v(t) = \omega A \operatorname{sen}\omega t$$
$$a(t) = \omega^2 A\cos\omega t$$



La moneda perderá contacto con el platillo cuando la aceleración a del platillo es hacia abajo y de magnitud ligeramente superior a g. Es decir, para:

$$\cos\omega t_1 = -\frac{g}{\omega^2 A}$$

Por lo tanto, la posición es:

$$y(t_1) = -A\cos\omega t_1 = -A\left(-\frac{g}{\omega^2 A}\right) = \frac{g}{\omega^2}$$

$$y(t_1) = \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{(9{,}8\text{m/s}^2)(0{,}25\text{s})^2}{4\pi^2} = 0{,}0155\text{m}$$

Es decir, la moneda perderá el contacto con el platillo cuando está a una distancia de 1,55 cm por encima de la posición de equilibrio del platillo.

Respuesta

y = 1,55 cm por encima de la posición de equilibrio.

$$k_2 = k_1 + k_1 = 2k_1 = 6k_o$$

Al conectar a su vez esta combinación en *serie* con el tercer resorte, tenemos un resorte de constante equivalente (PR-3.28 y PR-6.12):

$$\frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{2k_1} = \frac{1}{3k_0} + \frac{1}{6k_0}$$

Así la combinación tiene una constante: $k_{eq} = 2k_0$. El periodo de las oscilaciones del sistema de los tres resortes es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{eq}}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k_0}} = \frac{T_0}{\sqrt{2}}$$

Constante elástica equivalente:

Resortes en paralelo

$$k_{eq} = k_1 + k_2$$

Resortes en Serie

$$k_{eq} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

Respuesta

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{eq}}} = \frac{T_0}{\sqrt{2}}}$$

PR-6.16. *Moneda vibrando sobre un plano horizontal*

Una moneda está sobre una superficie que vibra horizontalmente con un movimiento armónico simple de frecuencia $f = 2$ Hz. El coeficiente de fricción estática entre la moneda y el plano es $\mu_e = 0{,}49$. ¿A qué amplitud máxima pueden llegar las vibraciones sin que la moneda resbale sobre la superficie?

Solución: El desplazamiento, velocidad y aceleración de la moneda en movimiento vibratorio son respectivamente:

$$x = A\cos\omega t \qquad v = -\omega A\,sen\,\omega t \qquad a = -\omega^2 A\cos\omega t$$

El valor máximo de la fuerza sobre la moneda en dirección horizontal es:

$$F_{max} = ma_{max} = m(\omega^2 A)$$

Si la amplitud A aumenta, la fuerza también aumenta pero la fricción estática no debe aumentar mas allá del valor:

$$F_{max} = \mu_e mg.$$

Por lo tanto, la amplitud máxima de las vibraciones para que la moneda no resbale sobre la superficie es:

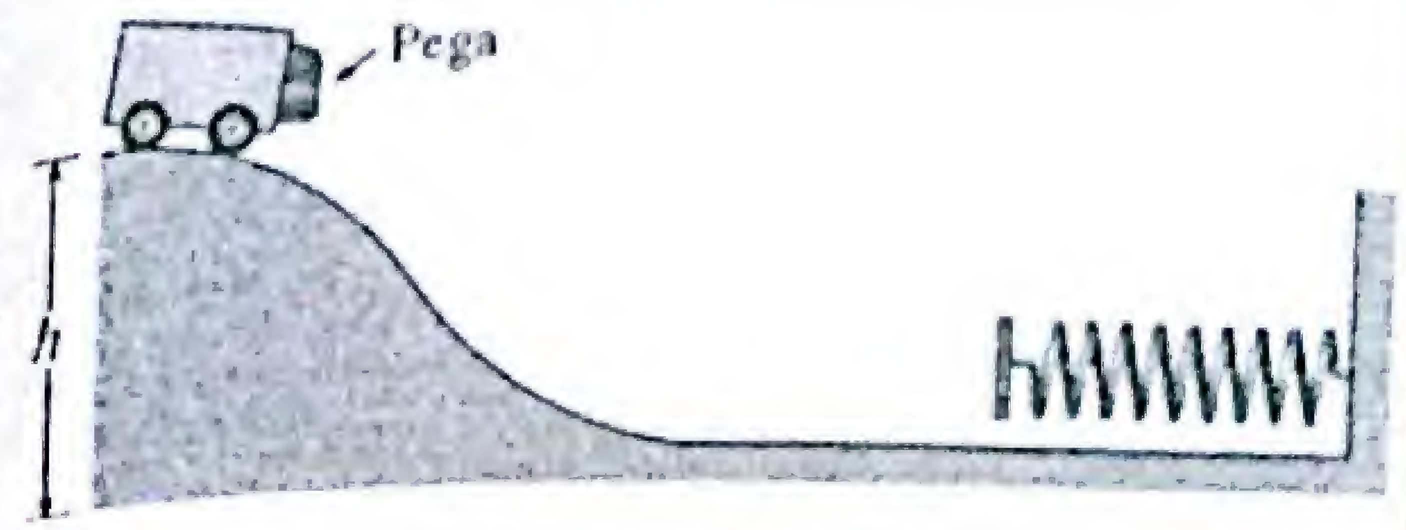
$$A_{max} = \frac{\mu_e g}{\omega^2} = \frac{(0{,}49)(9{,}8\text{m/s}^2)}{4\pi^2(2\text{s}^{-1})^2} = 0{,}03\text{m}$$

Respuesta

$$\boxed{A_{max} = \frac{\mu_e g}{\omega^2} = 3\text{ cm}}$$

PR-6.17. *Oscilaciones al final de la pista*

Un carrito de masa desconocida se suelta desde una altura h y desliza por una pista sin fricción como en la figura.



Al llegar al final de la pista el carrito se adhiere a un resorte de masa despreciable y constante elástica desconocida, que está unido a una pared. El resorte se comprime una distancia A. ¿Cuál será el período de las oscilaciones?

Solución: La energía potencial inicial del carrito se convierte en cinética al llegar al pie de la pista: $K = mgh$. Esta energía cinética, a su vez es entregada como energía potencial elástica al resorte y lo comprime hasta una distancia A:

$$K = mgh = \frac{1}{2}kA^2$$

Despejando la constante k del resorte:

$$k = \frac{2mgh}{A^2}$$

Sustituyendo k se obtiene el período de las oscilaciones:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{2\pi A}{\sqrt{2gh}}$$

Respuesta

$$\boxed{T = \frac{2\pi A}{\sqrt{2gh}}}$$

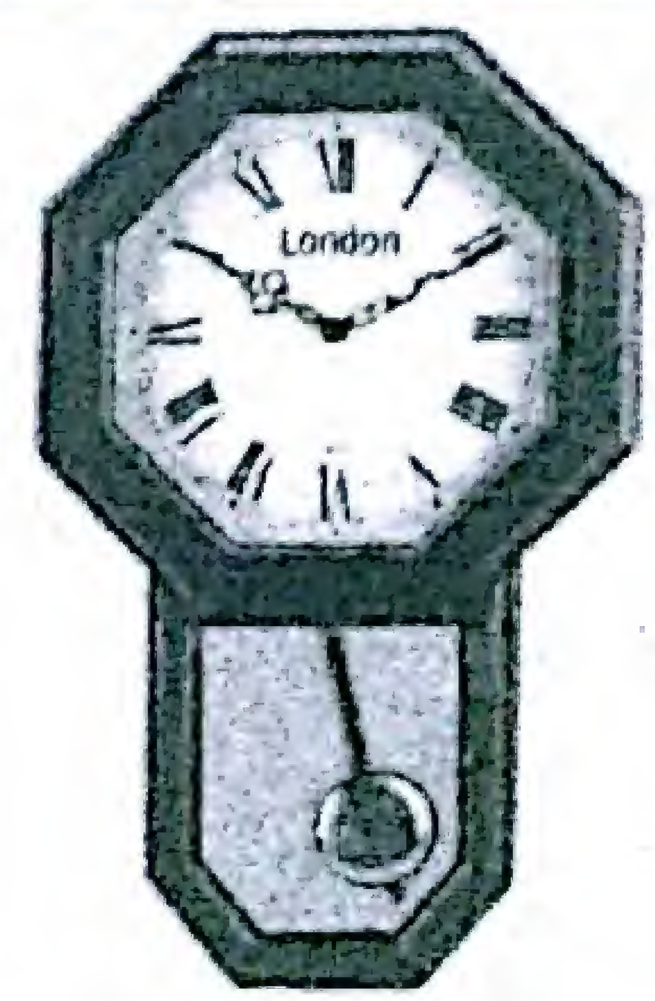
PR-6.18. *Una buena razón para viajar al Caribe*

Newton predijo que, debido a la rotación de la Tierra, su radio era mayor en el ecuador que en los polos y, como consecuencia, el valor de g debía ser menor cerca de la región ecuatorial. Para corroborar esta predicción, a fines del siglo XVII, se llevó un reloj de péndulo desde Londres a Guyana, que para entonces era una colonia británica.

a) Halle el cambio relativo en el período del péndulo, $\Delta T/T$, en función del cambio relativo $\Delta g/g$.

b) ¿Por cuánto tiempo se retrasará el reloj en Guyana respecto a Londres al cabo de un mes?

Tómese los valores: $g_G = 9{,}78\text{ m/s}^2$, $g_L = 9{,}81\text{ m/s}^2$



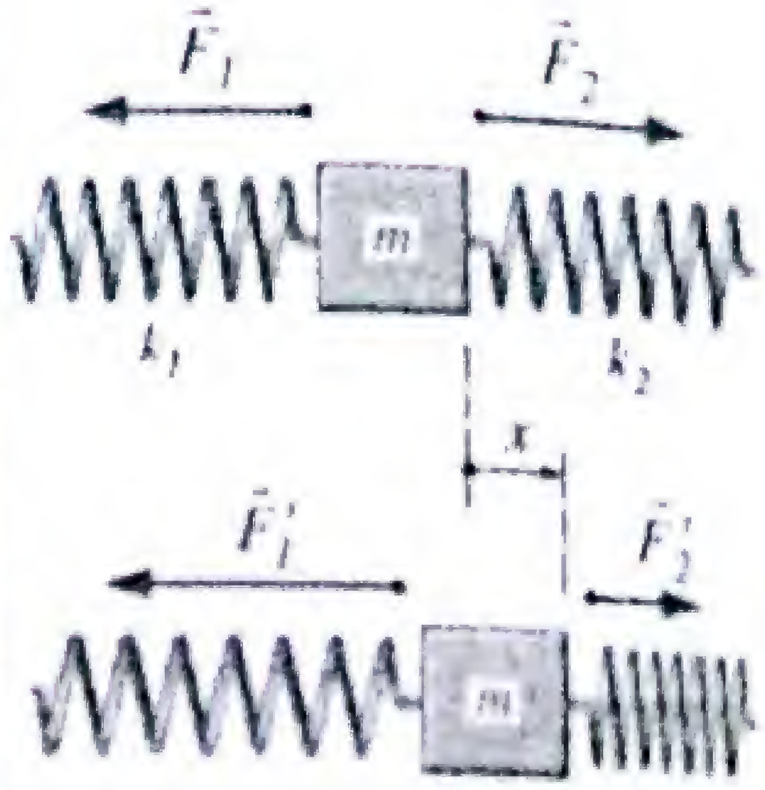
$$\Delta x_2 = \frac{d}{2} = \frac{0{,}2\text{m}}{2} = 0{,}1\text{m} \qquad \Delta x_1 = 3\Delta x_2 = 0{,}3\text{m}$$

Las longitudes de los resortes estirados en equilibrio son:

$$L_1 = L_0 + \Delta x_1 = 0{,}7\text{m}$$

$$L_2 = L_0 + \Delta x_2 = 0{,}5\text{m}$$

b) Supongamos que el bloque es desplazado ligeramente hacia la derecha en una distancia x, entonces el resorte de la derecha estará ahora estirado en una distancia $(\Delta x_2 - x)$ y empuja al bloque hacia la derecha con una fuerza menor, $F_2 = +k_2(\Delta x_2 - x)$. Al mismo tiempo el resorte de la izquierda queda estirado en una distancia $(\Delta x_1 + x)$ y empuja al bloque hacia la izquierda con una fuerza mayor, $F_1' = -k_1(\Delta x_1 + x)$. La fuerza neta sobre el bloque es la suma: $\vec{F}_{neta} = \vec{F}_1' + \vec{F}_2'$



$$F_{neta} = -k_1(\Delta x_1 + x) + k_2(\Delta x_2 - x)$$

$$F_{neta} = [\,k_2\Delta x_2 - k_1\Delta x_1\,] - (k_1 + k_2)x$$

Tomando en cuenta que $k_2\Delta x_2 = k_1\Delta x_1$, la expresión anterior se escribe:

$$F_{neta} = -(k_1 + k_2)x$$

Si escribimos $F_{neta} = -kx$, vemos que el sistema se comporta como si hubiese un sólo resorte de constante elástica equivalente: $k_{eq} = k_1 + k_2$.

b) La frecuencia de las oscilaciones es:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_{eq}}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(k_1 + k_2)}{m}} = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$$

Siendo: $f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k_1/m}$ y $f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{k_2/m}$

Respuesta:

a) $L_1 = L_0 + \Delta x_1 = 0{,}7\text{m}$
$L_2 = L_0 + \Delta x_2 = 0{,}5\text{m}$

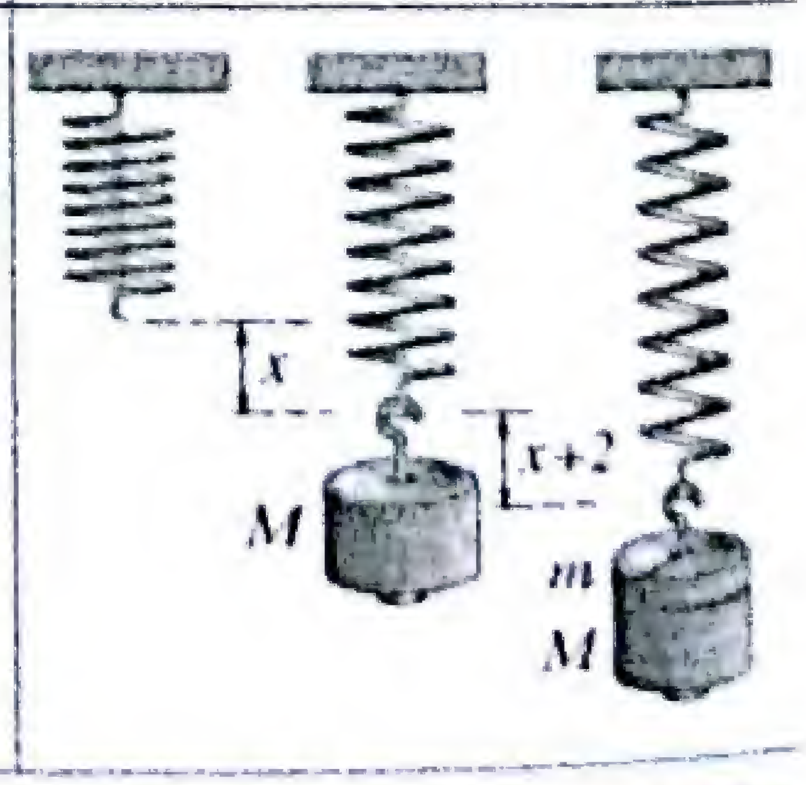
b)
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(k_1 + k_2)}{m}} = \sqrt{f_1^2 + f_2^2}$$

PR-6.14. *Colgando del resorte una masa adicional*

Un objeto de masa $M = 2$ kg cuelga de un resorte. Si se agrega otro cuerpo de masa $m = 0{,}4$ kg el resorte se estira adicionalmente en 2 cm. El cuerpo de 0,4 kg es retirado y el objeto entra en oscilación.

a) ¿Cuál es la constante del resorte?

b) ¿Cuál es el período del movimiento?



Solución: a) La constante k del resorte es:

$$k = \frac{Mg}{x} = \frac{(M + m)g}{x + 2}$$

de donde se obtiene el estiramiento inicial x:

$$Mg(x + 2) = (M + m)gx$$

$$x = (2\text{cm})\frac{M}{m} = (2\text{cm})\frac{2\text{kg}}{0{,}4\text{kg}} = 10\text{cm}$$

La constante del resorte es:

$$k = \frac{Mg}{x} = \frac{(2\text{kg})(9{,}8\text{m/s}^2)}{0{,}1\text{m}} = 196\text{N/m}$$

b) El período del movimiento es:

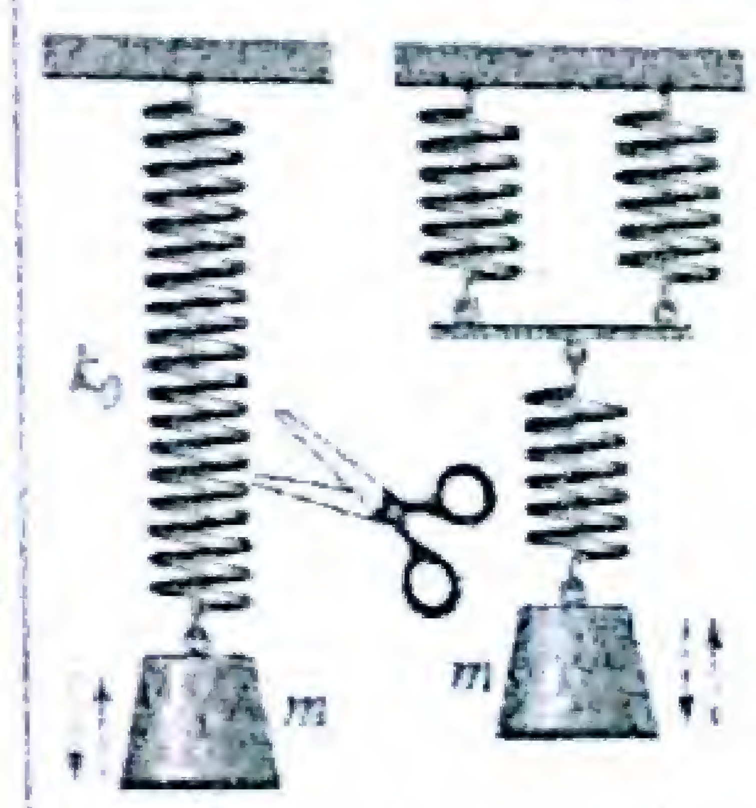
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{2\text{kg}}{196\text{N/m}}} = 0{,}635\text{s}$$

Respuesta

a) $k = 196$N/m
b) $T = 0{,}635$ s

PR-6.15. *Cortando un resorte en tres pedazos iguales*

Una pesa de masa m está suspendida de un resorte largo de constante elástica k_o y el sistema oscila con un período T_o. A continuación cortamos el resorte en tres pedazos iguales y conectamos los tres resortes idénticos así obtenidos mediante una barra ligera, de la manera ilustrada en la figura. ¿Cuál será el período de las oscilaciones del nuevo sistema?



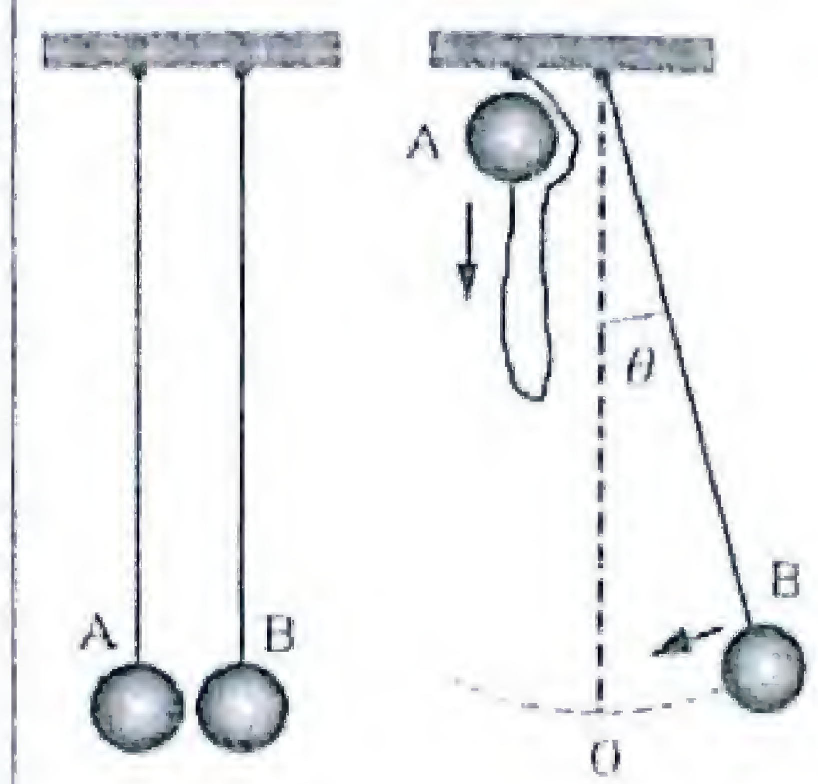
Solución: El resorte original de constante elástica k_0 puede ser considerado como tres resortes de longitud un tercio del total, conectados en serie. Cuando aplicamos una fuerza al resorte entero, esta fuerza es común a cada uno de estos tres resortes, los cuales se deformarán solo en un tercio de la deformación total. Por lo tanto la constante elástica de cada pedazo es: $k_1 = 3k_o$.

Cuando se conectan dos de estos resortes de constante k_1 en *paralelo* la constante equivalente es (ver problema PR-3.29):

PR-6.21. *¿Cuál de las dos esferitas llega primero?*

Dos esferitas idénticas están inicialmente suspendidas de hilos inextensibles de igual longitud. La esferita A es levantada hasta el punto de suspensión y la B es apartada hasta un pequeño ángulo, θ, con la vertical. Si soltamos las dos esferitas simultáneamente, ¿cuál llegará primero al punto de equilibrio, O?

Solución: La esferita A cae verticalmente en la distancia L bajo la acción de la gravedad. El tiempo de caída de la esferita está dado por:



$$L = \frac{1}{2} g t_A^2 \quad \Rightarrow \quad t_A = \sqrt{\frac{2L}{g}}$$

El movimiento de la esferita B es armónico simple y el tiempo empleado para llegar a la posición mas baja es justamente un cuarto del periodo de oscilación:

$$t_B = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Si comparamos los tiempos que emplean en llegar al punto mas bajo, se tiene:

$$\frac{t_A}{t_B} = \frac{\sqrt{2L/g}}{(\pi/2)\sqrt{L/g}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} = 0{,}9$$

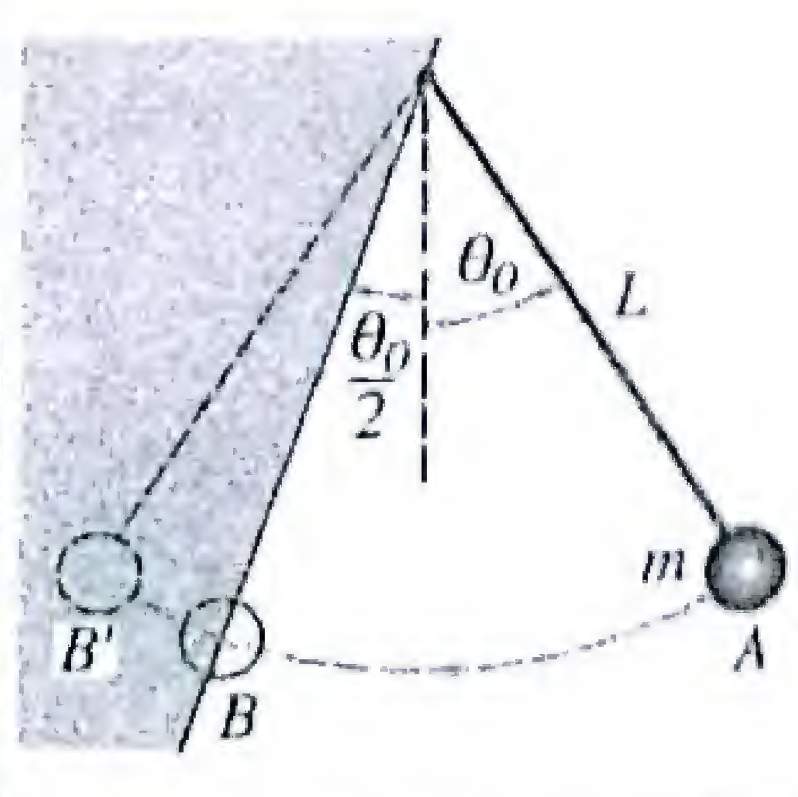
Es decir, la esferita A que cae verticalmente y recorre una longitud mayor llega primero.

Respuesta

La A llega primero:
$$\frac{t_A}{t_B} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} = 0{,}9$$

PR-6.22. *Péndulo suspendido de una pared inclinada*

Un péndulo de longitud L está suspendido en una pared inclinada que forma un ángulo $\theta_0/2$ con la vertical. El péndulo se desvía de la vertical a un ángulo θ_0 y se deja en libertad. Si las colisiones con la pared son perfectamente elásticas, determine el periodo de las oscilaciones.



Solución: Cuando la pelota llega al punto B, rebota elásticamente de la pared y se devuelve con igual rapidez, regresando de nuevo al punto A, como si la pared no existiera. La elongación angular es:

$$\theta(t) = \theta_0 \cos\omega t,$$

El tiempo empleado para el recorrido desde A hasta B está determinado por la condición:

$$\frac{\theta_0}{2} = \theta_0 \cos(\omega_0 t_{AB}) \quad \Rightarrow \quad \cos(\omega_0 t_{AB}) = -\frac{1}{2}$$

$$\omega_0 t_{AB} = 2\frac{\pi}{3}$$

El periodo de las oscilaciones es:

$$T = t_{ABA} = 2t_{AB} = 2(\frac{2\pi}{3})(\frac{1}{\omega_0}) = 2(\frac{2\pi}{3})(\frac{T_0}{2\pi}) = (\frac{2}{3})T_0$$

Siendo T_0 el periodo del péndulo normal como si la pared no existiese, por lo tanto:

$$T = \frac{2}{3}(2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}) = \frac{4\pi}{3}\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Respuesta

$$T = \frac{2}{3}T_0 = \frac{4\pi}{3}\sqrt{\frac{L}{g}}$$

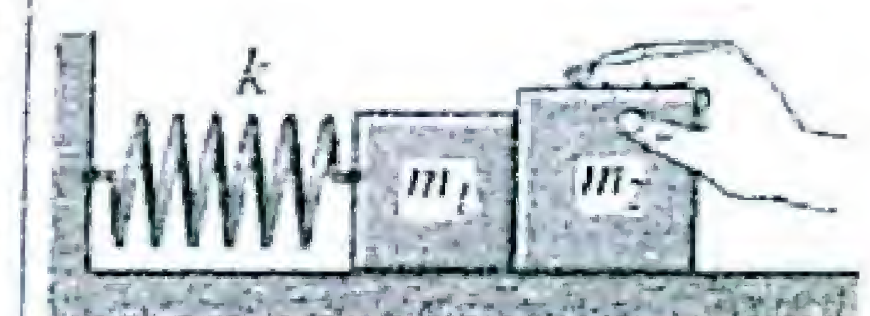
PR-6.23 *Comprime y luego suelta*

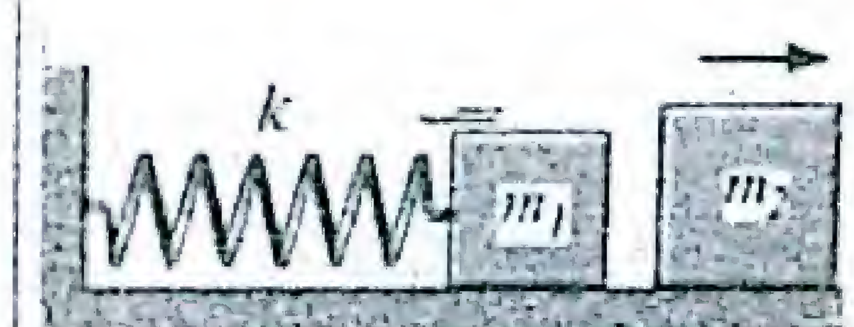
Sobre una mesa horizontal sin fricción hay un bloque de masa m_1 = 1 kg, conectado a un resorte ligero de constante elástica k = 300 N/m, el cual tiene su extremo fijo a una pared. Un segundo bloque, m_2 = 2 kg se empuja contra m_1, comprimiendo el resorte en una distancia x_0 = 0,5 m. Si se suelta el sistema, los dos bloques se mueven juntos hacia la derecha, perdiendo contacto en cierto instante.

a) ¿Al cabo de cuánto tiempo se separan los dos bloques?

b) ¿Cuál será la amplitud de oscilación de m_1?

c) ¿Cuál es la separación d de los dos bloques cuando el resorte se estira al máximo por primera vez?





Solución: a) Los bloques se separan cuando pasan por el punto de equilibrio, donde alcanzan la máxima velocidad. Este instante corresponde a un cuarto del periodo de oscilación del sistema ($m_1 + m_2$):

$$t_0 = \frac{1}{4}T_{12} = \frac{1}{4}2\pi\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{1\text{kg} + 2\text{kg}}{300\text{N/m}}} = 0{,}157\text{s}$$

b) La energía elástica inicial del resorte se convierte en energía cinética total de los dos bloques cuando alcanzan la velocidad, v_0, en el momento justo antes de separarse:

$$\frac{1}{2}kx_0^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_0^2 \quad \Rightarrow \quad v_0 = x_0\sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}}$$

El bloque m_1 sigue atado al resorte y cuando este se estira al máximo, su energía cinética se transforma en energía elástica:

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m_1v_0^2$$

Despejando A, obtenemos la amplitud de oscilación de m_1:

$$A = v_0\sqrt{\frac{m_1}{k}} = x_0\sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}} = 0{,}5\text{m}\sqrt{\frac{1\text{kg}}{1\text{kg} + 2\text{kg}}} = 0{,}289\text{m}$$

c) El periodo de oscilación de m_1 es:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{1\text{kg}}{300\text{N/m}}} = 0{,}363\text{s}$$

La distancia que lo separa de m_2 al cabo del tiempo $T_1/4$ es:

$$d = v_0\left(\frac{T_1}{4}\right) - A = \left(5\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)\frac{0{,}363\text{s}}{4} - 0{,}289\text{m} = 0{,}164\text{m}$$

Respuesta

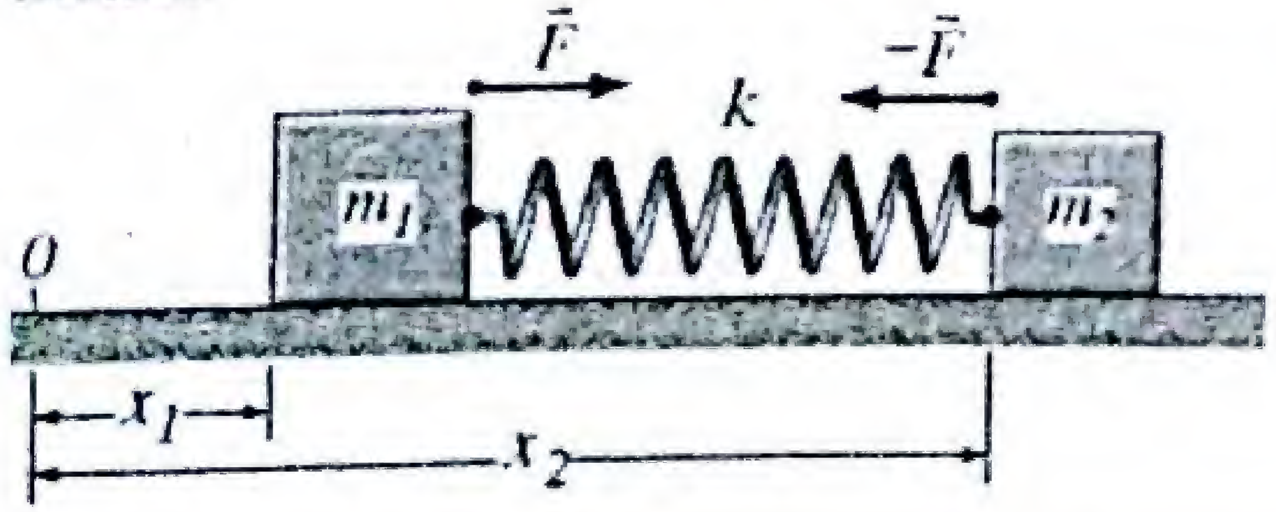
a) $t_0 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} = 0{,}157\text{s}$,

b) $A = x_0\sqrt{\frac{m_1}{m_1 + m_2}} = 0{,}289\text{m}$

c) $d = v_0\frac{T_1}{4} - A = 0{,}164\text{m}$

PR-6.24 *Equivalente de bloques unidos por un resorte*

Dos bloques de masas m_1 y m_2 están oscilando unidos por un resorte de constante elástica k, sobre una mesa sin fricción.



a) Determine la frecuencia de las oscilaciones.

b) Demuestre que el movimiento puede ser representado por la oscilación de un solo cuerpo de masa equivalente (o masa reducida):

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$$

Solución: Sea L_0 la longitud del resorte sin deformar, y $(x_2 - x_1)$ la separación entre los bloques en un instante dado. El cambio en la longitud del resorte en ese instante es: $x = (x_2 - x_1) - L_0$.

El resorte ejerce una fuerza $\vec{F}$ sobre m_1 y una fuerza $-\vec{F}$ sobre m_2. Aplicando la segunda ley de Newton a cada bloque:

$$m_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = +kx \qquad m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} = -kx$$

Si se multiplica la primera ecuación por m_2, la segunda por m_1 y se restan:

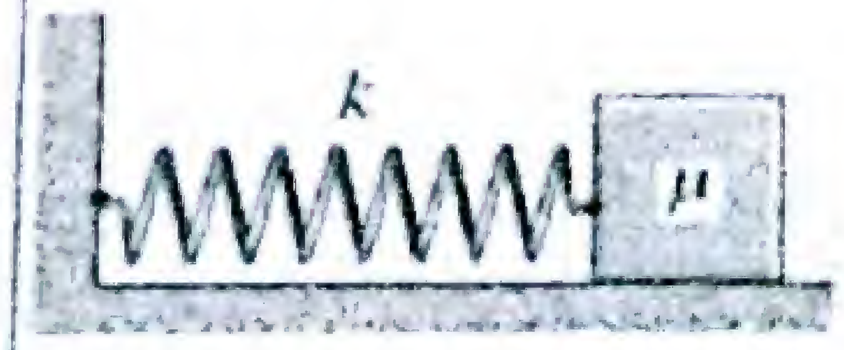
$$m_1m_2\frac{d^2x_2}{dt^2} - m_1m_2\frac{d^2x_1}{dt^2} = -kx(m_1 + m_2)$$

Se obtiene:

$$\left(\frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}\right)\frac{d^2}{dt^2}(x_2 - x_1) = -kx$$

Tomando en cuenta que $x = (x_2 - x_1) - L_0$, se obtiene:

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_2 - x_1) = \frac{d^2}{dt^2}(x + L_0) = \frac{d^2x}{dt^2}$$



El sistema de dos cuerpos equivale a un solo cuerpo oscilante que tiene la masa reducida

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$$

Esta es una ecuación diferencial típica de un MAS:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + k\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1m_2}\right)x = 0 \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0$$

La frecuencia angular de oscilación es:

$$\omega = \sqrt{k\left(\frac{m_1 + m_2}{m_1m_2}\right)} = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

Hemos demostrado que, el sistema puede ser representado por un solo cuerpo con una masa igual a la *masa reducida*:

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$$

Respuesta:

a) $\omega = \sqrt{k/\mu}$

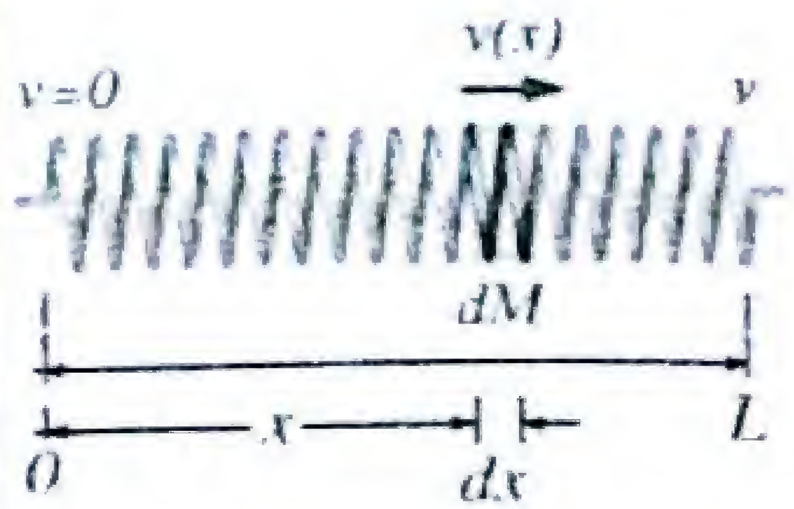
b) $\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$

PR-6.25 *La masa del resorte no se puede despreciar*

Siempre hemos considerado resortes que tienen masa despreciable. Considere un bloque de masa m que oscila en el extremo de un resorte de constante k y cuya masa M es pequeña en comparación con m pero *no despreciable*. Demuestre que la masa equivalente del sistema que oscila es:

$$m_{eq} = m + \frac{1}{3}M$$

Solución: a) Supondremos que el resorte se estira y se comprime de manera uniforme a lo largo de su longitud y que todas sus partes oscilan en fase. El extremo $x = 0$ está fijo y el extremo unido a la masa tendrá la misma velocidad v que ésta. Consideremos una porción del resorte de coordenada x y longitud dx. Como su masa está distribuida uniformemente, este pedazo tiene masa: $dM = (M/L)dx$ y como la velocidad aumenta linealmente a lo largo del resorte, entonces: $v(x) = (x/L)v$. Por lo tanto la energía cinética del pedazo considerado es:



$$dK = \frac{dM}{2}v(x)^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{M}{L}dx\right)\left(v\frac{x}{L}\right)^2$$

Sumando las energías de los diferentes pedazos obtenemos la energía cinética total del resorte:

$$K_r = \frac{1}{2}\frac{Mv^2}{L^3}\int_0^L x^2\,dx = \frac{1}{2}\frac{Mv^2}{L^3}\left(\frac{L^3}{3}\right) = \frac{1}{6}Mv^2$$

La suma de la energía cinética del bloque y la del resorte es la energía cinética total del sistema.

$$K_{total} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{6}Mv^2 = \frac{1}{2}\left(m + \frac{M}{3}\right)v^2$$

Aplicando la conservación de la energía ($K + U = E$) y derivando respecto al tiempo:

$$E = K_{total} + U = \frac{1}{2}\left(m + \frac{M}{3}\right)v^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{dE}{dt} = \left(m + \frac{M}{3}\right)v\frac{dv}{dt} + kx\frac{dx}{dt} = 0$$

Y como $v = dx/dt$, se obtiene la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{k}{m + M/3}\right)x = 0$$

Por lo tanto el sistema se comporta como si tuviera una masa equivalente: $m_{eq} = m + M/3$ y el período de oscilación es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m + M/3}{k}}$$

Respuesta:

a) $m_{eq} = m + \dfrac{M}{3}$

b) $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m + M/3}{k}}$

PR-6.26. *Combinación de movimientos armónicos*

Los electrones de un osciloscopio son desviados por dos campos eléctricos mutuamente perpendiculares, de diferentes amplitudes $A_x \neq A_y$, igual frecuencia angular, ω y con una diferencia de fase ϕ. Describa la trayectoria en la pantalla.

$x(t) = A_x\cos\omega t$

$y(t) = A_y\cos(\omega t + \phi)$

Solución: Usando la identidad trigonométrica:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta.$$

podemos escribir:

$$y(t) = A_y\cos(\omega t + \phi) = A_y(\cos\omega t\cdot\cos\phi - \operatorname{sen}\omega t\cdot\operatorname{sen}\phi)$$

Para eliminar el tiempo, reemplazamos $\cos\omega t = x/A_x$:

$$\frac{y}{A_y} = \left[\frac{x}{A_x}\cos\phi - \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_x^2}}\operatorname{sen}\phi\right]$$

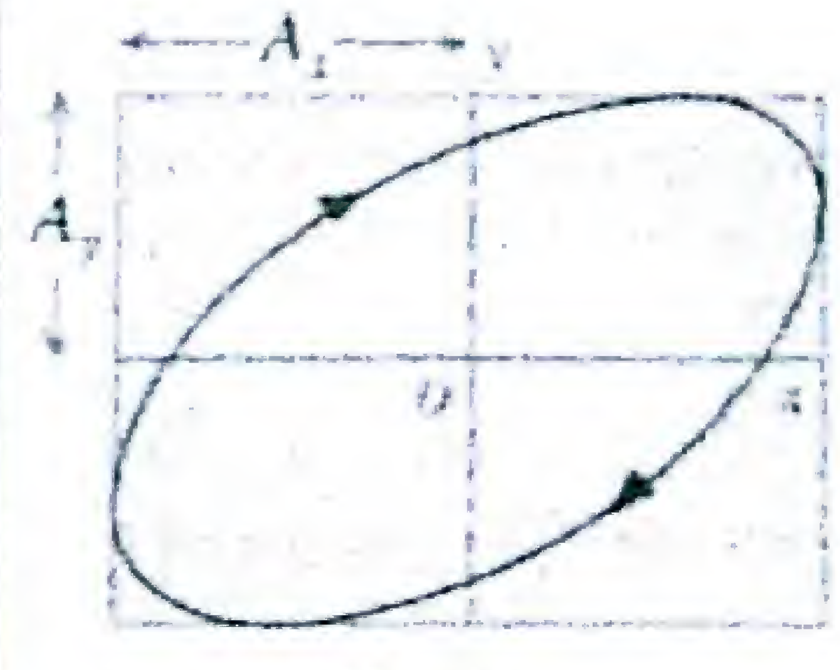
Elevando al cuadrado:

$$\left(\frac{y}{A_y}\right)^2 - \frac{2xy}{A_xA_y}\cos\phi + \left(\frac{x}{A_x}\right)^2\cos^2\phi = \operatorname{sen}^2\phi\left(1 - \frac{x^2}{A_x^2}\right)$$

Simplificando, encontramos la ecuación de la trayectoria:

$$\left(\frac{y}{A_y}\right)^2 + \left(\frac{x}{A_x}\right)^2 - \frac{2xy}{A_xA_y}\cos\phi = \operatorname{sen}^2\phi$$

Esta es la ecuación de una *elipse*, cuya excentricidad e inclinación depende de la fase ϕ y de la relación entre las amplitudes, A_y/A_x, como se ilustra en la figura 1.



(Fig. 1)

Caso a: Para $\phi = 0°$ (y también π), la elipse se reduce a una línea recta, figura 2:

$$\left(\frac{y}{A_y}\right)^2 + \left(\frac{x}{A_x}\right)^2 - \frac{2xy}{A_xA_y} = \left(\frac{y}{A_y} - \frac{x}{A_x}\right)^2 = 0$$

$$y = \left(\frac{A_y}{A_x}\right)x \quad \text{(ecuación de una recta)}$$

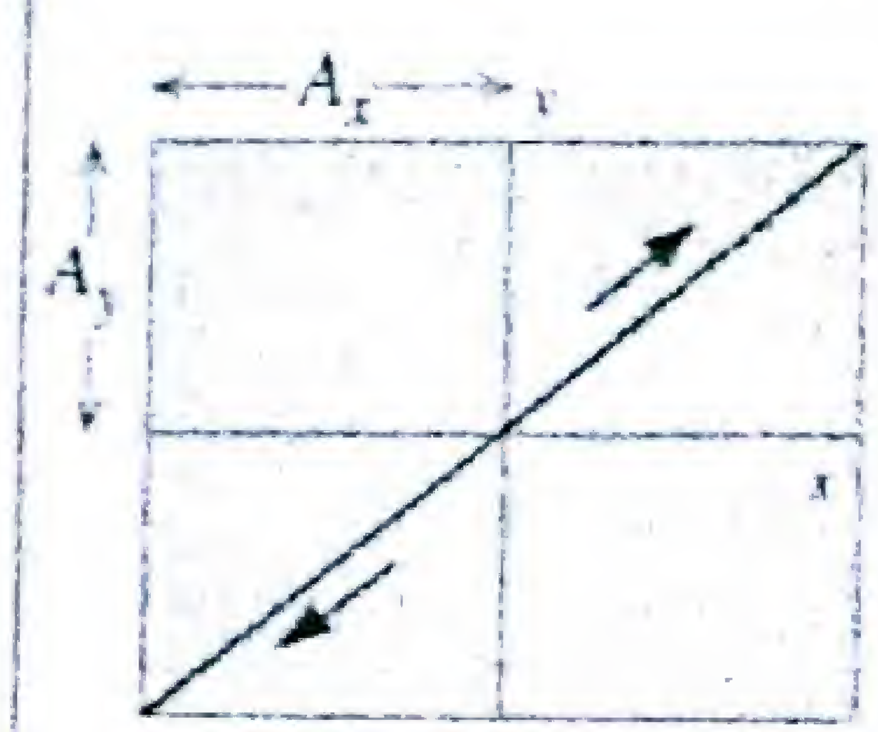


Fig. 2: *Caso (a)* $\phi = 0°$

Caso b: Para $\phi = 90°$ la elipse tiene ejes con longitudes $2A_y$ y $2A_x$, figura 3:

$$\left(\frac{y}{A_y}\right)^2 + \left(\frac{x}{A_x}\right)^2 = 1$$

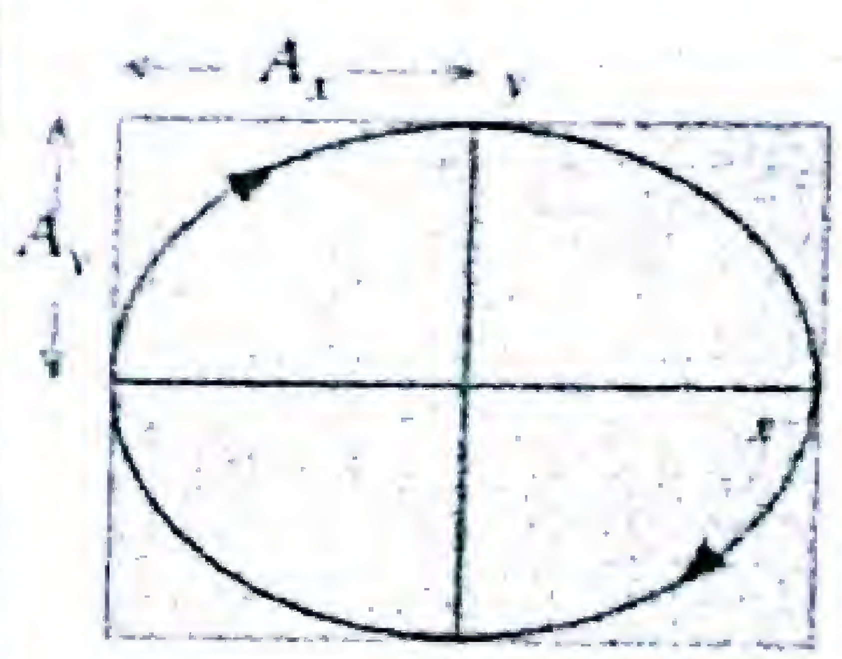


Fig. 3: *Caso (b)* $\phi = 90°$

PR-6.27. *Movimiento periódico en un plano*

Una partícula de masa m se mueve en un plano fijo, a lo largo de la trayectoria descrita por la ecuación:

$$\vec{r}(t) = A\cos(3\omega t)\hat{x} + A\cos(\omega t)\hat{y}$$

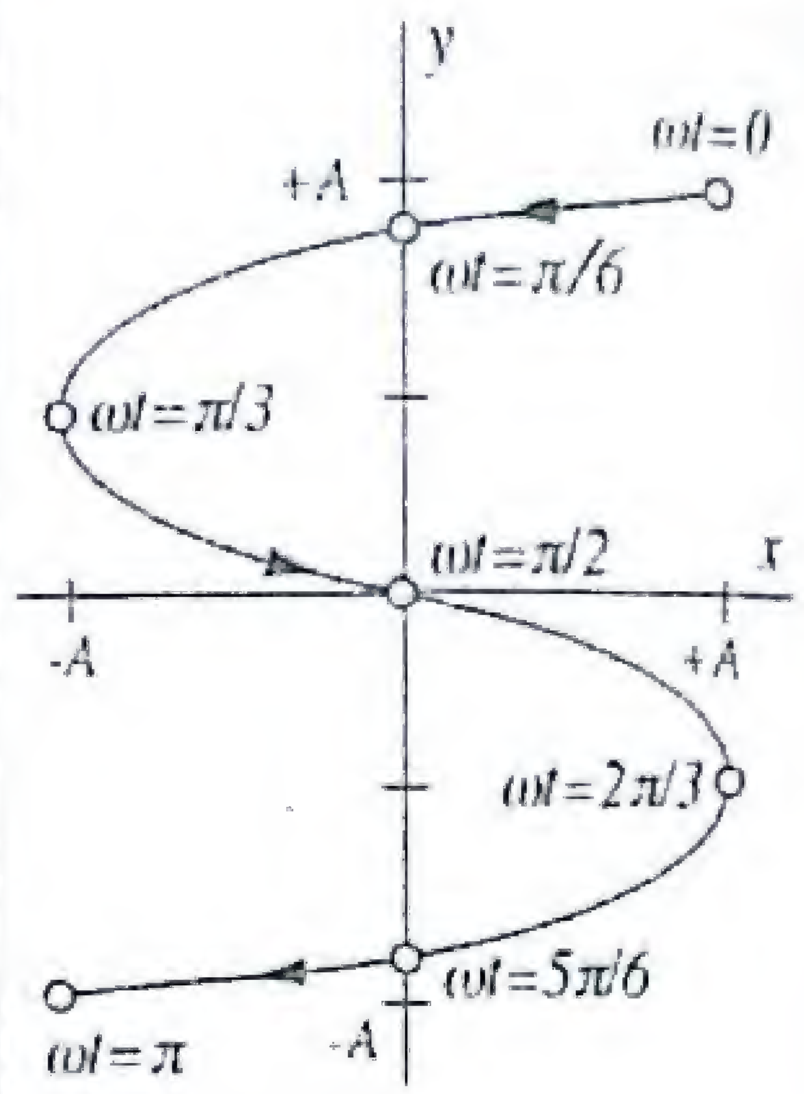
a) Trace la trayectoria de la partícula

b) Halle la fuerza que actúa sobre la partícula.

c) Determine sus energías: potencial, cinética y total.

Solución: a) A partir de la expresión dada, construimos una tabla de los valores de x e y en diferentes instantes de tiempo:

ωt	0	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$5\pi/6$	π
x	A	0	$-A$	0	A	0	$-A$
y	A	$\sqrt{3}A/2$	$A/2$	0	$-A/2$	$-\sqrt{3}A/2$	$-A$



Luego se procede a construir la trayectoria correspondiente, como muestra la figura. Se observa que el movimiento se repite con un período: $T = 2\pi/\omega$.

b) La velocidad y la aceleración instantánea se obtienen derivando el vector posición:

$$\vec{r}(t) = A\cos(3\omega t)\hat{x} + A\cos(\omega t)\hat{y}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = -\omega A[\,3sen(3\omega t)\hat{x} + sen(\omega t)\hat{y}\,]$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = -\omega^2 A[\,9\cos(3\omega t)\hat{x} + \cos(\omega t)\hat{y}\,]$$

La fuerza sobre la partícula es:

$$\vec{F} = m\vec{a} = -m\omega^2 A[\,9\cos(3\omega t)\hat{x} + \cos(\omega t)\hat{y}\,]$$

c) La energía potencial se obtiene por integración de la fuerza:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -9m\omega^2 x$$

$$\Rightarrow \quad U(x,y) = \frac{9}{2}m\omega^2 x^2 + f(y) \qquad (1)$$

$$F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -m\omega^2 y$$

$$\Rightarrow \quad U(x,y) = \frac{1}{2}m\omega^2 y^2 + f(x) \qquad (2)$$

Para que las ecuaciones (1) y (2) sean compatibles la función $U(x,y)$ debe ser:

$$U = \frac{1}{2}m\omega^2(9x^2 + y^2) = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2(9\cos^2 3\omega t + \cos^2 \omega t)$$

Por otra parte, la energía cinética es:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2(9sen^2 3\omega t + sen^2 \omega t)$$

Finalmente, la energía total es la suma de estas dos:

$$E = K + U = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2(9\times 1 + 1) = 5m\omega^2 A^2$$

Respuesta:

b) Fuerza:
$-m\omega^2 A[\,9\cos(3\omega t)\hat{x} + \cos(\omega t)\hat{y}\,]$

c) Energía Potencial:
$\frac{1}{2}m\omega^2 A^2(9\cos^2 3\omega t + \cos^2 \omega t)$

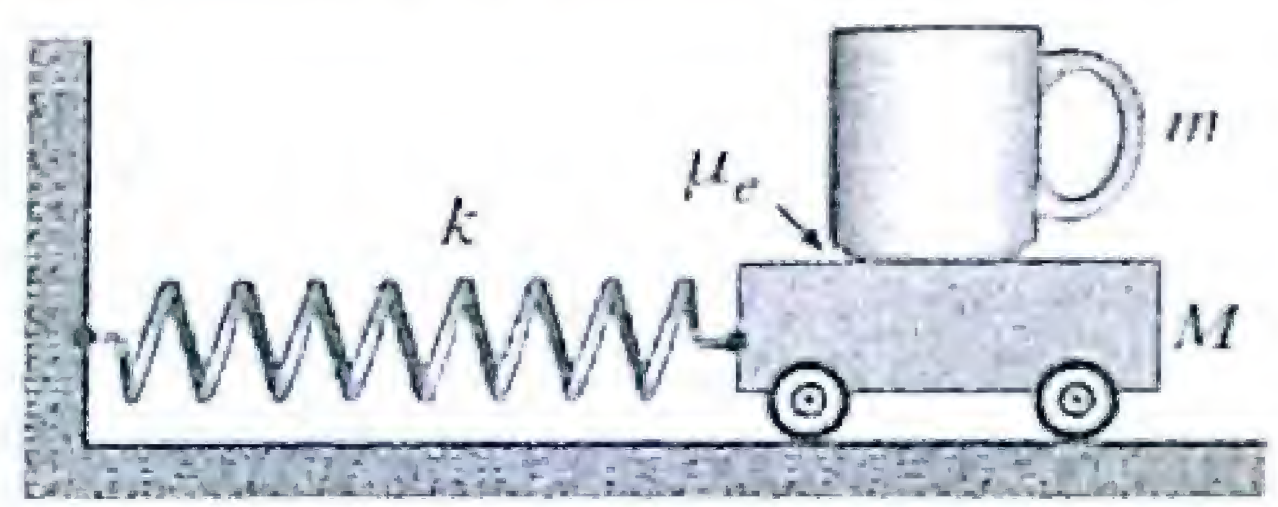
Energía Cinética:
$\frac{1}{2}m\omega^2 A^2(9sen^2 3\omega t + sen^2 \omega t)$

Energía Total: $E = 5m\omega^2 A^2$

PR-6.28. *La taza debe vibrar no debe deslizar*

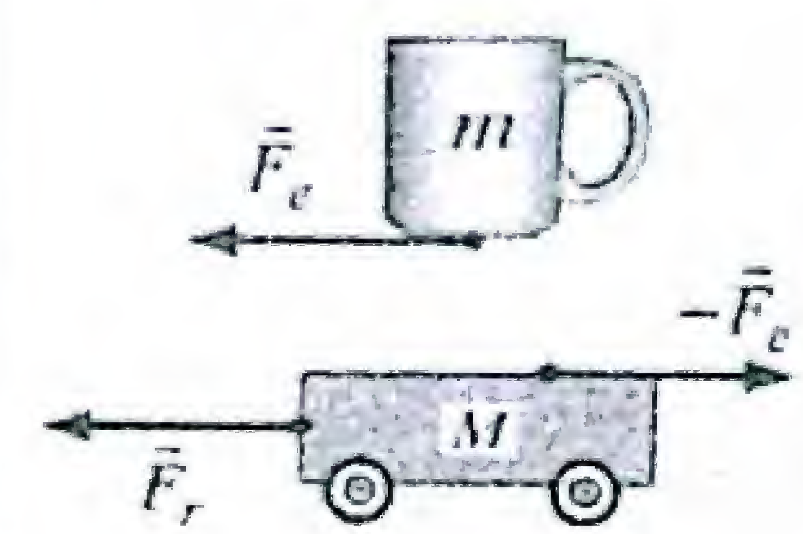
Un carrito de masa $M = 0{,}8$ kg está unido al extremo libre de un resorte de constante elástica $k = 49$ N/m, en una superficie horizontal sin fricción.

Sobre el carrito se coloca una taza de masa $m = 0{,}2$ kg. El coeficiente de fricción estática entre la taza y el carrito es $\mu_e = 0{,}5$. Determine la amplitud máxima posible del movimiento armónico simple, sin que ocurra deslizamiento de la taza.



Solución: La única fuerza horizontal que actúa sobre la taza es la fricción estática que le aplica el carrito. De modo que para que la taza no resbale esta fuerza no debe exceder el valor máximo:

$$F_e(max) = \mu_e N = \mu_e mg$$



De acuerdo a la segunda ley de Newton, la aceleración máxima de m debe ser:

$$\mu_e mg = ma_{max} \quad \Rightarrow \quad a_{max} = \mu_e g$$

Por otra parte, la máxima aceleración del sistema carrito-taza se alcanza cuando está en el extremo de la vibración. En este caso la fuerza de restitución del resorte, kA, es la que produce la aceleración máxima, $a_{máx}$, y está dada por:

$$kA = (M + m)a_{max}$$

Por consiguiente, la amplitud de vibración máxima permitida es:

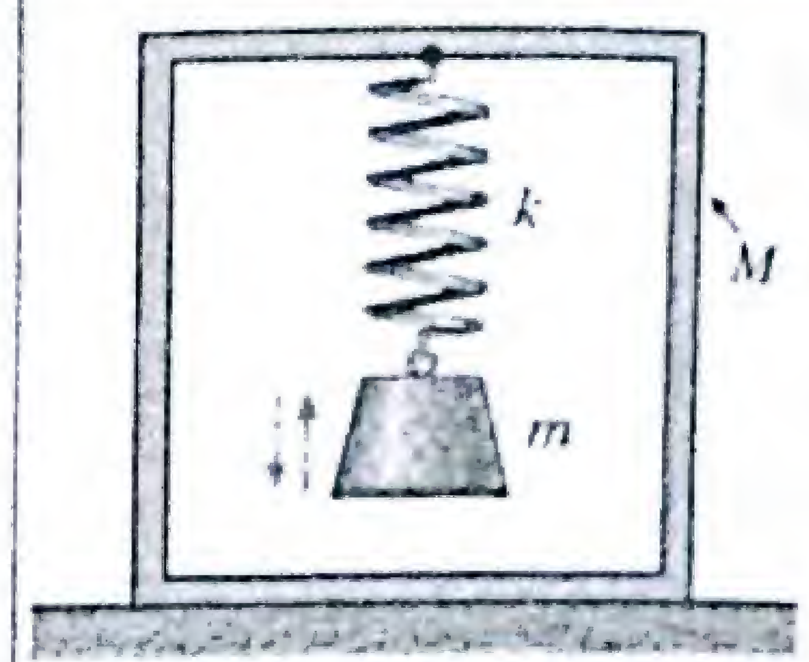
$$A = \frac{(M+m)}{k} a_{max} = \frac{\mu_e g(M+m)}{k} = 0{,}1 \text{ m}$$

Respuesta:

$$\boxed{A_{max} = \frac{\mu_e g(M+m)}{k} = 0{,}1\text{m}}$$

PR-6.29. *Caja saltando sobre una mesa*

Una caja de masa M está sobre una mesa horizontal. Dentro de la caja hay una pesa de masa m, sujetada al techo por medio de un resorte de constante k. ¿Cuál será la amplitud máxima de las oscilaciones que puede tener la pesa para que la caja empiece a saltar sobre la mesa?



Solución: En equilibrio, el resorte está *estirado* por la pesa en una longitud y_0:

$$ky_0 = mg \qquad \Rightarrow \qquad y_0 = \frac{mg}{k}$$

La condición para que la caja salte hacia arriba es que se ejerza sobre ésta una fuerza hacia arriba de magnitud superior a su peso Mg. Esto significa que el resorte debe estar *comprimido* una distancia y tal que:

$$ky \geq Mg$$

La amplitud de las oscilaciones debe ser superior al valor:

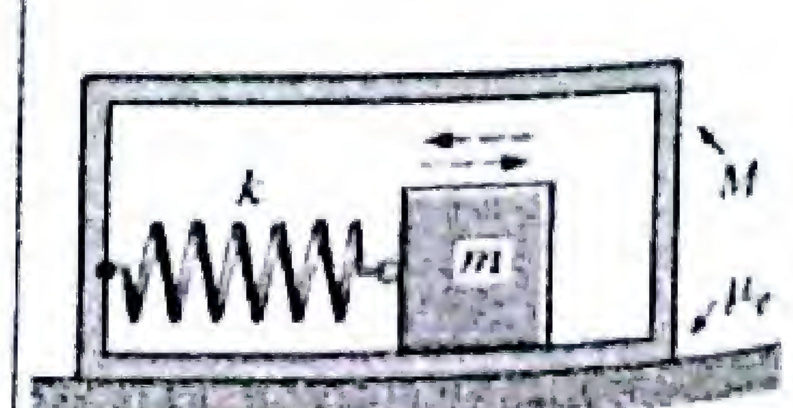
$$A = (y_0 + y) = \frac{mg}{k} + \frac{Mg}{k} = \frac{g}{k}(M+m)$$

Respuesta

$$\boxed{A \geq \frac{g(M+m)}{k}}$$

PR-6.30. *Oscilaciones de un bloque dentro de una caja*

Una caja de masa M está sobre una mesa horizontal. Dentro de la caja hay un bloque de masa m sujeto a la pared interna por medio de un resorte de constante k, y puede moverse sin fricción en el fondo de la caja. El coeficiente de fricción estática entre la caja y la mesa es μ_e. ¿Cuál será la amplitud máxima de las oscilaciones del bloque para que la caja permanezca inmóvil?



Solución: El bloque ejecuta un MAS con frecuencia angular: $\omega^2 = k/m$. La fuerza aplicada por el resorte sobre la caja es: $F = ma = -m(\omega^2 x)$. El valor máximo de esta fuerza ocurre cuando el desplazamiento es máximo ($F_{max} = m\omega^2 A_{max}$). Esta fuerza es de igual valor y de sentido opuesto a la fuerza que ejerce el resorte sobre la pared. Si queremos que la caja no se mueva, la fuerza que ejerce el resorte no debe exceder al valor máximo de la fuerza de fricción estática:

$$F_r(max) = \mu_e N = \mu_e(M+m)g:$$

$$m\omega^2 A_{max} < \mu_e(M+m)g$$

Por lo tanto, la amplitud máxima de las oscilaciones del bloque para que la caja permanezca inmóvil es:

$$A_{max} = \frac{\mu_e(M+m)g}{m(k/m)} = \frac{\mu_e(M+m)g}{k}$$

Respuesta

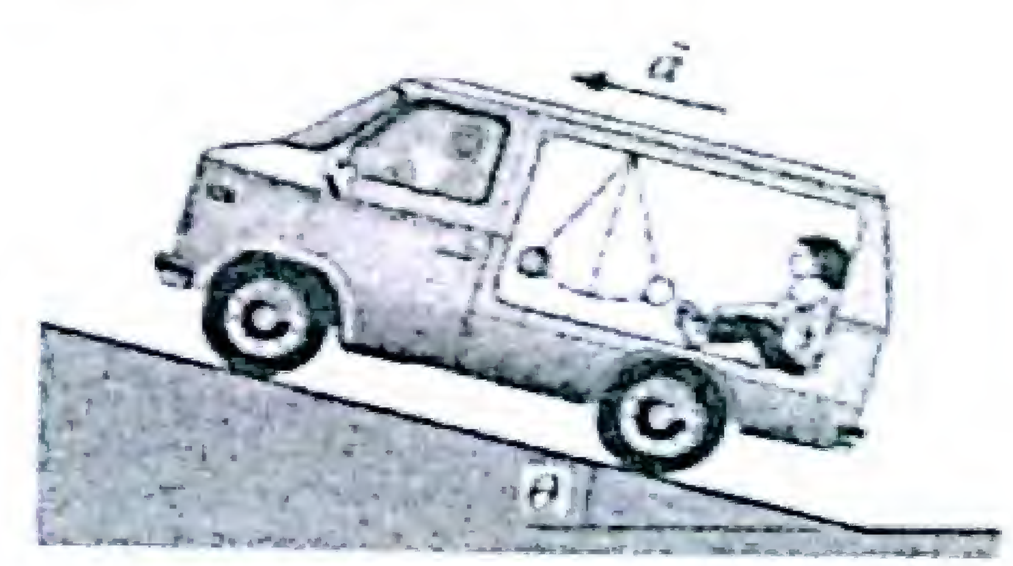
$$\boxed{A_{max} = \frac{\mu_e(M+m)g}{k}}$$

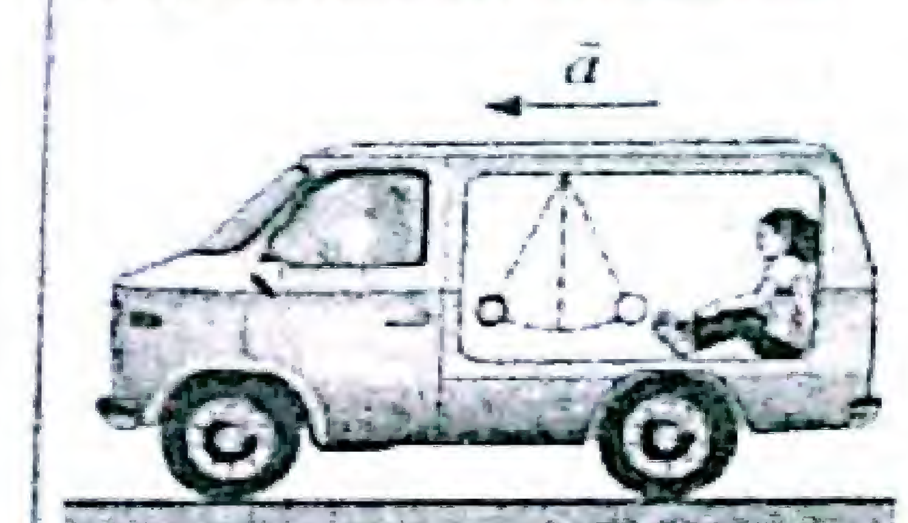
PR-6.31. *Oscilaciones de un péndulo acelerado*

Una esferita de masa m está suspendida por un hilo de longitud L, amarrado al techo de una camioneta que está moviéndose con una aceleración $\vec{a}$. Determine el periodo de las oscilaciones del péndulo.

a) Si la camioneta está subiendo una cuesta que forma un ángulo θ con la horizontal

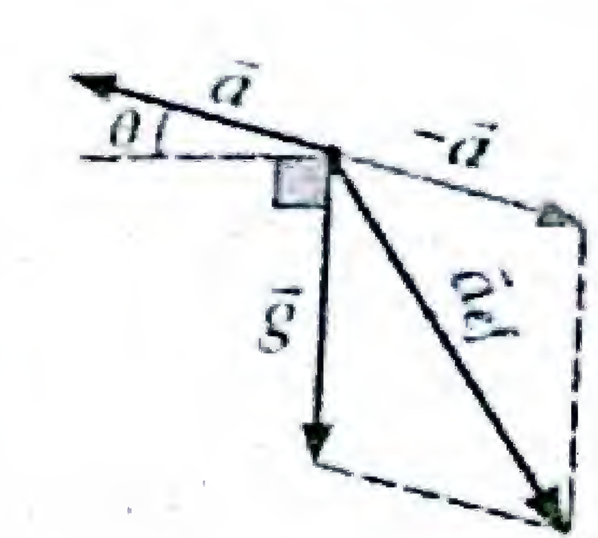
b) Si la camioneta está desplazándose horizontalmente





Solución: Hemos visto que, para poder aplicar las leyes de Newton en un marco de referencia con aceleración, $\vec{a}$, es necesario considerar que sobre el cuerpo actúa una pseudo-fuerza $\vec{F}^*$, de magnitud ma y de sentido contrario a la aceleración, $\vec{a}$. La fuerza efectiva sobre la esferita es:

$$\vec{F}_{ef} = m\vec{g} + \vec{F}^* = m\vec{g} - m\vec{a} = m(\vec{g} - \vec{a})$$



El módulo de la aceleración efectiva es:

$$a_{ef}^2 = |\vec{g} - \vec{a}|^2 = (\vec{g} - \vec{a})\bullet(\vec{g} - \vec{a})$$

$$a_{ef}^2 = g^2 + a^2 - 2ag\cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = g^2 + a^2 + 2ag\,sen\theta$$

$$a_{ef} = \sqrt{g^2 + a^2 + 2ag\,sen\theta}$$

Para oscilaciones de ángulo pequeño, el período del péndulo depende de esta aceleración efectiva:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{a_{ef}}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{\sqrt{g^2 + a^2 + 2ag\,sen\theta}}}$$

b) Si la camioneta se acelera horizontalmente, en la expresión anterior, ponemos $\theta = 0^{o}$ y el periodo queda:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{\sqrt{g^2 + a^2}}}$$

Respuesta

a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{\sqrt{g^2 + a^2 + 2ag\,sen\theta}}}$

b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{\sqrt{g^2 + a^2}}}$

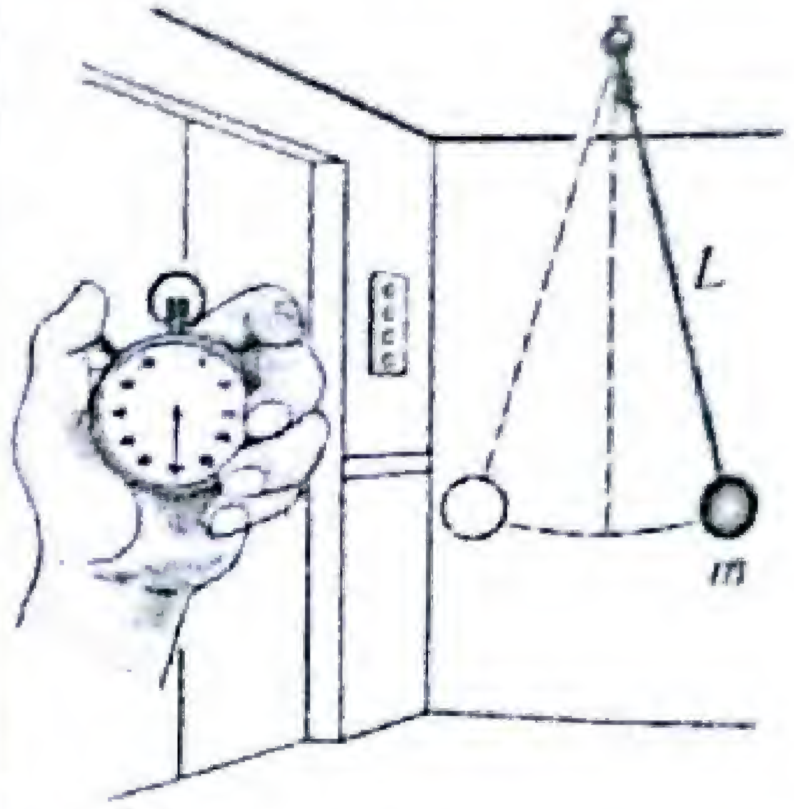
PR-6.32. *Péndulo suspendido del techo de un ascensor*

Sea un péndulo de longitud L y masa m que tiene un período de oscilación T_o en una habitación. ¿Cuál sería el período de este péndulo suspendido del techo de un ascensor en los siguientes casos?

a) El ascensor se mueve con una aceleración $\vec{a}$, hacia arriba.

b) El ascensor se mueve con una aceleración $\vec{a}$, hacia abajo.

c) El cable del ascensor se rompe y éste queda en caída libre.

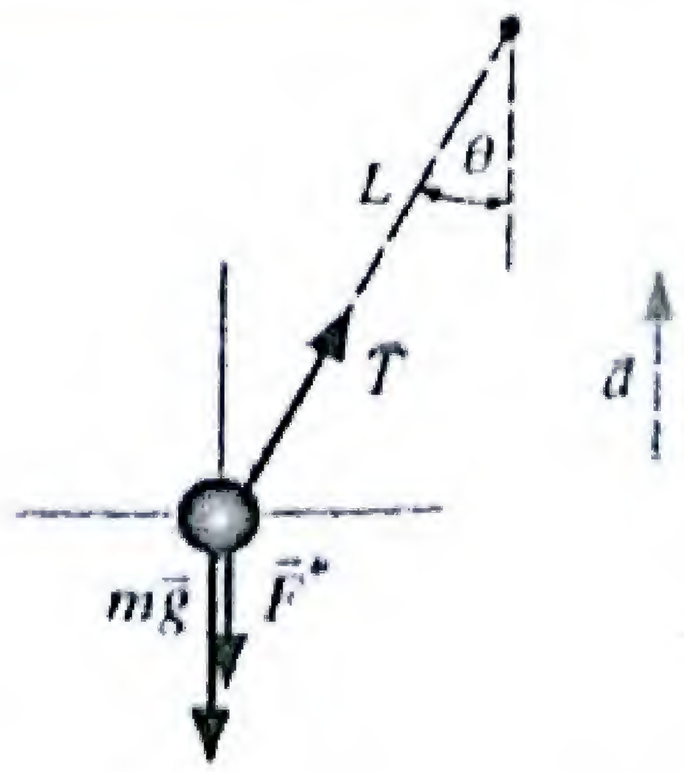


Solución: Analizaremos el sistema desde un observador no inercial montado en el ascensor. Según este observador además de la gravedad, sobre la esferita aparece una fuerza de inercia en sentido opuesto a su aceleración ($\vec{F}^* = -m\vec{a}$).

a) Si el ascensor se mueve hacia arriba con una aceleración $\vec{a}$, sobre la esferita actúa una fuerza efectiva hacia abajo de magnitud:

$$F = mg + ma = m(g + a)$$

De modo que para pequeñas amplitudes de oscilación, en la expresión conocida para el período del péndulo:



$$T_o = 2\pi\sqrt{L/g}$$

escribimos la suma $(g + a)$ en sustitución de la aceleración de gravedad g. Por lo tanto, el período es:

$$T_{\uparrow} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g + a}}$$

b) Si el ascensor se mueve hacia abajo con una aceleración $\vec{a}$, la fuerza de inercia es hacia arriba y sobre la esferita actúa una fuerza efectiva hacia abajo: $F = m(g - a)$, de modo que el período del péndulo es:

$$T_{\downarrow} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g - a}}$$

c) Esta fórmula tiene sentido solamente si $a < g$. Cuando a se acerca al valor de g, el período crece. En el límite $a = g$ (caída libre), el período T se hace infinito. Esto quiere decir que el péndulo queda inmóvil.

Respuesta:

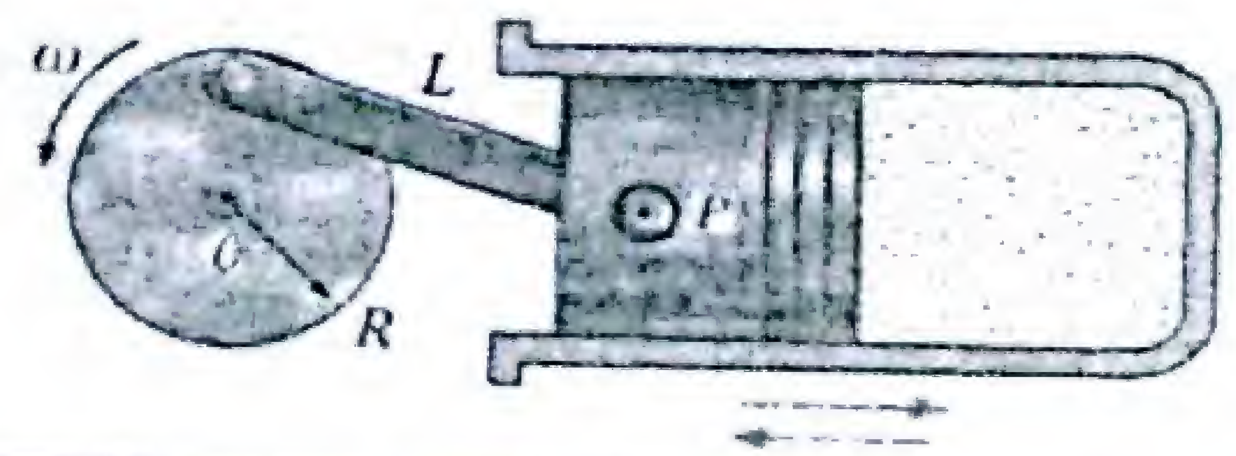
a) $T_{\uparrow} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g + a}}$

b) $T_{\downarrow} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g - a}}$

c) $T = \infty$ (no oscila)

PR-6.33. *¿Será éste un movimiento armónico simple?*

Una rueda de radio R que gira con velocidad angular constante ω, está acoplada mediante una biela de longitud L a un pistón, el cual ejecuta un movimiento de vaivén en un cilindro.



Este mecanismo transforma el movimiento oscilatorio del pistón en movimiento rotacional de la rueda.

a) ¿Cuál es la ecuación de movimiento del pistón?

b) ¿Será este movimiento del tipo armónico simple?

Solución: a) De la geometría de la figura, se observa que el punto P del pistón oscila entre las dos posiciones extremas $x = (L - R)$ y $x = (L + R)$, a partir del centro de la rueda, O. Para cualquier posición intermedia del pistón, la distancia OP es:

$$x = R\cos\theta + L\cos\phi$$

Siendo $\theta = \omega t$ y el ángulo ϕ relacionado con θ por:

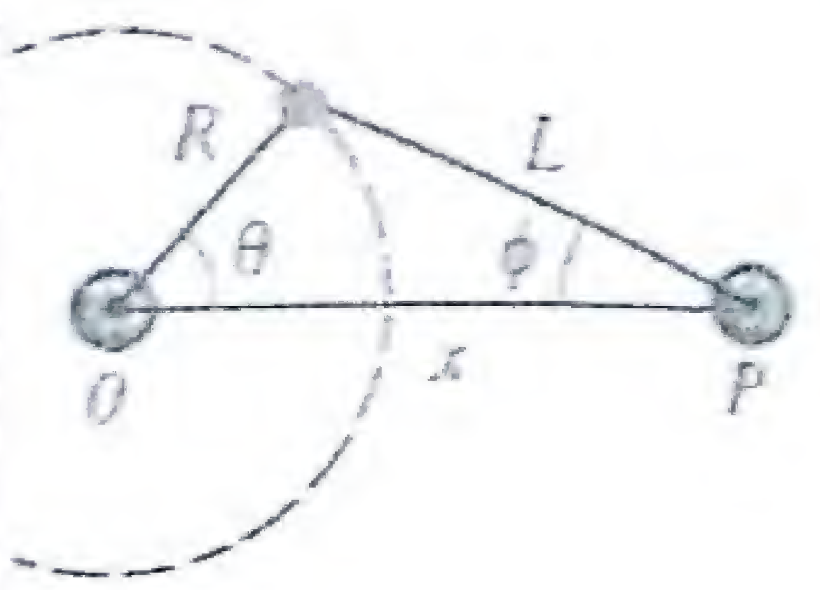
$$L\,sen\phi = R\,sen\theta \quad \Rightarrow \quad sen\phi = (R/L)\,sen\theta$$

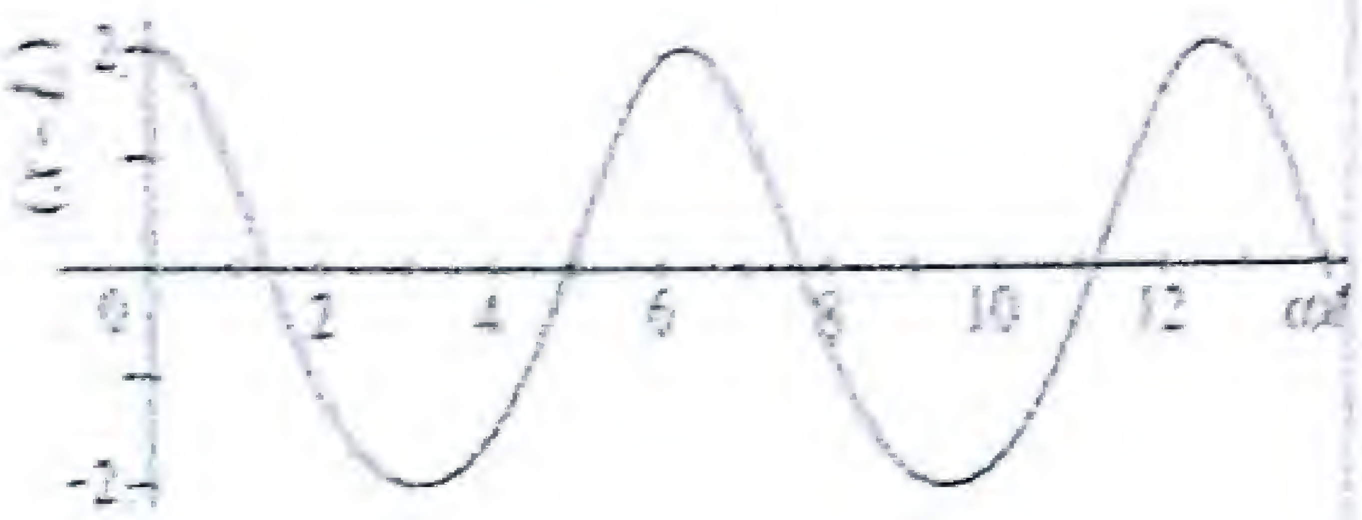
$$\cos\phi = \sqrt{1 - sen^2\phi} = \sqrt{1 - (\frac{R}{L})^2 sen^2\theta} = \frac{1}{L}\sqrt{L^2 - R^2 sen^2\theta}$$

Por lo tanto, la ecuación de movimiento del pistón es:

$$x(t) = R\cos\omega t + \sqrt{L^2 - R^2 sen^2\omega t}$$

b) Hemos graficado la función $(x(t) - L)$ en la siguiente figura, usando los valores numéricos: $R = 2$ m y $L = 5$ m.





Respuesta:

Se observa que, el recorrido del pistón hacia un lado respecto al punto medio, tarda más que el recorrido hacia el lado opuesto. Por lo tanto, el movimiento es periódico, de periodo $T = 2\pi/\omega$, y de amplitud R, pero no es del tipo armónico simple.

> a)
> $x(t) = R\cos\omega t + \sqrt{L^2 - R^2 sen^2\omega t}$
> b) El movimiento *no* es del tipo armónico simple.

PR-6.34. *Cubos de hielo oscilando en un tazón*

a) Un cubito de hielo de masa m resbala dentro de un tazón hemisférico de radio R. Demuestre que para desplazamientos pequeños respecto al equilibrio, el cubito tiene un MAS con un período igual al de un péndulo simple de longitud R.

b) Suponga dos diminutos cubitos de hielo, de masas m_1 y m_2 que están inicialmente a distancias d_1 y $d_2 = 2d_1$ respectivamente del punto inferior, siendo $R >> d_2$. Si se dejan libres en el mismo instante, ¿dónde chocarán?

Solución: a) La fuerza de restitución sobre el cubito de hielo es:

$$F = -mg\ sen\theta$$

siendo $tg\theta = x/R$. Para desplazamientos pequeños:

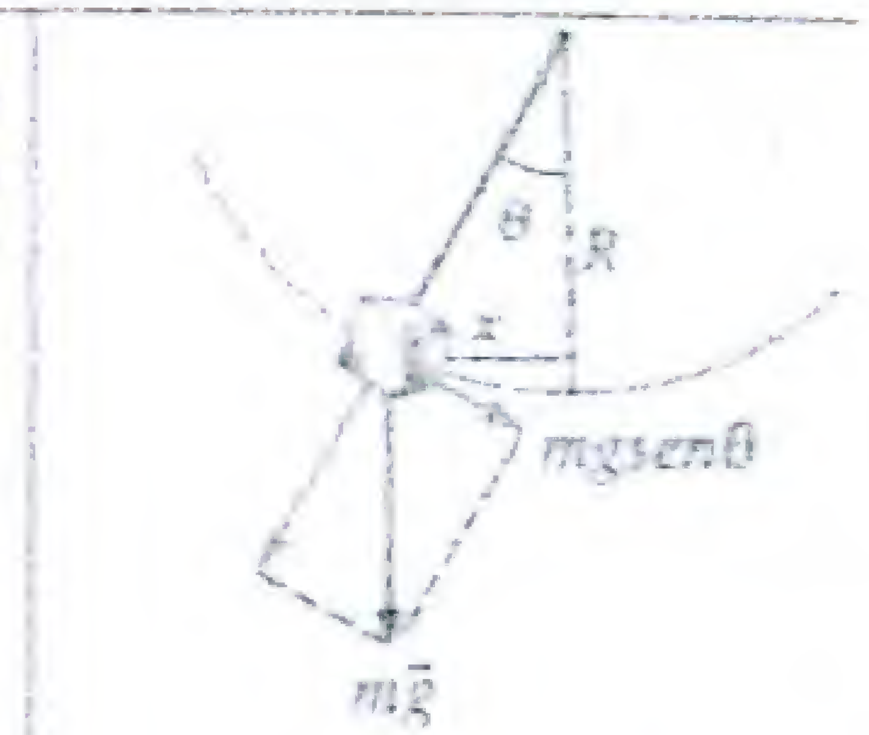
$$tg\theta \approx sen\theta \quad y \quad F = -(mg/R)x = -kx$$

La fuerza resulta proporcional al desplazamiento, x, y por lo tanto, el cubito oscila con movimiento armónico simple, siendo la constante de proporcionalidad $k = mg/R$. El período de oscilación correspondiente es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{(mg/R)}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}$$

El período es igual al del péndulo simple de longitud R.

b) Como el período es independiente de la amplitud de las oscilaciones (si estas son pequeñas), el tiempo que toma un cubito en llegar al punto mas bajo será el mismo, $T/4$. Por lo tanto dos cubitos que parten de distancias diferentes chocarán en el punto más bajo.



Respuesta:

> a) $T = 2\pi\sqrt{R/g}$
> b) Chocan en el punto mas bajo.

PR-6.35. *Vibraciones de esferita entre ligas de hule*

Una esferita de masa $m = 0{,}90$ kg está conectada a dos ligas de hule de longitud $L = 0{,}5$ m. Se le da a la esferita un desplazamiento vertical pequeño.

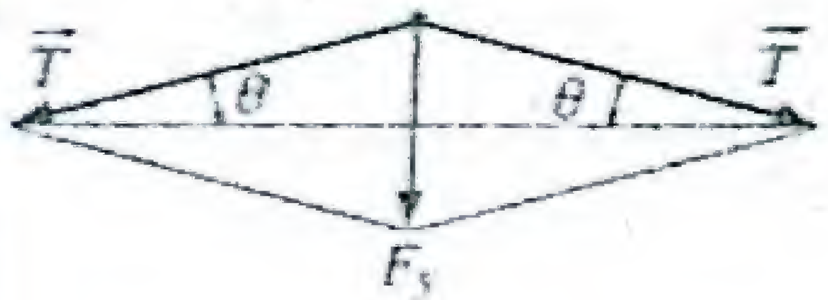
Suponiendo que la magnitud de la tensión de las ligas permanece constante, $T = 100$ N, halle el periodo de las oscilaciones verticales. Se desprecia la masa de las ligas y el peso de la esferita.

Solución: Si apartamos la esferita a un ángulo θ, las ligas ejercen una fuerza restauradora:

$$F_y = -2T sen\theta$$

Para ángulos θ pequeños podemos usar la aproximación:

$$sen\theta \approx tg\theta = \frac{y}{L} \qquad F_y = -2T\frac{y}{L}$$



Aplicando la 2a ley de Newton a la esferita ($F_y = ma_y$):

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -(\frac{2T}{L})y \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + (\frac{2T}{mL})y = 0$$

Esta es la ecuación del movimiento armónico simple, siendo la constante:

$$\omega^2 = \frac{2T}{mL}$$

El periodo de las vibraciones es:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{mL}{2T}} = 2\pi\sqrt{\frac{(0.90\text{kg})(0{,}5\text{m})}{2(100\text{N})}} = 0.298\text{s}$$

Respuesta:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{mL}{2T}} = 0.298\text{s}}$$

PR-6.36. *El periodo de un oscilador masa-resorte: Un método alternativo*

Considere un oscilador constituido por un resorte de constante elástica k, unido a un objeto de masa m y halle la expresión para el periodo de las oscilaciones, mediante el cálculo directo del tiempo que toma a la masa en ir desde la posición de equilibrio, $x = 0$, hasta una posición extrema, $x = A$.

Solución: La energía mecánica (cinética mas potencial) del oscilador es constante e igual a su energía potencial elástica del resorte cuando la masa está en su posición extrema, $x = A$ con velocidad nula:

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{constante} = \frac{1}{2}kA^2$$

De aquí despejamos la velocidad instantánea:

$$v = \frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{A^2 - x^2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}}dt$$

Integrando entre las posiciones $x = 0$ y $x = A$, se obtiene:

$$\int_0^A \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}}\int_0^{t_0} dt$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = arcsen\frac{x}{A}$$

$$arcsen\frac{x}{A}\Big|_0^A = \sqrt{\frac{k}{m}}t\Big|_0^{t_0}$$

Despejando, se obtiene el tiempo t_0 para el recorrido, siendo el periodo cuatro veces este valor:

$$\frac{\pi}{2} = t_0\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \Rightarrow \qquad T = 4t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Esta es la expresión familiar para el periodo del oscilador masa-resorte.

Respuesta:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

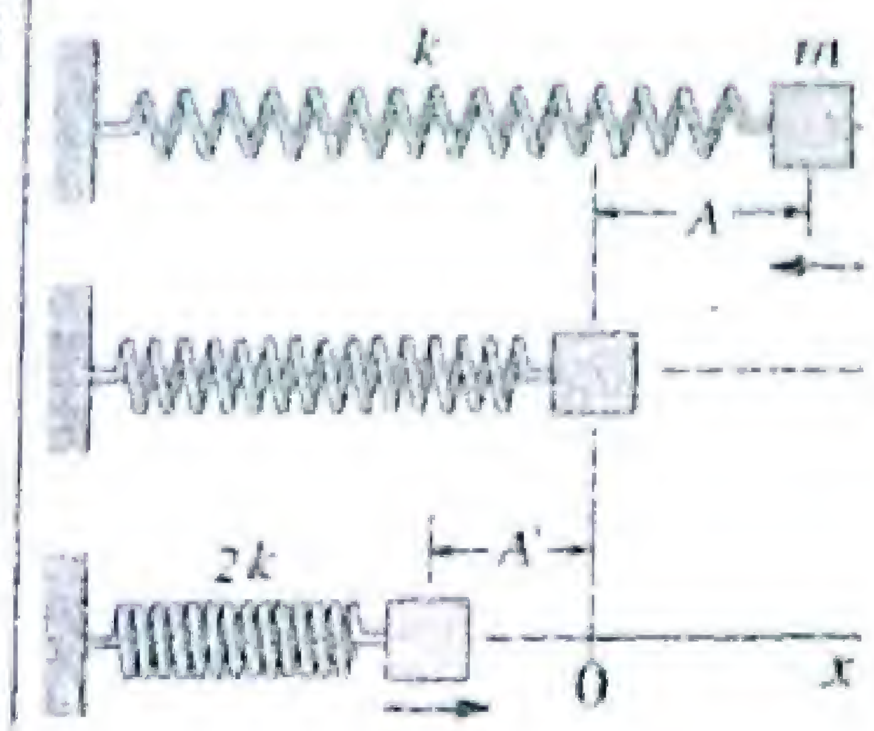
PR-6.37. *Resorte mas fácil de estirar que de comprimir*

Un cierto resorte tiene una constante elástica k cuando es alargado, pero una constante $2k$ cuando es comprimido. Si unimos una masa m a dicho resorte, se le estira una distancia A y luego se suelta:

a) Halle el período del movimiento. ¿Depende éste de A?

b) ¿Cuál es la máxima compresión del resorte? ¿Es este movimiento armónico simple?

Solución: a) Inicialmente el resorte estirado tiene una constante elástica k, y al liberarlo, la masa m se acerca al origen en un tiempo que es igual a un cuarto del periodo del MAS correspondiente:



$$t_1 = \frac{1}{4}T_1 = \frac{1}{4}2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Después que la masa pasa por el origen, el resorte tiene una nueva constante elástica $2k$, se estira de nuevo y la partícula alcanzará el extremo izquierdo en un tiempo igual a un cuarto del periodo del MAS correspondiente:

$$t_2 = \frac{1}{4}T_2 = \frac{1}{4}2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

El periodo del movimiento oscilatorio compuesto es el doble de la suma de estos dos tiempos:

$$T = 2(t_1 + t_2) = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

El periodo es independiente de la amplitud inicial, A.

b) Aplicando la conservación de la energía cuando la partícula está en los dos extremos, podemos hallar el desplazamiento en el extremo negativo A':

$$\frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}(2k)A'^2 \qquad \Rightarrow \qquad A' = A/\sqrt{2}$$

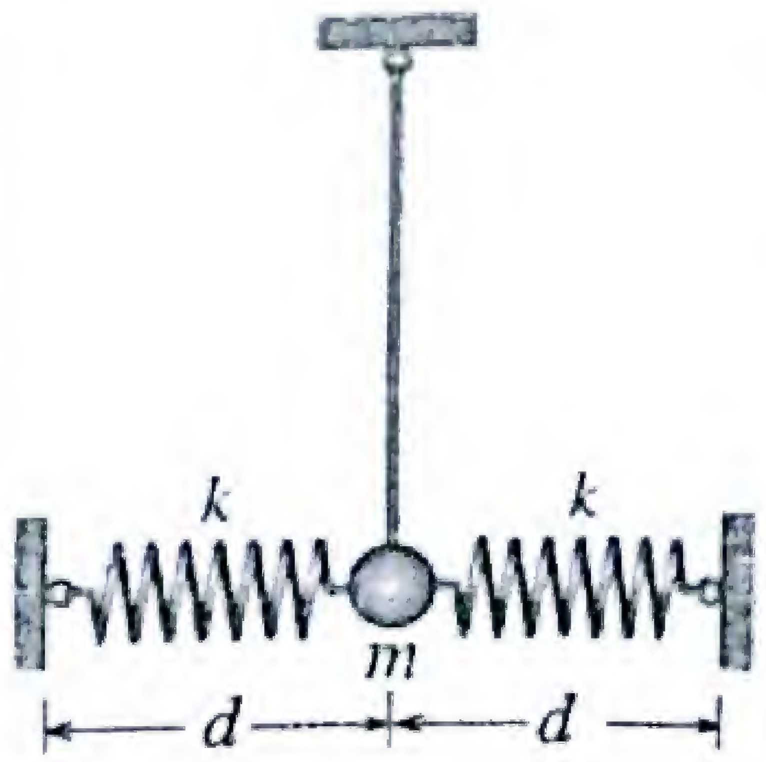
Este movimiento no es del tipo armónico simple y es asimétrico alrededor del origen.

Respuesta:

$$\boxed{\begin{aligned} &a)\ T = \pi\sqrt{\frac{m}{k}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ &b)\ A' = A/\sqrt{2} \end{aligned}}$$

PR-6.38. ***Péndulo combinado con resortes***

Una esferita de masa m está suspendida por una varilla ligera de longitud L, y a cada lado tiene atados resortes ligeros e idénticos de constante elástica k. Los resortes están dispuestos horizontalmente con sus extremos fijos a las paredes e inicialmente sin deformación. Si se le da a la esferita un pequeño desplazamiento, halle la frecuencia de las oscilaciones.



Solución: Sobre la esferita actúan en dirección horizontal, dos fuerzas dirigidas hacia la posición de equilibrio. La componente horizontal del peso:

$$F_g^x = -mg\,sen\,\theta \cong -mg\frac{x}{L}$$

La fuerza horizontal resultante de los dos resortes es:

$$F_r = -2kx$$

La segunda ley de Newton se escribe:

$$ma = -(\frac{mgx}{L} + 2kx)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (\frac{g}{L} + \frac{2k}{m})x = 0$$

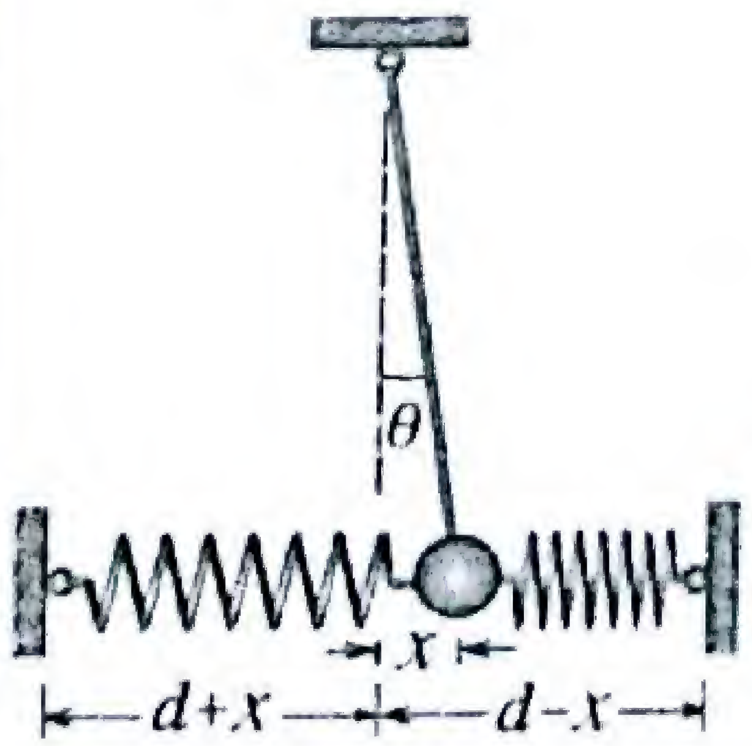
Esta es la ecuación diferencial típica del MAS:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

La frecuencia angular de las vibraciones es:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{2k}{m}}$$

Observe que: $\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2$. Es decir, la frecuencia resultante es una combinación cuadrática de las frecuencias propias del péndulo: $\omega_1^2 = g/L$, y del oscilador masa resorte: $\omega_2^2 = 2k/m$.

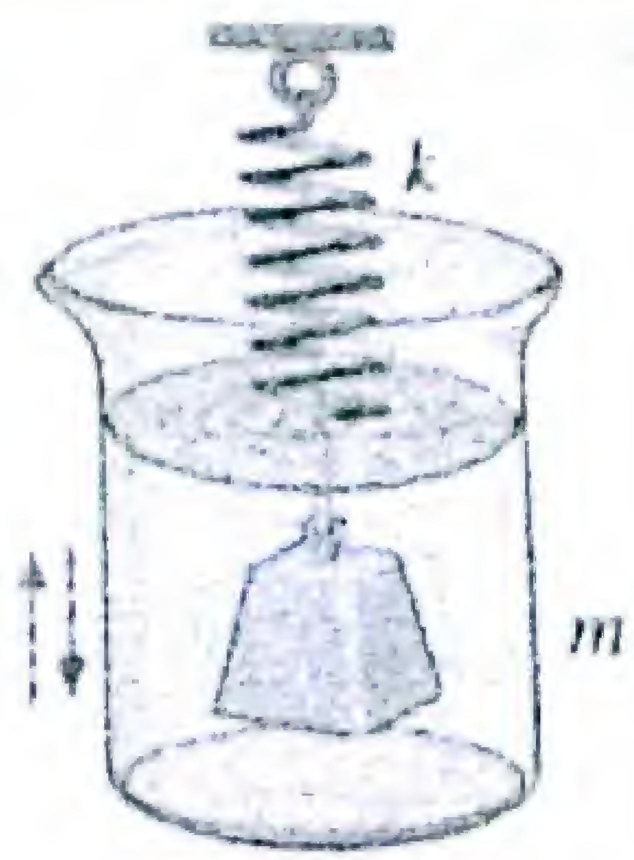


Respuesta

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{2k}{m}}}$$

PR-6.39. ***Oscilaciones amortiguadas***

Una pesa está suspendida de un resorte y sumergida en un fluido. La pesa tiene una masa m = 1,5 kg y la constante elástica del resorte es k = 9 N/m. La pesa es desplazada una distancia de 12 cm respecto a su posición de equilibrio y luego se suelta. Se sabe que la fuerza de fricción del fluido es proporcional a la velocidad de la pesa ($F_r = -bv$), donde b = 0,2 kg/s
a) Calcule el intervalo de tiempo necesario para que la amplitud de las oscilaciones de la pesa disminuya a un tercio de su valor inicial.
b) ¿Cuántas oscilaciones efectuará la pesa en ese tiempo?



Solución: a) El desplazamiento vertical de la pesa está dado por la expresión:

$$y(t) = Ae^{-bt/2m}\cos(\omega t + \phi)$$

El tiempo t_1 requerido para que la amplitud caiga un tercio de su valor inicial, A, está dado por:

$$Ae^{-bt_1/2m} = A/3$$

despejando t_1:

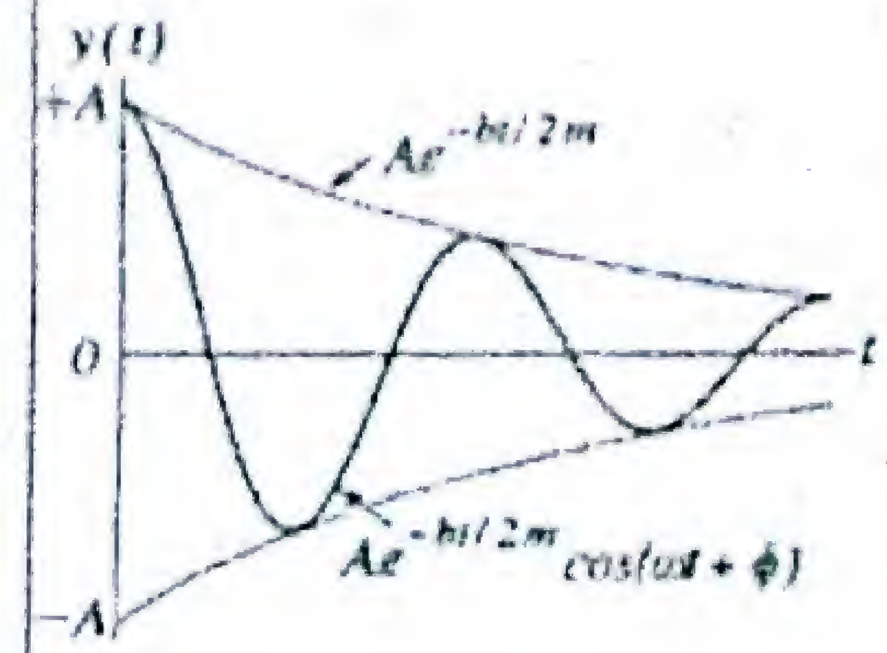
$$t_1 = \frac{2m}{b}\ln 3 = \frac{2(1,5\text{kg})}{0,2\text{kg/s}}\ln 3 = 16,5\text{s}$$

b) La frecuencia angular de las oscilaciones es:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} = \sqrt{\frac{9\text{N/m}}{1,5\text{kg}} - \frac{(0,2\text{kg/s})^2}{4(1,5\text{kg})^2}} = 2,45\text{rad/s}$$

El número de oscilaciones que se ejecutan en el tiempo t_1 es:

$$N = \frac{t_1}{T} = \frac{t_1}{2\pi/\omega} = \frac{\omega t_1}{2\pi} = \frac{(2,45\text{rad/s})(16,5\text{s})}{2\pi\text{rad}} = 6,43$$



Respuesta:

a) t_1 = 16,5 s
b) N = 6,43 osc.

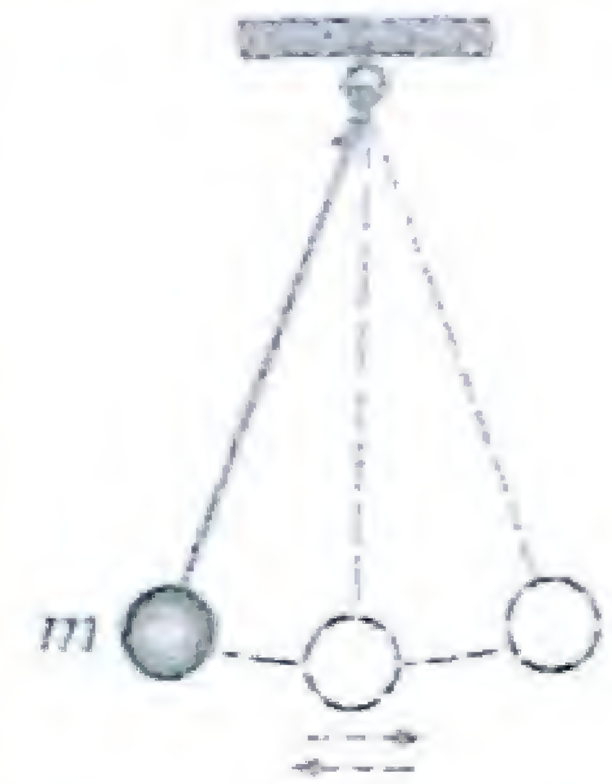
PR-6.40. ***Oscilaciones amortiguadas II***

a) Demostrar que, en un oscilador amortiguado, el cociente entre las amplitudes que corresponden a dos oscilaciones sucesivas, es constante.
b) Un oscilador amortiguado pierde un veintavo de su energía durante cada ciclo. ¿Cuántos ciclos deberán pasar antes de que se disipe la mitad de la energía inicial?

PE-6.04. *Número de veces que pasa por el equilibrio*

Una esferita que está suspendida por un hilo, es apartada a un lado y después se suelta. La esferita oscila alrededor de su posición de equilibrio con un período $T = 0.1$ s. ¿Cuántas veces pasará la esferita por la posición de equilibrio cada segundo?

a) 4 b) 8 c) 10 d) 20 e) 100



PE-6.05. *Tiempo para recorrer la mitad de la amplitud*

Una partícula está animada de un movimiento armónico simple de período T y amplitud A.

¿En cuánto tiempo recorrerá la distancia desde el centro de oscilación hasta la posición $A/2$?

a) $T/4$
b) $T/6$
c) $T/8$
d) $T/10$
e) $T/12$

PE-6.06. *¿Cuál es el período de las oscilaciones?*

Un partícula oscila con un MAS y se observa que le toma un tiempo $\Delta t = 1$ s en ir desde un extremo de su recorrido hasta la posición media entre ese punto y el punto de equilibrio.

¿Cuál será el período de las oscilaciones?

a) $T = 4$s
b) $T = 5$s
c) $T = 6$s
d) $T = 8$s
e) $T = 10$s

PE-6.07. *¿Cuál expresión es equivalente?*

La coordenada de una partícula que ejecuta un movimiento armónico simple varía con el tiempo de acuerdo a la relación:

$$x = A\cos(\omega t + 5\pi/3)$$

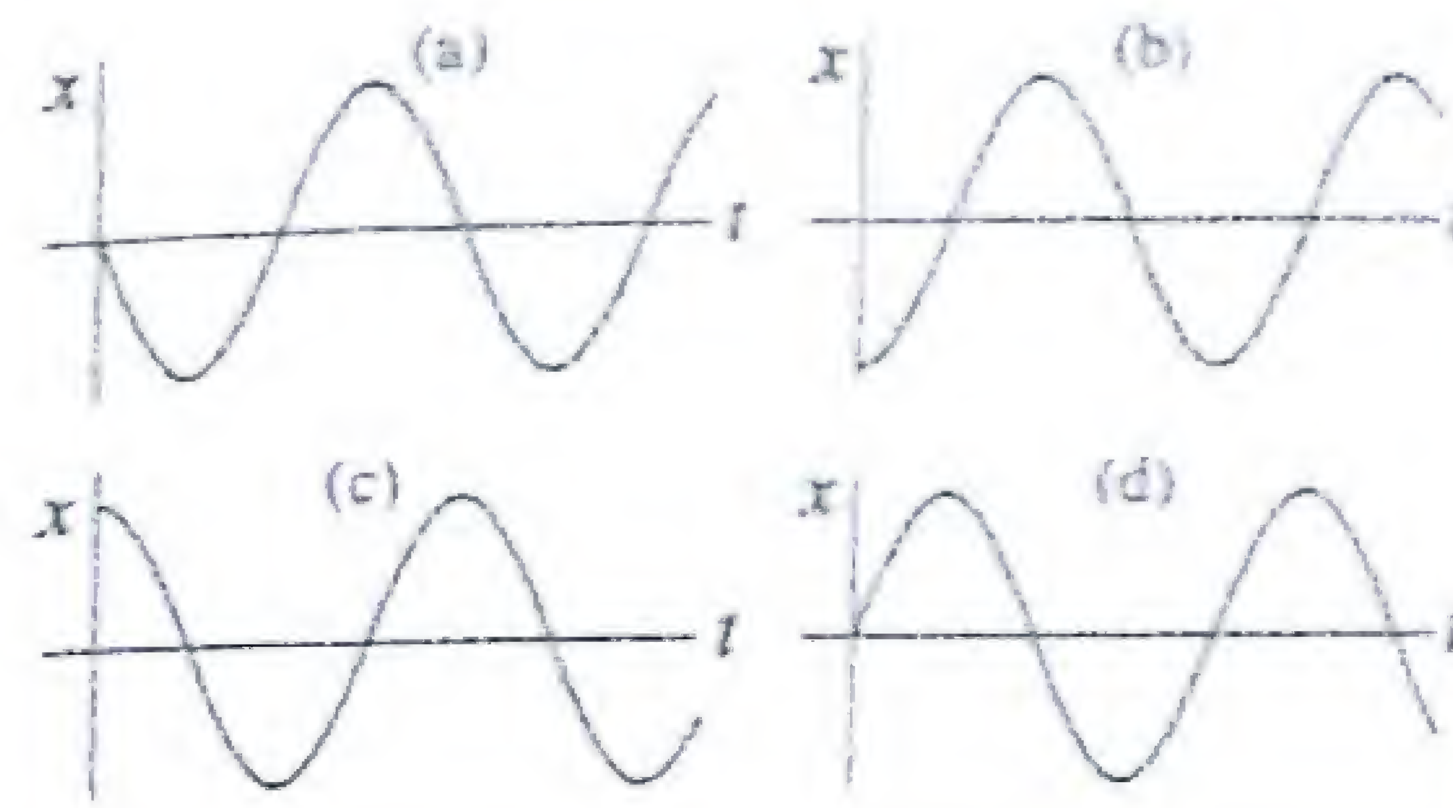
¿Cuál de las siguientes expresiones es equivalente?

a) $x = A\cos(\omega t + \pi/3)$
b) $x = A\,sen(\omega t + \pi/6)$
c) $x = A\,sen(\omega t - 5\pi/6)$
d) $x = A\cos(\omega t - \pi/2)$
e) $x = A\,sen(\omega t - \pi/3)$

PE-6.08. *¿Cuál de estas gráficas es la correcta?*

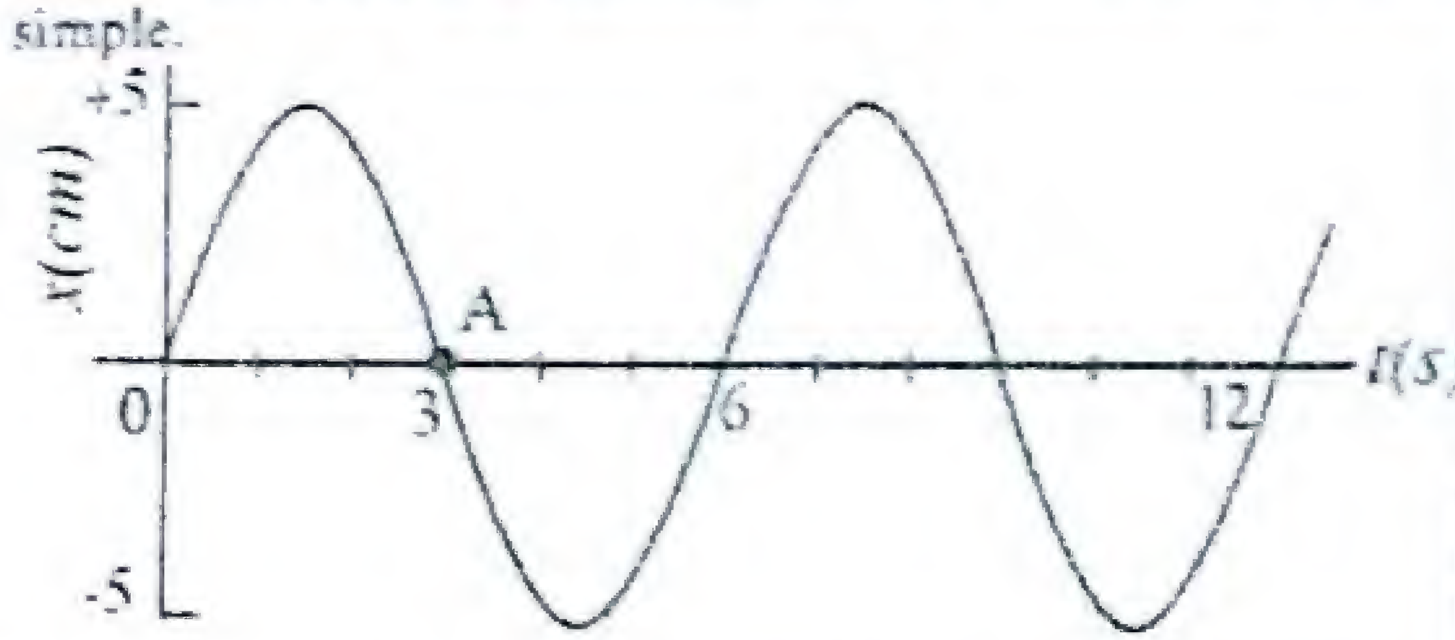
¿Cuál de las siguientes gráficos de x en función del tiempo representa la ecuación del MAS

$$x(t) = A\cos(\omega t - 3\pi/2)?$$



PE-6.09. *¿Cuál es la velocidad en el punto A?*

La figura muestra el desplazamiento $x(cm)$ en función del tiempo $t(s)$ para una partícula con movimiento armónico simple.

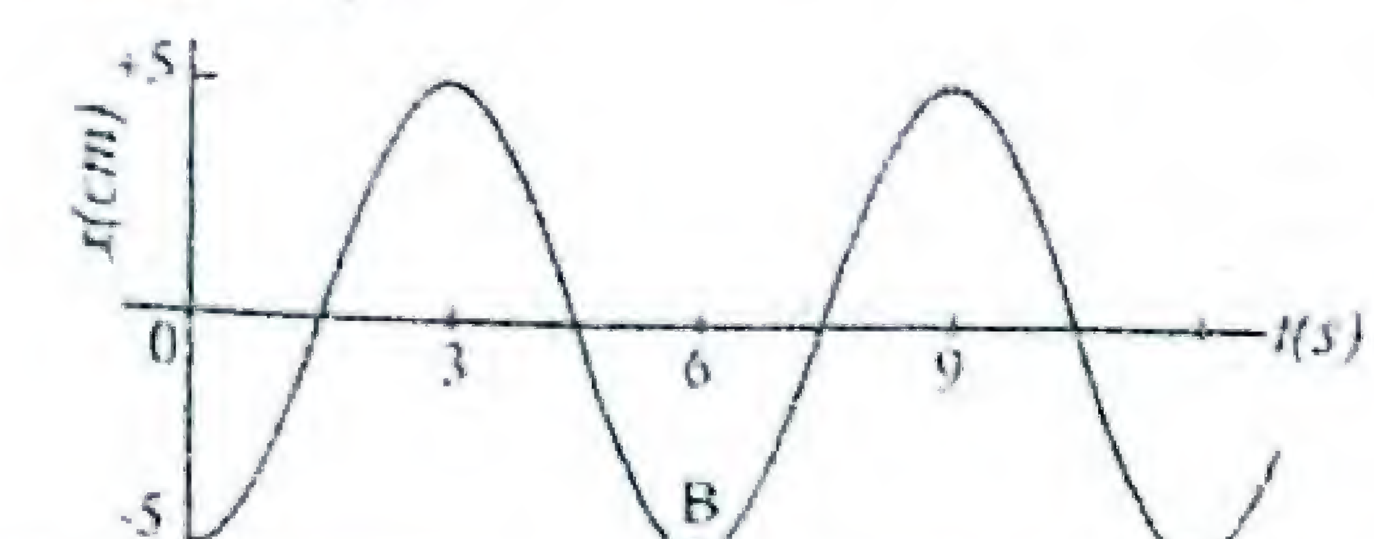


¿Cuál será la velocidad de la partícula en el punto A?

a) cero.
b) +0.833 cm/s.
c) -2,62 cm/s
d) +3,14 cm/s.
e) -5,24 cm/s

PE-6.10. *¿Cuál es la aceleración en el punto B?*

La figura muestra el desplazamiento $x(m)$ en función del tiempo $t(s)$ para una partícula que tiene un movimiento armónico simple.



¿Cuál es la aceleración de la partícula en el punto B?

a) cero.
b) -2,74 m/s^2.
c) +5,48 m/s^2
d) -10,48 m/s^2.
e) -5,48 m/s^2

Solución: a) Para dos instantes consecutivos separados por un periodo, las amplitudes respectivas son:

$$A(t) = A_0 e^{-(b/2m)t}$$

$$A(t+T) = A_0 e^{-(b/2m)t} e^{-(b/2m)T}$$

La relación de amplitudes es:

$$\frac{A(t+T)}{A(t)} = \frac{A_0 e^{-(b/2m)t} e^{-(b/2m)T}}{A_0 e^{-(b/2m)t}} = e^{-(b/2m)T} = \text{Const}$$

b) La relación de energías entre ciclos sucesivos es:

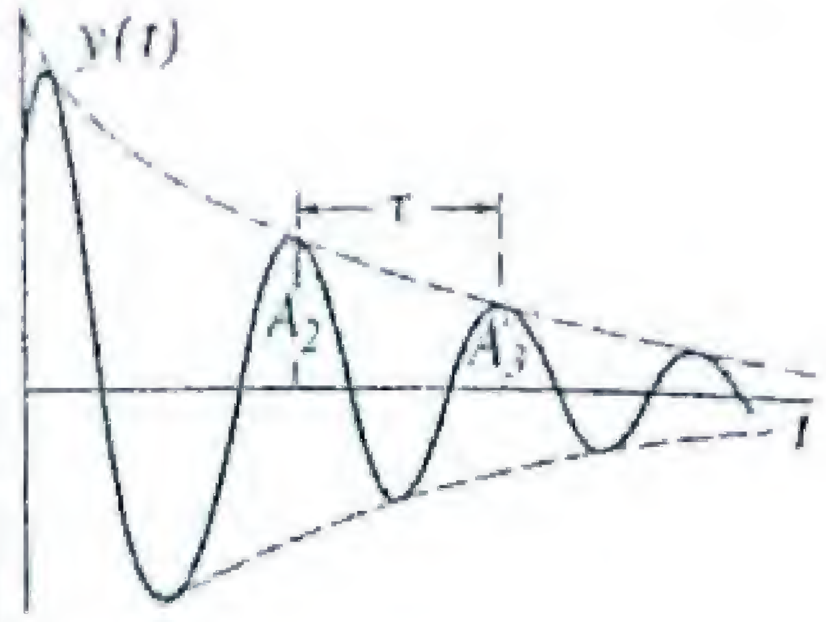
$$E_n = E_{n-1} - \frac{E_{n-1}}{20} \quad \Rightarrow \quad \frac{E_n}{E_{n-1}} = \frac{19}{20}$$

Por lo tanto:

$$\frac{E_0}{E_n} = \frac{E_0}{E_1}\frac{E_1}{E_2}\cdots\frac{E_{n-1}}{E_n} = \left(\frac{20}{19}\right)^n$$

Tomando en cuenta que: $E_0 / E_n = 2$, encontramos:

$$2 = \left(\frac{20}{19}\right)^n \quad \Rightarrow \quad n = 13{,}5.$$



Respuesta

a) $\dfrac{A(t+T)}{A(t)} = e^{-(b/2m)T}$

b) Aprox. 14 ciclos

VERIFICA TU COMPRENSIÓN

PE-6.01. *¿Cuál de estas afirmaciones es incorrecta?*

En el movimiento armónico simple no es cierto que

a) La longitud total recorrida durante un período completo es cuatro veces la amplitud.

b) La velocidad alcanza un valor máximo cuando la aceleración alcanza un mínimo.

c) La aceleración es proporcional al desplazamiento desde el equilibrio y de sentido opuesto.

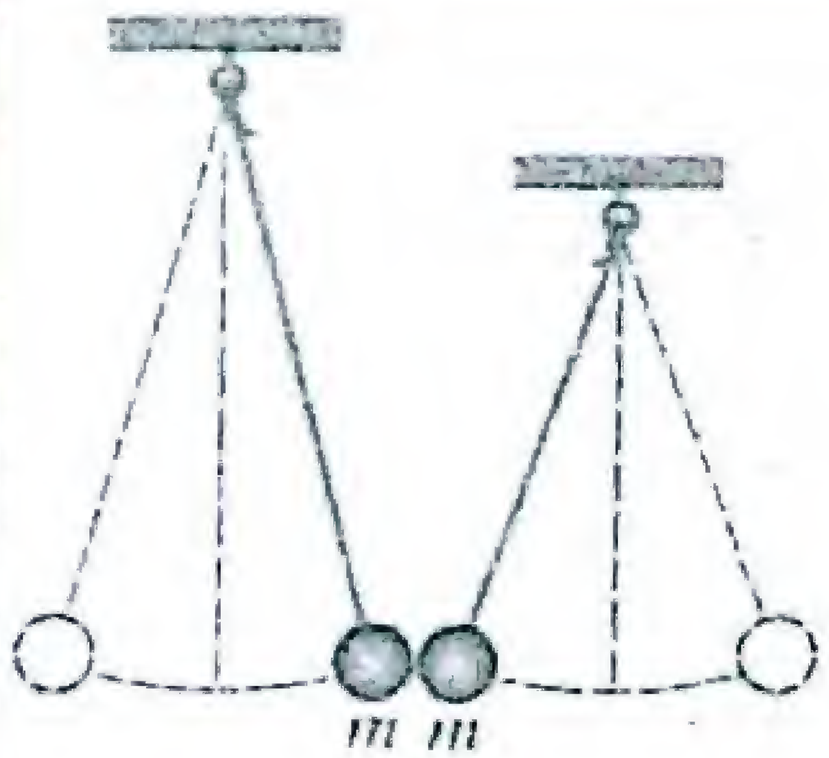
d) La aceleración alcanza un valor máximo cuando el desplazamiento es máximo.

e) La aceleración máxima es proporcional al cuadrado de la amplitud.

PE-6.02. *Dos péndulos sincronizados*

Dos péndulos simples de longitudes distintas L_1 y L_2, se sueltan desde posiciones en que están casi tocándose. Se observa que dichos péndulos vuelven a coincidir en esas posiciones cada vez que el de longitud L_1 ejecuta 8 oscilaciones completas y el de longitud L_2 ejecuta 12 oscilaciones completas. La relación entre sus longitudes L_1/L_2, es:

a) 9/4, b) 3/2, c) 4/3, d) 2/3, e) 4/9



PE-6.03. *Si se modifica la amplitud de oscilación*

Un oscilador armónico simple tiene una amplitud A. Si se disminuye la amplitud de oscilación, ¿cuál de las siguientes cantidades *no varía*?

a) la velocidad máxima.

b) la aceleración máxima.

c) la energía total.

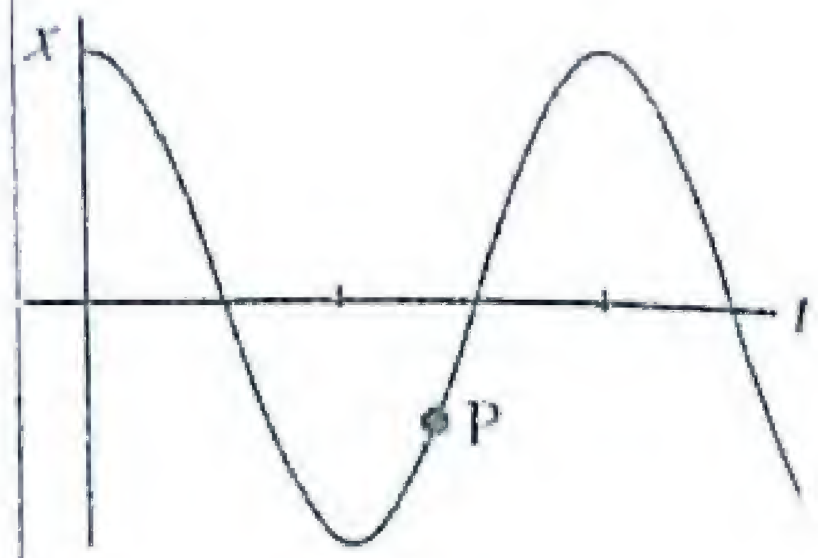
d) el periodo

e) ninguna de estas

PE-6.11. ***Signos de la velocidad y la aceleración***

La figura muestra la posición en función del tiempo para una partícula con movimiento armónico simple. En el punto P la partícula tiene:

a) velocidad negativa y aceleración negativa
b) velocidad positiva y aceleración positiva
c) velocidad negativa y aceleración positiva
d) velocidad positiva y aceleración negativa

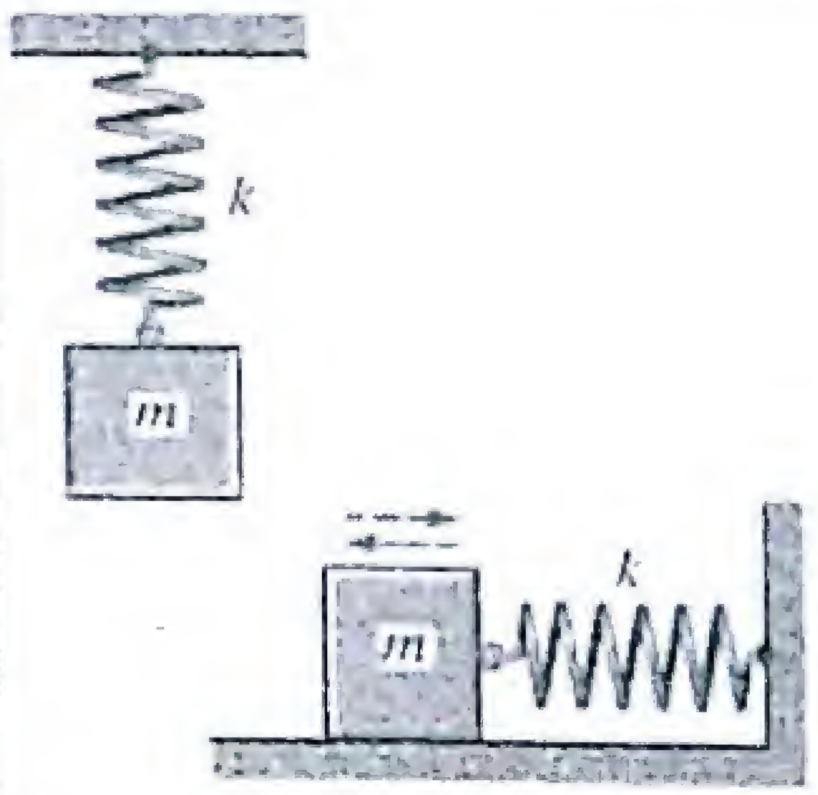


PE-6.12. ***¿Será suficiente esta información?***

Cuando se cuelga un bloque de un resorte vertical, éste sufre un alargamiento Δx = 0,993 m. ¿Si ponemos a oscilar este sistema en una superficie horizontal sin fricción, cuál sería su período?

a) T = 0,1 s, b) T = 2,0 s, c) T = 50 s

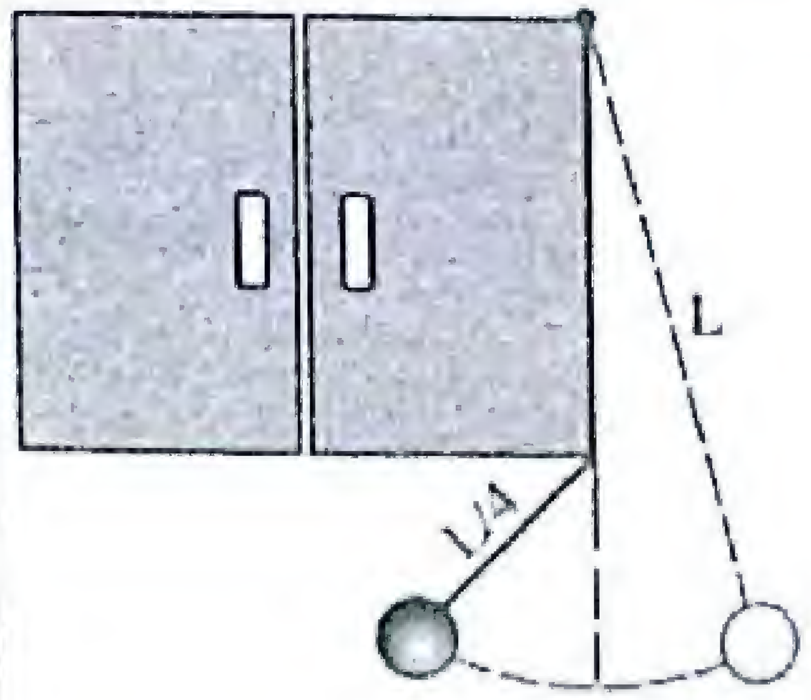
d) T = 100 s, e) información insuficiente



PE-6.13. ***Período de un péndulo interrumpido***

Un péndulo tiene un período T_o = 2 s para pequeñas oscilaciones. Si se coloca un obstáculo para que el hilo tropiece de modo que solamente la cuarta parte de su longitud pueda continuar oscilando hacia la izquierda, ¿cuál será el nuevo período de las oscilaciones completas?

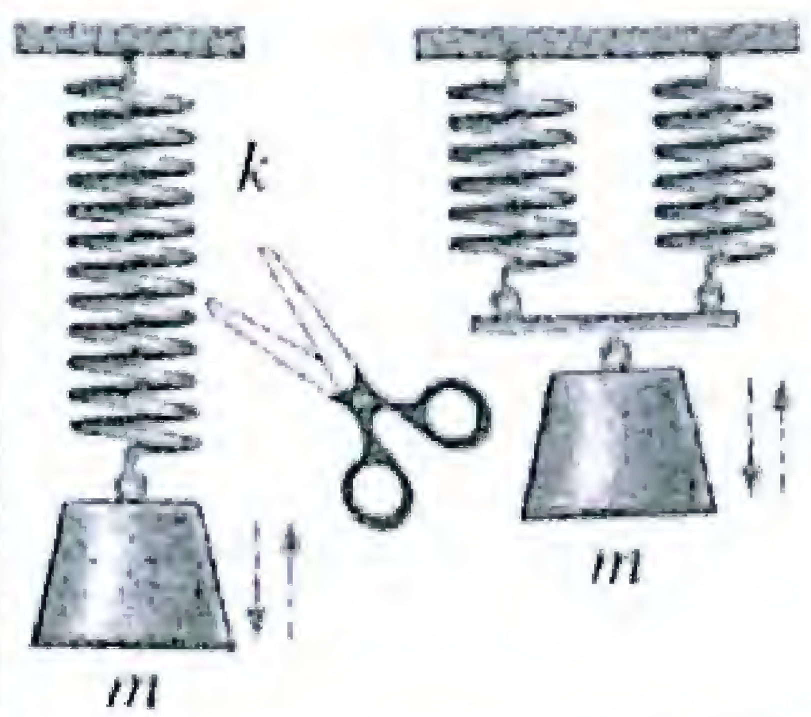
a) 1,5 s b) 1,25 s c) 2 s d) 1,75 s e) 2,5 s



PE-6.14. ***Si se corta un resorte en dos partes iguales***

Una pesa suspendida de un resorte realiza oscilaciones de período T_0. Se corta el resorte por la mitad y las dos mitades se utilizan en paralelo para sostener la misma pesa, ¿cuál será el nuevo período de oscilación?

a) T_0 b) $2\,T_0$ c) $\dfrac{T_0}{\sqrt{2}}$ d) $\sqrt{2}T_0$ e) $\dfrac{T_0}{2}$



PE-6.15. ***¿Cuál es el período del MAS?***

Una partícula ejecuta un movimiento armónico simple y se observa lo siguiente:

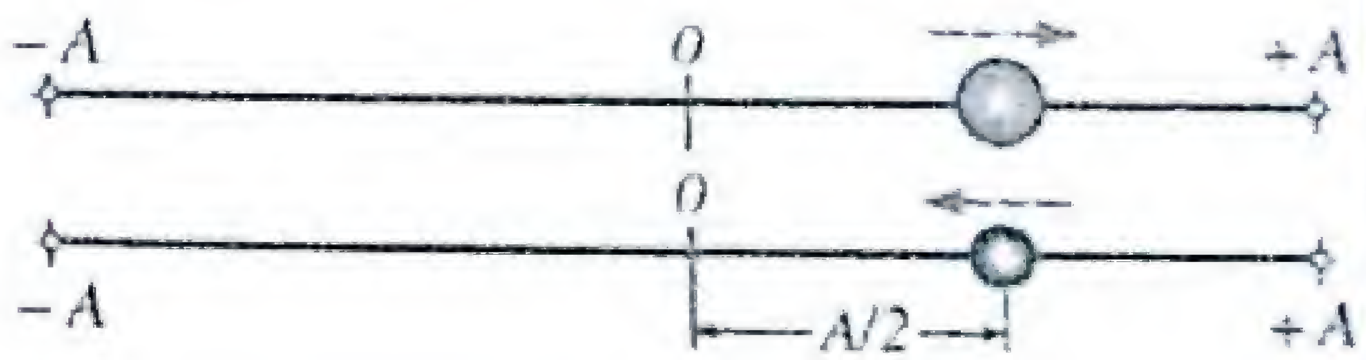
a) Para ir de un punto A a otro punto B, en los cuales tiene la misma velocidad, tarda 1 segundo.
b) Para volver a pasar por el punto B en la dirección opuesta, tarda 2 segundos más.

¿Cuál es el período de las oscilaciones?

a) T = 4 s
b) T = 5 s
c) T = 6 s
d) T = 8 s
e) T = 10 s

PE-6.16. ***Partículas vibrando que se cruzan***

Dos partículas ejecutan un movimiento armónico simple de la misma amplitud y frecuencia. Se cruzan entre sí cuando van en direcciones opuestas cada vez que su desplazamiento es la mitad de su amplitud.



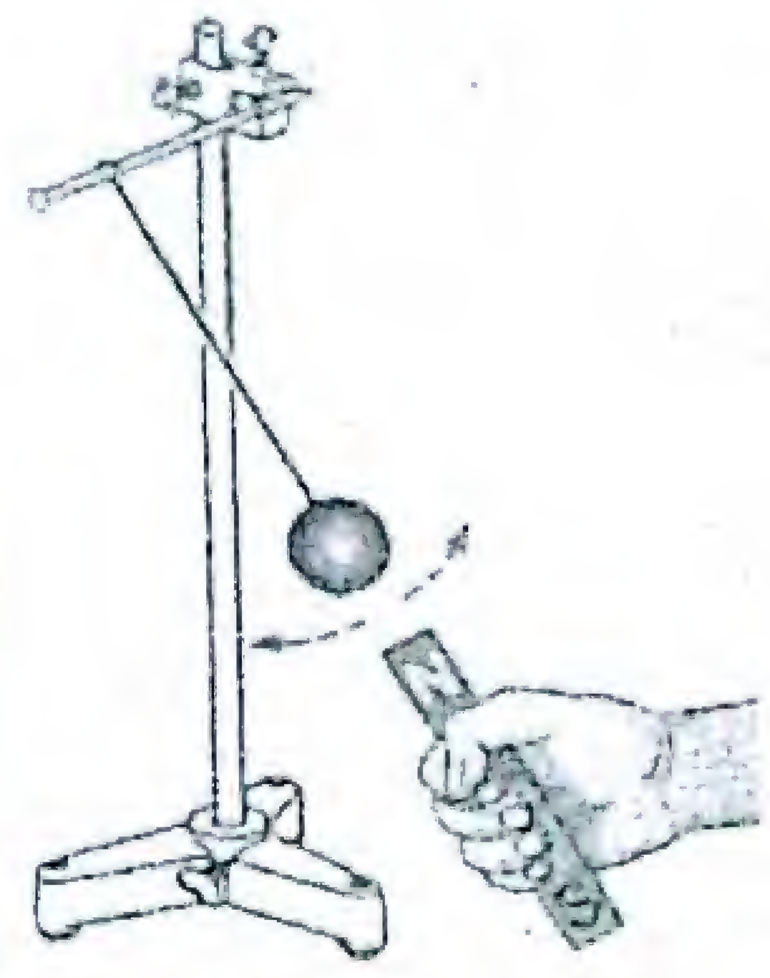
¿Cuál es la diferencia de fase entre los movimientos de estas dos partículas?

a) $\phi = 45°$
b) $\phi = 60°$
c) $\phi = 90°$
d) $\phi = 120°$
e) $\phi = 180°$

PE-6.17. ***¿Afectará ese imán el ritmo del péndulo?***

Un péndulo constituido por una esferita de hierro suspendida de un hilo, está sometido a la atracción de un imán que se combina con la gravedad para dar al péndulo una posición de equilibrio oblicua. ¿Cómo será el período de este péndulo, T, en comparación con el período normal en torno a la vertical cuando el imán estaba ausente, T_0?

a) $T < T_0$, b) $T = T_0$, c) $T > T_0$

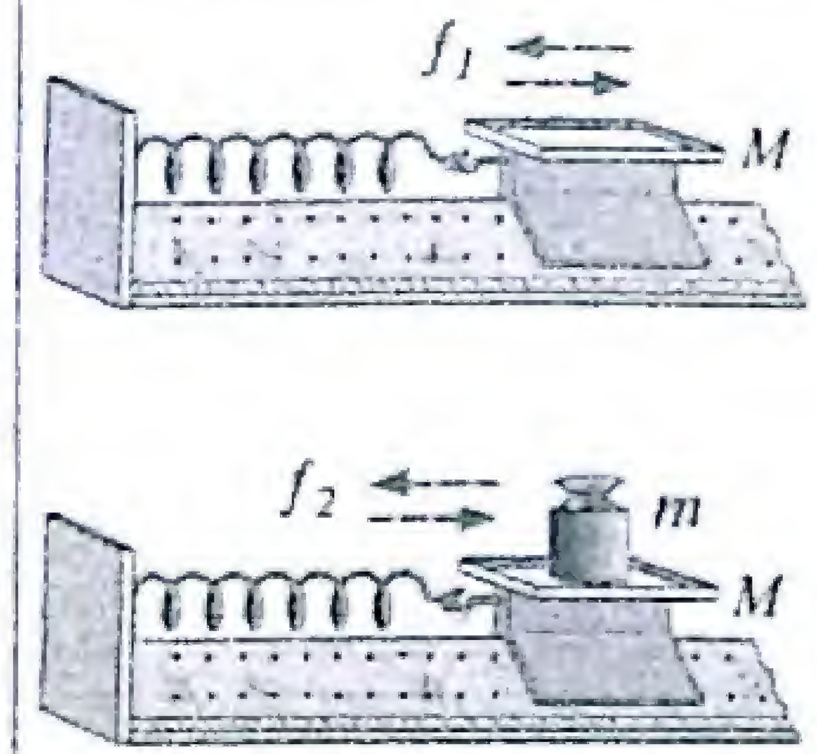


PE-6.18. *Periodo del péndulo en presencia de un imán*

Una esferita de hierro de peso mg está suspendida de un hilo, formando un péndulo de periodo T_o. Cuando se coloca un imán por debajo de la esferita produciendo un campo magnético en dirección vertical, el periodo se reduce a la mitad, $T = T_o/2$. ¿Cuál es el valor de la fuerza magnética que actúa sobre la esferita?

a) $3mg$, b) $2mg$, c) mg, d) $mg/2$, e) $mg/4$

PE-6.19. *Pesa para cambiar la frecuencia de oscilación*



En una práctica de laboratorio de física, sobre un riel de aire horizontal sin fricción está un deslizador de masa M = 1,136 kg en el extremo de un resorte, oscilando con una frecuencia f_1 = 6,0 Hz. Cuando se le pone una masa adicional m = 0,50 kg, la frecuencia de oscilación será:

a) f_2 = 3,0 Hz, b) f_2 = 5,0 Hz, c) f_2 = 12,0 Hz

d) f_2 = 9,0 Hz, e) f_2 = 16,0 Hz

PE-6.20. *Péndulo para oscilaciones de gran amplitud*

Para hallar el periodo de un péndulo en el caso de oscilaciones de pequeña amplitud, $T_o = 2\pi\sqrt{L/g}$, hemos hecho la aproximación $sen\theta = \theta$. ¿Cómo será el periodo si la oscilación no es de pequeña amplitud?

a) $T < 2\pi\sqrt{L/g}$ b) $T = 2\pi\sqrt{L/g}$, c) $T > 2\pi\sqrt{L/g}$

PE-6.21. *Energías de péndulos de distintas amplitudes*

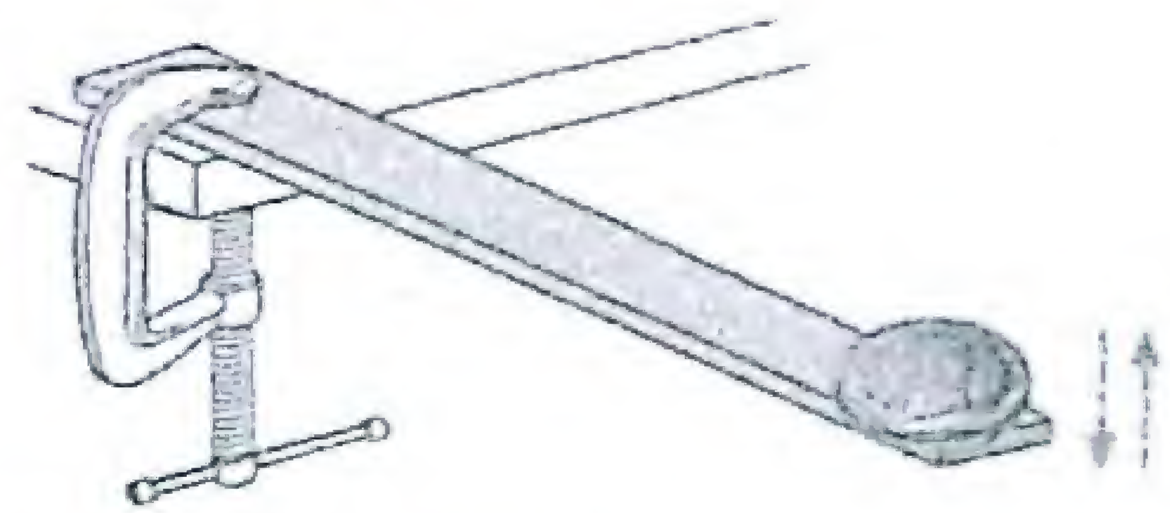
Dos péndulos simples, A y B, de longitud y masa idénticas, oscilan con amplitudes angulares de 30° y 60°, respectivamente. La energía del péndulo B se relaciona con la del péndulo A mediante:

a) E_B =1,73 E_A, b) E_B =2 E_A, c) E_B =2,5 E_A

d) E_B =3 E_A, e) E_B =3,73 E_A

PE-6.22. *Vibraciones de una moneda sobre la lámina*

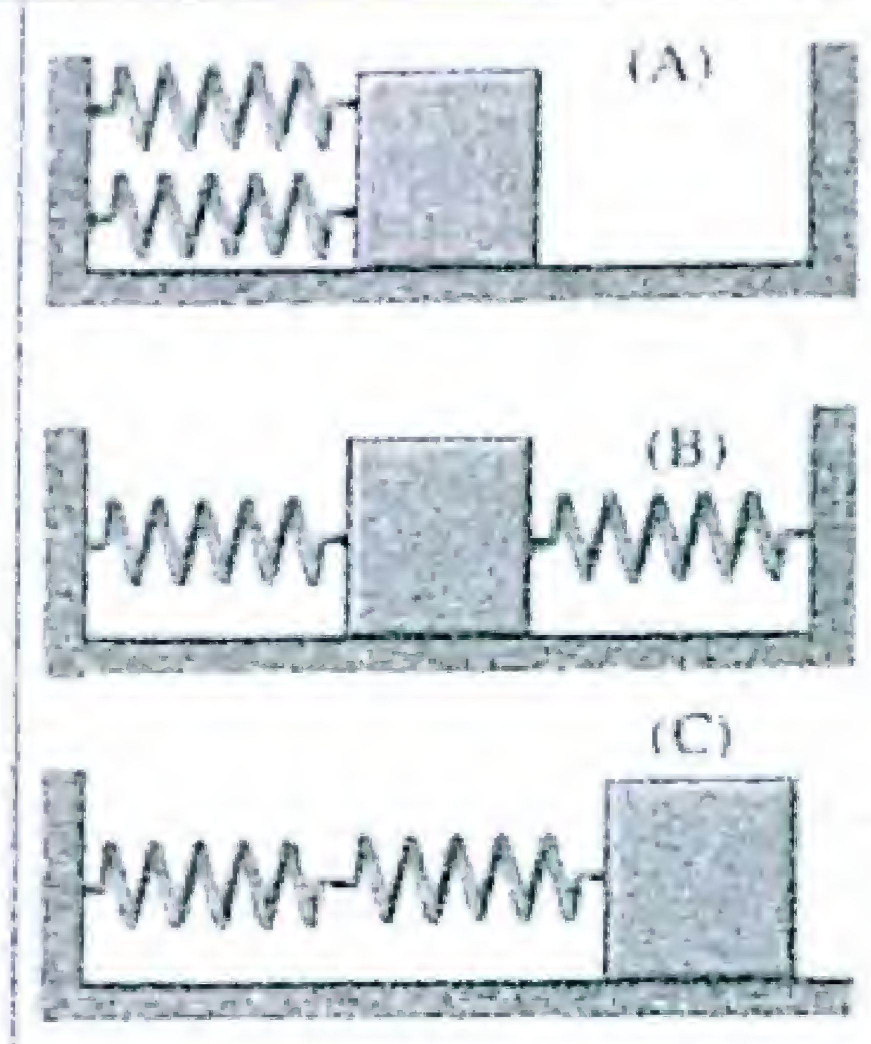
Se coloca una moneda en el extremo de la lámina y se pone a vibrar de modo que su extremo ejecuta un movimiento armónico simple en la dirección vertical con una frecuencia angular fija: ω = 9,9 rad/s.



Si se va aumentando la amplitud de las vibraciones, se llega a un valor para el cual la moneda perderá contacto con la lámina. ¿Cuál será este valor crítico de la amplitud de las oscilaciones?

a) A = 0,5 cm
b) A = 1 cm
c) A = 5 cm
d) A = 10 cm
e) A = 20 cm

PE-6.23. *Buscando la mejor combinación*



Considerando los tres osciladores mostrados constituidos por un bloque y diferentes combinaciones de dos resortes idénticos, ¿cómo se comparan los periodos de oscilación?

a) $T_A > T_B > T_C$ b) $T_A < T_B = T_C$

c) $T_A > T_B = T_C$ d) $T_A = T_B < T_C$

e) $T_A = T_B > T_C$

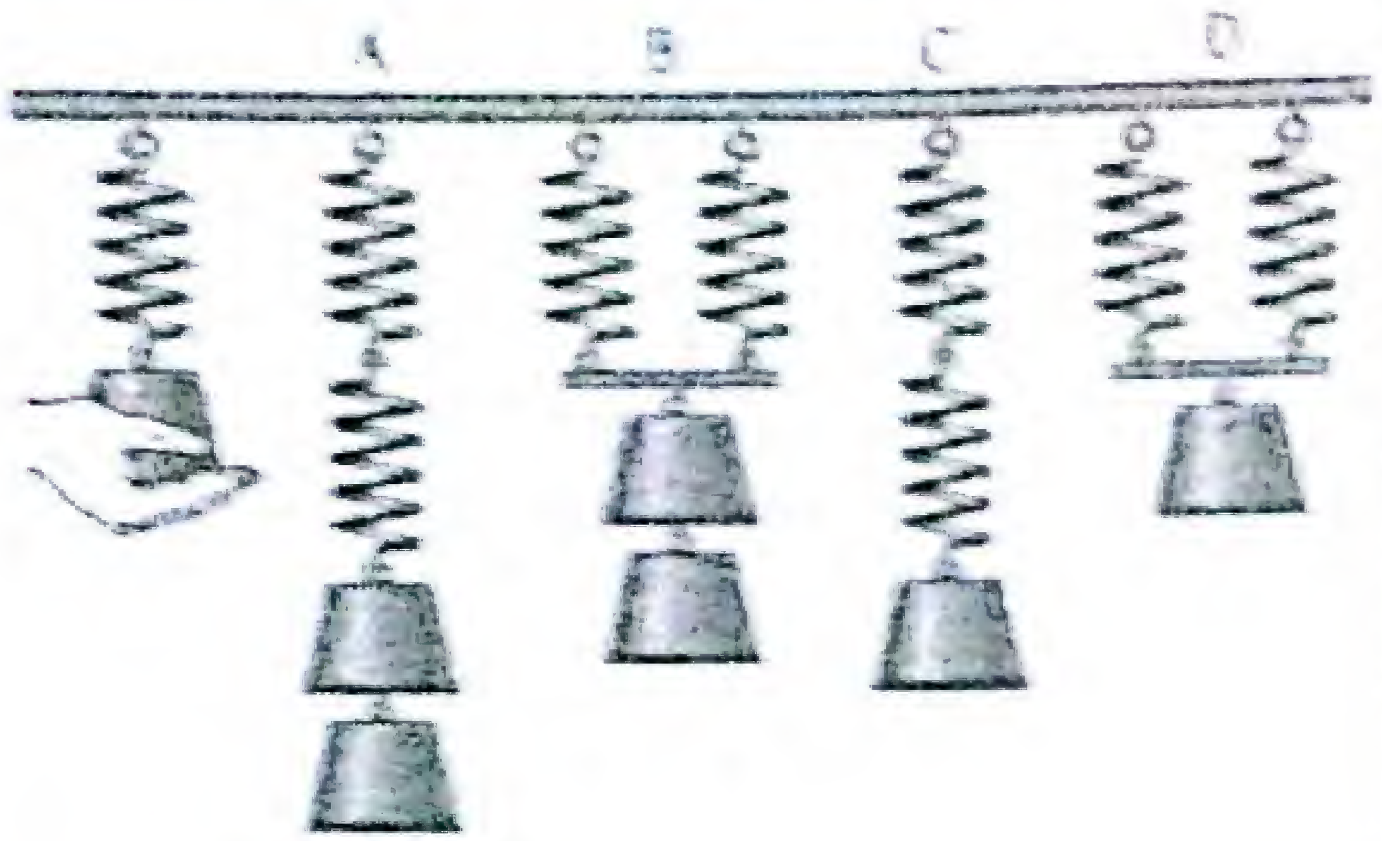
PE-6.24. *Mas tiempo en el centro que en los extremos*

Al observar un reloj de péndulo de pared, una persona tiene la impresión de que el péndulo pasa menos tiempo en la mitad de su recorrido de la región central CD, que en la otra mitad ubicada en los extremos. Para saber si es cierto, considera que el movimiento es armónico simple y si calcula la relación entre estos tiempos, el resultado que obtiene para T_{CD}/T_{AB} debe ser....

a) $\frac{1}{3}$, b) $\frac{1}{4}$, c) $\frac{1}{2}$, d) $\frac{2}{5}$, e) $\frac{1}{5}$

PE-6.25. *A dos de ellos les gusta bailar al mismo ritmo*

En una demostración de física, colocamos suspendidos de una barra, cinco osciladores constituidos por diferentes combinaciones de masas y resortes idénticos.

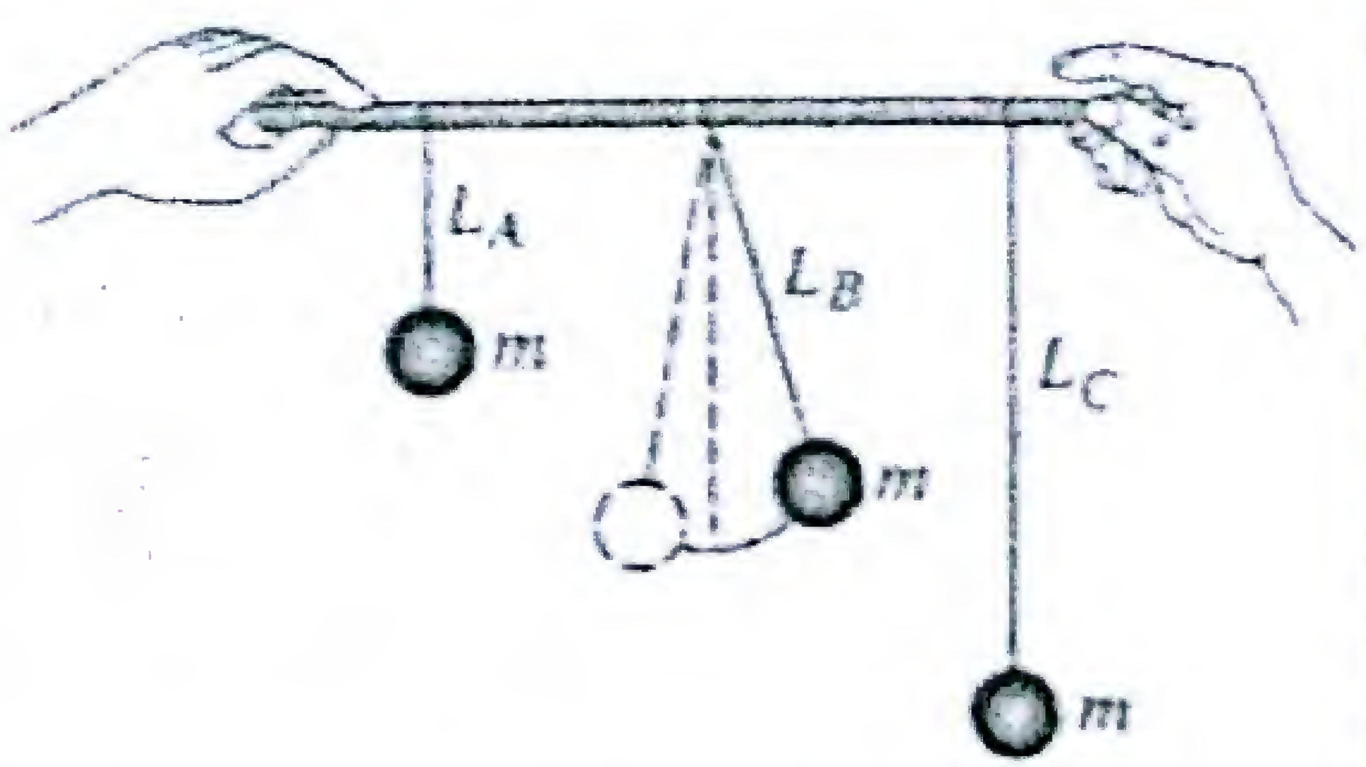


Cuando ponemos a oscilar el sistema de la izquierda, la barra transmite las vibraciones a los otros sistemas. ¿Cuál de los sistemas de la derecha, entra en resonancia y se pone a oscilar con la mayor amplitud?

a) El sistema A
b) El sistema B
c) El sistema C
d) El sistema D
e) Todos con igual amplitud.

PE-6.26 *¿Serán ondas psico-acústicas del cerebro?*

En una demostración de física de la USB, el Profesor Figueroa muestra a los alumnos una barrita (pitillo) que tiene tres péndulos, de igual masa pero de longitudes diferentes. El profesor pide a la audiencia que escojan cuál de estos péndulos quieren que oscile y para ello deben enfocar su mirada en éste, y únicamente en éste. Los estudiantes quedan atónitos, porque espontáneamente y sin ninguna causa aparente, el péndulo que seleccionaron empieza a oscilar con una gran amplitud, mientras que los otros dos permanecen quietos.



Las longitudes, ($L_A < L_B < L_C$), se escogen de manera tal que los periodos no sean múltiplos unos de otros.

La explicación de este fenómeno es que....

a) Del cerebro de los estudiantes emanan ondas psico acústicas de igual frecuencia que la de oscilación del péndulo escogido y así entran en resonancia con éste.

b) El efecto de las ondas psico acústicas del profesor es el que predomina porque él está más cerca del péndulo.

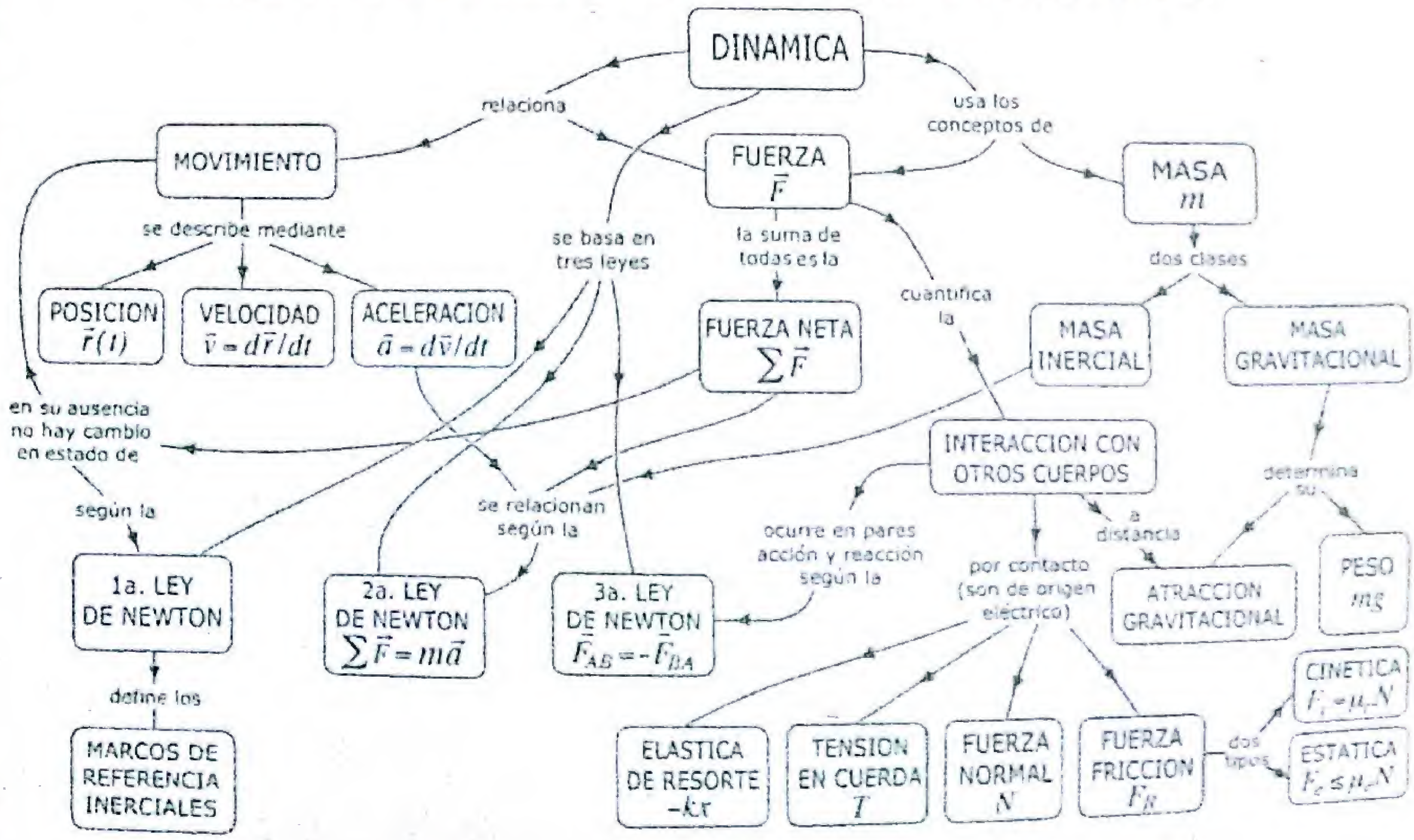
c) Sin que los alumnos lo noten, el Profesor va dando con un dedo pequeños impulsos al pitillo y al ritmo apropiado para entrar en resonancia con el péndulo escogido. El efecto acumulativo de estos pequeños impulsos hace que las oscilaciones alcancen grandes amplitudes.

CAP. 6: RESPUESTAS A LAS PREGUNTAS

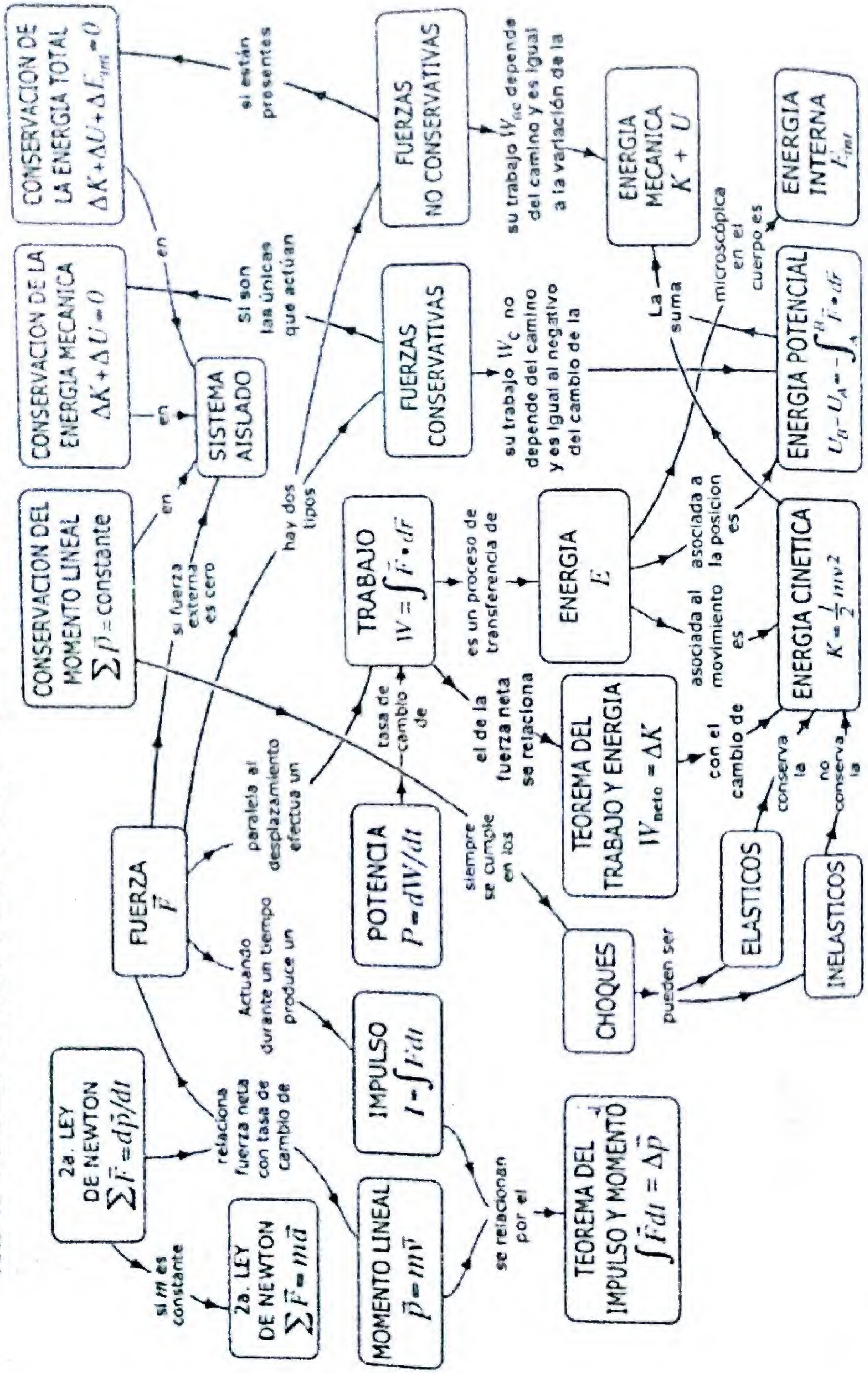
	a	b	c	d	e
6.01					✓
6.03				✓	
6.05					✓
6.07		✓			
6.09					✓
6.11		✓			
6.13	✓				
6.15			✓		
6.17	✓				
6.19		✓			
6.21					✓
6.23				✓	
6.25		✓			

	a	b	c	d	e
6.02	✓				
6.04				✓	
6.06			✓		
6.08	✓				
6.10			✓		
6.12		✓			
6.14					✓
6.16				✓	
6.18	✓				
6.20			✓		
6.22				✓	
6.24	✓				
6.26			✓		

MAPA DE CONCEPTOS - LEYES DE NEWTON



MAPA DE CONCEPTOS - LEYES DE CONSERVACIÓN



BIBLIOGRAFÍA RECOMENDADA

Para los lectores que deseen aclarar, ampliar o profundizar sus conocimientos sobre este tema a nivel de física básica universitaria, nos permitimos sugerir los siguientes libros:

ALONSO, M. y FINN, E.: *Física*. Addison Wesley, 1992.

BÚJOVTSEV, B., KRIVCHENKOV, V, MIAKISHEV, G. y SARÁEVA, I.: *Problemas Seleccionados de Física Elemental*, Editorial Mir Moscú, 1979.

EISBERG, R. y LERNER, L. S: *Física, Vol. 1*, McGraw-Hill, 1984.

FEYNMAN, R. P., LEIGHTON R. B. and SANDS M: *Lectures on Physics, Vol. 1*, Addison-Wesley, 1964.

FISHBANE, P., GASIOROWICZ, S and THORNTON, S: *Physics for Scientists and Engineers*, 2nd Edition, Prentice-Hall, 1996.

GIANCOLI, D: *Física: Principios con aplicaciones*, Cuarta edición, Prentice-Hall Hispanoamericana, 1997.

HALLIDAY, D., RESNICK, R. and WALKER, J: *Fundamentals of Physics*, John Wiley & Sons, 1997.

KITTEL, C., KNIGHT, W. and RUDERMAN, M.: *Mechanics*, *Berkeley Physics Course, Volume 1*, McGraw-Hill, 1965.

LEA, S y BURKE, J: Física. *La naturaleza de las cosas, Volumen 1*, International Thomson Editores, 1999.

SEARS, F., ZEMANSKY, M. and YOUNG H., *University Physics*, 6th Edition, Addison-Wesley, 1982.

SERWAY, R. A: *Física, Volumen 1*, Cuarta edición, McGraw-Hill, 1997.

SLOBODETSKI, I. y ORLOV, V: *Olimpiadas de Física de la Unión Soviética*, Vneshtorgizdat, Moscú, 1989.

TIPLER, P. A: *Física, Volumen 1*, Tercera edición, Editorial Reverté, 1996.

YOUNG H. D. and FREEDMAN R. A: *University Physics, Vol. 1*, 9th Edition, Addison-Wesley, 1996.

Impreso en Venezuela
durante el mes de junio del año dos mil doce
en los talleres litográficos de
MIGUEL ANGEL GARCIA E HIJO, s.r.l.
Sur 15 • Nº 107 • El Conde • Caracas
Telefax: (0212) 576.13.62

E-mail: magimpresores@yahoo.com

DINÁMICA

Fuerza y Movimiento • Aplicaciones de las Leyes de Newton • Trabajo y Energía • Conservación de la Energía • Momento Lineal y Choques • Movimiento Oscilatorio

Un enfoque metodológico centrado en la resolución de problemas con énfasis, tanto en aplicaciones de Ciencias e Ingeniería, como en situaciones de la vida diaria

ISBN 980-12-2483-9

9 789801 224839

Volumen 2:
Serie Física para Ciencias e Ingeniería